

Ztráta stability konstrukcí MKP

Miroslav Španiel

ČVUT v Praze Fakulta strojní

2009

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Pojem vzpěrné únosnosti.

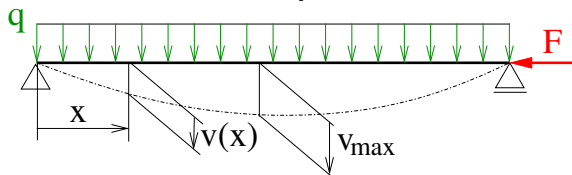
Požadavky na vysokou únosnost a malou hmotnost moderních konstrukcí vedou k využívání štíhlých a tenkostěnných prvků. Tato tendence má své limity. Praktické zkušenosti a zkoušky ukazují, že únosnosti stanovené podle elementárních elastických nebo elasticko-plastických teorií se podaří dosáhnout jen výjimečně. Velmi důležitou roli při tom hraje vyčerpání “vzpěrné” únosnosti.

Ke ztrátě únosnosti tenkostěnných konstrukcí dochází v případě, že namáhání konstrukce má významnou membránovou tlakovou složku, která při současném ohýbání nebo kroucení vede k větším průhybům nežli předpovídá klasická lineární pružnost.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

Připomeňme případ kombinace ohybu a tlaku na příkladu: Přímý nosník délky l je na obou koncích kloubově podepřen a zatížen příčným liniovým zatížením $q(x) = \text{konst.}$ a osovou tlakovou silou F . Materiál má Youngův modul pružnosti E , průřez nosníku má plochu A a centrální kvadratický moment k neutrálné ose I .



Klasické řešení technické mechaniky stanoví průběhy vnitřních silových účinků od vnějšího zatížení na nedeformovaném nosníku

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

- Ohybový moment

$$\frac{d^2 \mathcal{M}_o}{dx^2} = -q(x) \Rightarrow M_o(x) = \mathcal{M}_o(x) = \frac{qx}{2} [l - x]$$

- Osová membránová síla $N(x) = -F$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

- Ohybový moment

$$\frac{d^2 \mathcal{M}_o}{dx^2} = -q(x) \Rightarrow M_o(x) = \mathcal{M}_o(x) = \frac{qx}{2} [l - x]$$

- Osová membránová síla $N(x) = -F$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

- Ohybový moment

$$\frac{d^2 \mathcal{M}_o}{dx^2} = -q(x) \Rightarrow M_o(x) = \mathcal{M}_o(x) = \frac{qx}{2} [l - x]$$

- Osová membránová síla $N(x) = -F$

a z nich integruje posuvy

- Průhyb

$$\frac{d^2 v}{dx^2}(x) = -\frac{M_o}{EI} \Rightarrow v = \frac{q}{24EI} [x^4 - 2lx^3 + l^3x]$$

- Osový posuv

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA} \Rightarrow u = -\frac{F}{EA}x$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

- Ohybový moment

$$\frac{d^2 \mathcal{M}_o}{dx^2} = -q(x) \Rightarrow M_o(x) = \mathcal{M}_o(x) = \frac{qx}{2} [l - x]$$

- Osová membránová síla $N(x) = -F$

a z nich integruje posuvy

- Průhyb

$$\frac{d^2 v}{dx^2}(x) = -\frac{M_o}{EI} \Rightarrow v = \frac{q}{24EI} [x^4 - 2lx^3 + l^3x]$$

- Osový posuv

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA} \Rightarrow u = -\frac{F}{EA}x$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

- Ohybový moment

$$\frac{d^2 \mathcal{M}_o}{dx^2} = -q(x) \Rightarrow M_o(x) = \mathcal{M}_o(x) = \frac{qx}{2} [l - x]$$

- Osová membránová síla $N(x) = -F$

a z nich integruje posuvy

- Průhyb

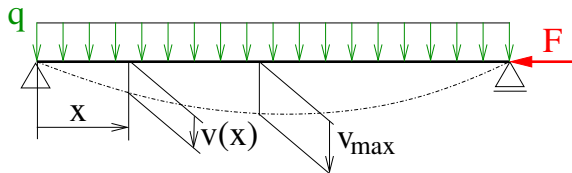
$$\frac{d^2 v}{dx^2}(x) = -\frac{M_o}{EI} \Rightarrow v = \frac{q}{24EI} [x^4 - 2lx^3 + l^3x]$$

- Osový posuv

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA} \Rightarrow u = -\frac{F}{EA}x$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



Ještě jednou připomeňme, že v klasickém řešení je při výpočtu vnitřních sil z podmínek rovnováhy vnitřních a vnějších sil zanedbána změna tvaru v důsledku deformace. Rovnice rovnováhy jsou vyjádřeny v nedeformované konfiguraci. Za těchto předpokladů vychází v našem příkladě

Maximální ohybový moment

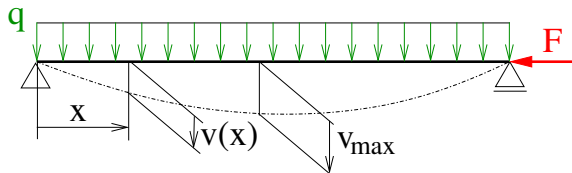
$$M_{o,max} = \mathcal{M}_{o,max} = \frac{ql^2}{8}$$

Maximální průhyb

$$v_{max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

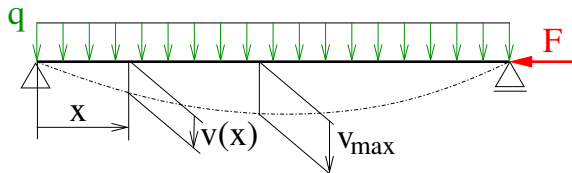
Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



Vezměme nyní při výpočtu ohybového momentu do úvahy deformovaný tvar nosníku. (Při stanovení membránové osové síly změnu tvaru stále zanedbáváme.) Osová síla F je v řezu x uvedena do rovnováhy vnitřní silou $N = -F$, ale v důsledku průhybu vytvářejí tyto síly navíc silovou dvojici s ramenem $v(x)$ o velikosti $Fv(x)$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

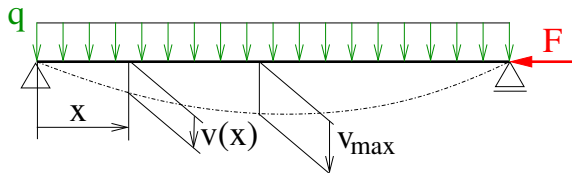


Celkový ohybový moment vyjádříme jako součet momentu \mathcal{M}_o od příčného zatížení q a dvojice $Fv(x) = -Nv(x)$

$$M_o(x) = \mathcal{M}_o(x) + Fv(x).$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



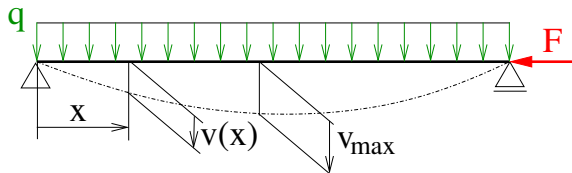
Celkový ohybový moment vyjádříme jako součet momentu \mathcal{M}_o od příčného zatížení q a dvojice $Fv(x) = -Nv(x)$

$$M_o(x) = \mathcal{M}_o(x) + Fv(x).$$

Je evidentní, že tlaková síla velikost celkového ohybového momentu zvyšuje, zatímco tahová ji snižuje. Proto se zaměříme na řešení pro sílu tlakovou, $F \geq 0$.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

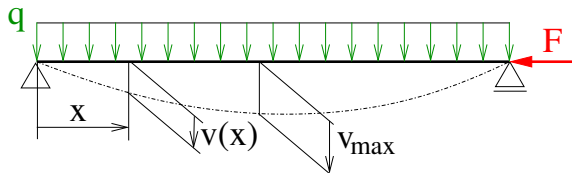
Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



Dosaďme celkový ohybový moment $M_o(x) = \mathcal{M}_o(x) + Fv(x)$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

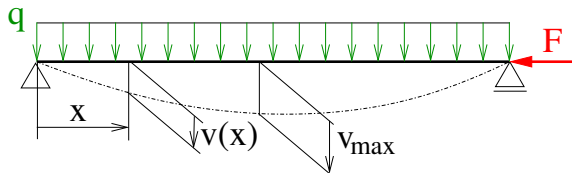


Dosaďme celkový ohybový moment $M_o(x) = \mathcal{M}_o(x) + Fv(x)$

do Bernoulliova linearizovaného vztahu mezi lokální změnou křivosti a ohybovým momentem na nosníku $\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = v''(x) = -\frac{M_o}{EI}$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



Dosaďme celkový ohybový moment $M_o(x) = \mathcal{M}_o(x) + Fv(x)$

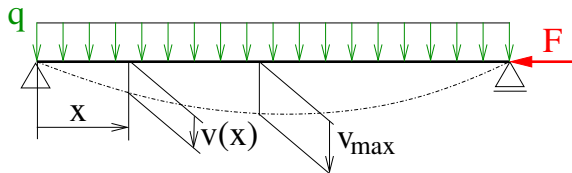
do Bernoulliova linearizovaného vztahu mezi lokální změnou křivosti a ohybovým momentem na nosníku $\frac{d^2v(x)}{dx^2} = v''(x) = -\frac{M_o}{EI}$

a dostaneme rovnici

$$v''(x) + \alpha^2 v(x) = -\frac{\mathcal{M}_o(x)}{EI}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



$$v''(x) + \alpha^2 v(x) = -\frac{M_o(x)}{EI}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

Integrálem uvedené rovnice je po úpravách

$$v(\xi) = \underbrace{\frac{5ql^4}{384EI}}_{v_{0,max}} \underbrace{\frac{96}{5\pi^2} \frac{1}{f} \left[\frac{\sin[\pi\sqrt{f}(1-\xi)] + \sin(\pi\sqrt{f}\xi) - \sin(\pi\sqrt{f})}{\frac{\pi^2}{4} f \sin(\pi\sqrt{f})} + 2(\xi^2 - \xi) \right]}_{\Phi(\xi, f)},$$

$$\text{kde } f = \frac{F}{F_{KR,\varepsilon}} \quad \xi = \frac{x}{l}.$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

Je evidentní, že průhybová čára závisí lineárně na příčném zatížení

$$v_{0,max}(q) = \frac{5ql^4}{384EI}$$

a nelineárně na osově tlakové síle

$$\Phi(\xi, f) = \frac{96}{5\pi^2} \frac{1}{f} \left[\frac{\sin[\pi\sqrt{f}(1-\xi)] + \sin(\pi\sqrt{f}\xi) - \sin(\pi\sqrt{f})}{\frac{\pi^2}{4} f \sin(\pi\sqrt{f})} + 2(\xi^2 - \xi) \right]$$

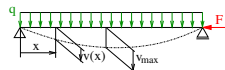
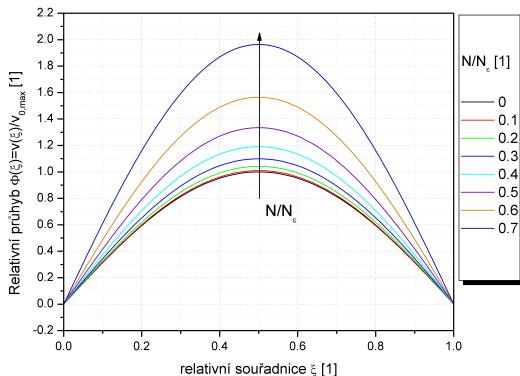
$$v(\xi) = v_{0,max}(q)\Phi(\xi, f)$$

Připomeňme, že lineární řešení prvního řádu lze také vyjádřit v této formě, s využitím

$$\Phi_0(\xi) = \frac{16}{5} [\xi^4 - 2\xi^3 + \xi] \text{ místo } \Phi(\xi, f).$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



Poměrný průhyb

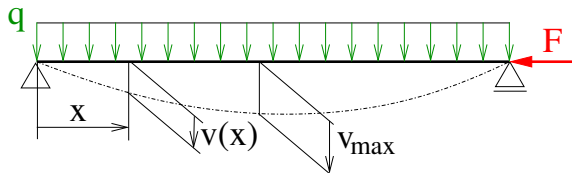
$$\Phi(\xi, f)$$

vyjadřuje závislost
průhybové čáry na
velikosti poměrné
osové síly

$$f = \frac{F}{F_{KR,\epsilon}}$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



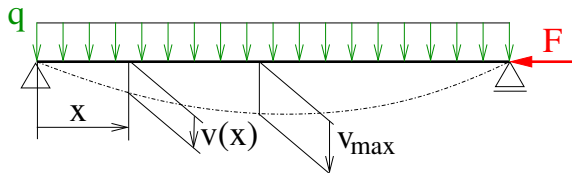
Maximální průhyb je zřejmě v místě $\xi = 0.5$. Platí:

- $\Phi_{0,\max} = \Phi_0\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

a pro průhyby

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



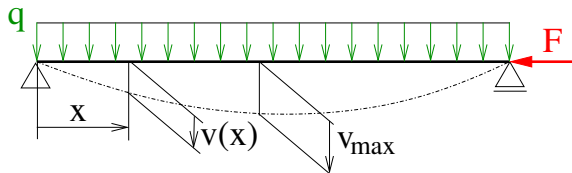
Maximální průhyb je zřejmě v místě $\xi = 0.5$. Platí:

- $\Phi_{0,max} = \Phi_0\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
- $\Phi_{max}(f) = \Phi\left(\frac{1}{2}, f\right) = \frac{96}{5\pi^2} \left[\frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{f}\right) - \sin\left(\pi\sqrt{f}\right)}{\frac{\pi^2}{4} f \sin\left(\pi\sqrt{f}\right)} - \frac{1}{2} \right]$

a pro průhyby

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



Maximální průhyb je zřejmě v místě $\xi = 0.5$. Platí:

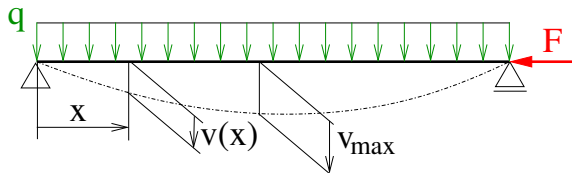
- $\Phi_{0,max} = \Phi_0\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
- $\Phi_{max}(f) = \Phi\left(\frac{1}{2}, f\right) = \frac{96}{5\pi^2} \left[\frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{f}\right) - \sin\left(\pi\sqrt{f}\right)}{\frac{\pi^2}{4} f \sin\left(\pi\sqrt{f}\right)} - \frac{1}{2} \right]$

a pro průhyby

- $v_{max} = v_{0,max} \Phi_{0,max} = v_{0,max}$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



Maximální průhyb je zřejmě v místě $\xi = 0.5$. Platí:

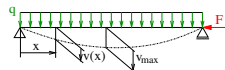
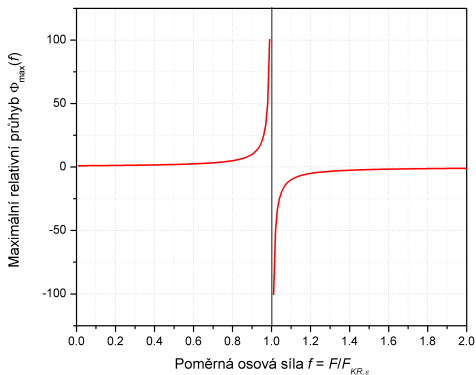
- $\Phi_{0,\max} = \Phi_0\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
- $\Phi_{\max}(f) = \Phi\left(\frac{1}{2}, f\right) = \frac{96}{5\pi^2} \left[\frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{f}\right) - \sin\left(\pi\sqrt{f}\right)}{\frac{\pi^2}{4} f \sin\left(\pi\sqrt{f}\right)} - \frac{1}{2} \right]$

a pro průhyby

- $v_{\max} = v_{0,\max} \Phi_{0,\max} = v_{0,\max}$
- $v_{\max}(f) = v_{0,\max} \Phi_{\max}(f)$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.



Pro

$$f \rightarrow 1$$

čili

$$F \rightarrow F_{KR,\epsilon} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

roste hodnota (poměrného) průhybu nade všechny meze.

$$\Phi_{max}(1) \rightarrow \pm\infty$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

Závěry a zobecnění

- Formulace rovnic rovnováhy ve zdeformovaném tvaru (pružnost 2. řádu) vede při řešení tenkostěnných konstrukcí s převažujícím membránovým zatížením k podstatnému zvětšení průhybů oproti formulaci ve stavu nezdeformovaném (pružnost 1. řádu).

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

Závěry a zobecnění

- Formulace rovnic rovnováhy ve zdeformovaném tvaru (pružnost 2. řádu) vede při řešení tenkostěnných konstrukcí s převažujícím membránovým zatížením k podstatnému zvětšení průhybů oproti formulaci ve stavu nezdeformovaném (pružnost 1. řádu).
- Teoreticky stanovené průhyby při kritických zatíženích rostou nade všechny meze. Graf $\Phi_{max}(f)$ má větev řešení i pro $f > 1$. Bez dodatečného vynucení záporných průhybů je však takovýto rovnovážný stav nedosažitelný.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Příklad: Vzpěrná únosnost tyče.

Závěry a zobecnění

- Formulace rovnic rovnováhy ve zdeformovaném tvaru (pružnost 2. řádu) vede při řešení tenkostěnných konstrukcí s převažujícím membránovým zatížením k podstatnému zvětšení průhybů oproti formulaci ve stavu nezdeformovaném (pružnost 1. řádu).
- Teoreticky stanovené průhyby při kritických zatíženích rostou nade všechny meze. Graf $\Phi_{max}(f)$ má větev řešení i pro $f > 1$. Bez dodatečného vynucení záporných průhybů je však takovýto rovnovážný stav nedosažitelný.
- **Kritické membránové zatížení nosníku je rovno první kritické síle při Eulerovské ztrátě stability.**

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

Eulerova úloha ztráty stability představuje mezní případ naší úlohy. Za předpokladu, že není žádné příčné zatížení $q = 0$ přejde původní rovnice rovnováhy na homogenní diferenciální rovnici

$$v''(x) + \alpha^2 v(x) = 0, \quad \alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}},$$

jejíž netriviální řešení vede na hledání vlastních čísel α_i a funkcí $v_i(x)$ operátoru

$$\frac{d^2}{dx^2}.$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

Výsledkem je, že pro všechna zatížení, kromě kritických, existuje pouze triviální řešení $v(x) = 0$. Při kritických zatíženích

$$F_{KR,n} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

splňuje rovnici rovnováhy i netriviální řešení

$$v_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}, \text{ kde } A \text{ je libovolná konstanta.}$$

Praktický význam má zejména první kritická síla, která je běžně označována jako **Eulerova kritická síla**

$$F_{KR,\varepsilon} = F_{KR,1} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- I v případech, kdy je reálná tenkostěnná konstrukce namáhána pouze membránově (např. Eulerův vzpěr), nebude její chování odpovídat Eulerovskému řešení. Odchylky od ideální geometrie (tzv. **imperfekce**), kterým se nelze vyhnout, způsobí přídavný ohyb, který se projeví podobně jako příčné zatížení. Rovnice rovnováhy nebude homogenní a nedojde k bifurkaci (rozdvojení řešení na triviální a netriviální).
- Ve skutečnosti u tenkostěnných konstrukcí s “čistě” membránovým namáháním existuje limitní zatížení F_{LIM} , které je konstrukce schopná staticky přenášet. Po jeho překročení již statická rovnováha neexistuje a konstrukce se neomezeně deformuje – **hroutí**.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- I v případech, kdy je reálná tenkostěnná konstrukce namáhána pouze membránově (např. Eulerův vzpěr), nebude její chování odpovídat Eulerovskému řešení. Odchytky od ideální geometrie (tzv. **imperfekce**), kterým se nelze vyhnout, způsobí přídavný ohyb, který se projeví podobně jako příčné zatížení. Rovnice rovnováhy nebude homogenní a nedojde k bifurkaci (rozdvojení řešení na triviální a netriviální).
- Ve skutečnosti u tenkostěnných konstrukcí s “čistě” membránovým namáháním existuje limitní zatížení F_{LIM} , které je konstrukce schopná staticky přenášet. Po jeho překročení již statická rovnováha neexistuje a konstrukce se neomezeně deformuje – **hroutí**.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- Eulerova kritická síla představuje **horní mez** limitního zatížení

$$F_{LIM} \leq F_{KR,\varepsilon} \cdot$$

Snížení limitního zatížení závisí při stejné ideální geometrii na velikosti a distribuci imperfekcí. Obecně platí, že čím menší jsou imperfekce,

- tím více se limitní zatížení blíží Eulerově kritické síle
 - tím více se proces hroucení podobá skokové změně
- V procesu hroucení může dojít k dosažení materiálových limitů (mez elasticity, mez pevnosti, křehký lom ...) a ke zničení konstrukce.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- Eulerova kritická síla představuje **horní mez** limitního zatížení

$$F_{LIM} \leq F_{KR,\varepsilon} \cdot$$

Snížení limitního zatížení závisí při stejné ideální geometrii na velikosti a distribuci imperfekcí. Obecně platí, že čím menší jsou imperfekce,

- **tím více se limitní zatížení blíží Eulerově kritické síle**
- tím více se proces hroucení podobá skokové změně
- V procesu hroucení může dojít k dosažení materiálových limitů (mez elasticity, mez pevnosti, křehký lom ...) a ke zničení konstrukce.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- Eulerova kritická síla představuje **horní mez** limitního zatížení

$$F_{LIM} \leq F_{KR,\varepsilon}.$$

Snížení limitního zatížení závisí při stejné ideální geometrii na velikosti a distribuci imperfekcí. Obecně platí, že čím menší jsou imperfekce,

- tím více se limitní zatížení blíží Eulerově kritické síle
 - tím více se proces hroucení podobá skokové změně
- V procesu hroucení může dojít k dosažení materiálových limitů (mez elasticity, mez pevnosti, křehký lom ...) a ke zničení konstrukce.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- Eulerova kritická síla představuje **horní mez** limitního zatížení

$$F_{LIM} \leq F_{KR,\varepsilon} \cdot$$

Snížení limitního zatížení závisí při stejné ideální geometrii na velikosti a distribuci imperfekcí. Obecně platí, že čím menší jsou imperfekce,

- tím více se limitní zatížení blíží Eulerově kritické síle
 - tím více se proces hroucení podobá skokové změně
- V procesu hroucení může dojít k dosažení materiálových limitů (mez elasticity, mez pevnosti, křehký lom ...) a ke zničení konstrukce.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- V našem příkladě nemůže být odvozená rovnice rovnováhy použita pro popis procesu hroucení, protože platí jen v oboru platnosti původních předpokladů, tj. např., že změnu křivosti průhybovky

$$\Delta\kappa(\xi) = \frac{v''(\xi)}{(1 + v'^2(\xi))^{\frac{3}{2}}}$$

vyjádříme pro $v'(\xi) \ll 1$ jako

$$\Delta\kappa(\xi) \doteq v''(\xi).$$

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- Obecně, představuje-li rovnice rovnováhy dobrou aproximaci reality při libovolném průhybu, může být její řešení východiskem pro stanovení F_{LIM} .
- Při modelování konstrukcí metodou konečných prvků (MKP) lze limitní sílu stanovit zpravidla pouze, pokud použijeme
 - plně nelineární statickou proceduru
 - zatěžování posuvem nebo jednoparametrickou soustavou sil a metodu délky oblouku místo klasického Newton–Raphsonova iteračního schématu
 - geometrické imperfekce (nebo jejich aproximaci)
- U konstrukcí složitější geometrie se často používá MKP také k aproximaci Eulerova kritického zatížení, viz dále.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- Obecně, představuje-li rovnice rovnováhy dobrou aproximaci reality při libovolném průhybu, může být její řešení východiskem pro stanovení F_{LIM} .
- Při modelování konstrukcí metodou konečných prvků (MKP) lze limitní sílu stanovit zpravidla pouze, pokud použijeme
 - plně nelineární statickou proceduru
 - zatěžování posuvem nebo jednoparametrickou soustavou sil a metodu délky oblouku místo klasického Newton–Raphsonova iteračního schématu
 - geometrické imperfekce (nebo jejich aproximaci)
- U konstrukcí složitější geometrie se často používá MKP také k aproximaci Eulerova kritického zatížení, viz dále.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- Obecně, představuje-li rovnice rovnováhy dobrou aproximaci reality při libovolném průhybu, může být její řešení východiskem pro stanovení F_{LIM} .
- Při modelování konstrukcí metodou konečných prvků (MKP) lze limitní sílu stanovit zpravidla pouze, pokud použijeme
 - **plně nelineární statickou proceduru**
 - zatěžování posuvem nebo jednoparametrickou soustavou sil a metodu délky oblouku místo klasického Newton–Raphsonova iteračního schématu
 - geometrické imperfekce (nebo jejich aproximaci)
- U konstrukcí složitější geometrie se často používá MKP také k aproximaci Eulerova kritického zatížení, viz dále.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- Obecně, představuje-li rovnice rovnováhy dobrou aproximaci reality při libovolném průhybu, může být její řešení východiskem pro stanovení F_{LIM} .
- Při modelování konstrukcí metodou konečných prvků (MKP) lze limitní sílu stanovit zpravidla pouze, pokud použijeme
 - plně nelineární statickou proceduru
 - **zatěžování posuvem nebo jednoparametrickou soustavou sil a metodu délky oblouku místo klasického Newton–Raphsonova iteračního schématu**
 - geometrické imperfekce (nebo jejich aproximaci)
- U konstrukcí složitější geometrie se často používá MKP také k aproximaci Eulerova kritického zatížení, viz dále.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- Obecně, představuje-li rovnice rovnováhy dobrou aproximaci reality při libovolném průhybu, může být její řešení východiskem pro stanovení F_{LIM} .
- Při modelování konstrukcí metodou konečných prvků (MKP) lze limitní sílu stanovit zpravidla pouze, pokud použijeme
 - plně nelineární statickou proceduru
 - zatěžování posuvem nebo jednoparametrickou soustavou sil a metodu délky oblouku místo klasického Newton–Raphsonova iteračního schématu
 - **geometrické imperfekce (nebo jejich aproximaci)**
- U konstrukcí složitější geometrie se často používá MKP také k aproximaci Eulerova kritického zatížení, viz dále.

Vzpěrná únosnost konstrukcí.

Podstata vzpěrné únosnosti.

Závěry a zobecnění

- Obecně, představuje-li rovnice rovnováhy dobrou aproximaci reality při libovolném průhybu, může být její řešení východiskem pro stanovení F_{LIM} .
- Při modelování konstrukcí metodou konečných prvků (MKP) lze limitní sílu stanovit zpravidla pouze, pokud použijeme
 - plně nelineární statickou proceduru
 - zatěžování posuvem nebo jednoparametrickou soustavou sil a metodu délky oblouku místo klasického Newton–Raphsonova iteračního schématu
 - geometrické imperfekce (nebo jejich aproximaci)
- U konstrukcí složitější geometrie se často používá MKP také k aproximaci Eulerova kritického zatížení, viz dále.

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Rovnice rovnováhy v MKP

- Výchoiskem je podobně jako při analytickém řešení rovnice rovnováhy. Ta je v diskretním MKP modelu vyjádřena maticově

$$-\underline{K}\vec{U} + \vec{F} = \vec{F}' + \vec{F} = 0; \cdot$$

- \underline{K} je matice tuhosti
- \vec{U} je vektor posuvů uzlových bodů
- $\vec{F}' = -\underline{K}\vec{U}$ je vektor uzlových sil, které diskretizují vnitřní síly, resp. napjatost
- \vec{F} je vektor uzlových sil, které diskretizují vnější zatížení

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Rovnice rovnováhy v MKP

- Výchoiskem je podobně jako při analytickém řešení rovnice rovnováhy. Ta je v diskretním MKP modelu vyjádřena maticově

$$-\underline{K}\vec{U} + \vec{F} = \vec{F}' + \vec{F} = 0; \cdot$$

- \underline{K} je matice tuhosti
- \vec{U} je vektor posuvů uzlových bodů
- $\vec{F}' = -\underline{K}\vec{U}$ je vektor uzlových sil, které diskretizují vnitřní síly, resp. napjatost
- \vec{F} je vektor uzlových sil, které diskretizují vnější zatížení

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Rovnice rovnováhy v MKP

- Výchoiskem je podobně jako při analytickém řešení rovnice rovnováhy. Ta je v diskretním MKP modelu vyjádřena maticově

$$-\underline{K}\vec{U} + \vec{F} = \vec{F}' + \vec{F} = 0; \cdot$$

- \underline{K} je matice tuhosti
- \vec{U} je vektor posuvů uzlových bodů
- $\vec{F}' = -\underline{K}\vec{U}$ je vektor uzlových sil, které diskretizují vnitřní síly, resp. napjatost
- \vec{F} je vektor uzlových sil, které diskretizují vnější zatížení

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Rovnice rovnováhy v MKP

- Výchoiskem je podobně jako při analytickém řešení rovnice rovnováhy. Ta je v diskrétním MKP modelu vyjádřena maticově

$$-\underline{K}\vec{U} + \vec{F} = \vec{F}' + \vec{F} = 0; \cdot$$

- \underline{K} je matice tuhosti
- \vec{U} je vektor posuvů uzlových bodů
- $\vec{F}' = -\underline{K}\vec{U}$ je vektor uzlových sil, které diskretizují vnitřní síly, resp. napjatost
- \vec{F} je vektor uzlových sil, které diskretizují vnější zatížení

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Rovnice rovnováhy v MKP

- Výchoiskem je podobně jako při analytickém řešení rovnice rovnováhy. Ta je v diskrétním MKP modelu vyjádřena maticově

$$-\underline{K}\vec{U} + \vec{F} = \vec{F}' + \vec{F} = 0; \cdot$$

- \underline{K} je matice tuhosti
- \vec{U} je vektor posuvů uzlových bodů
- $\vec{F}' = -\underline{K}\vec{U}$ je vektor uzlových sil, které diskretizují vnitřní síly, resp. napjatost
- \vec{F} je vektor uzlových sil, které diskretizují vnější zatížení

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Rovnice rovnováhy v MKP

- Vnitřní síly jsou důsledkem deformace (tj. změny polohy částic v daném místě.).
 - Tenzor deformace ϵ v klasické pružnosti 1. řádu neobsahuje informaci o translaci a rotaci (kdybychom na pole posuvů superponovali homogenní translaci a rotaci, tenzor deformace se nezmění).
 - Podle hookeova zákona se nezávislost tenzoru deformace ϵ na rotaci a translaci přenáší i na tenzor napjatosti σ a v konečném důsledku vede k tomu, že v klasické pružnosti 1. řádu závisí matice \underline{K} pouze na materiálu a počáteční geometrii MKP sítě, nikoli na posuvech.
- Za těchto okolností nelze vyjádřit rovnice rovnováhy v deformovaném stavu, což je nutné pro nalezení Eulerovy kritické síly.

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Rovnice rovnováhy v MKP

- Vnitřní síly jsou důsledkem deformace (tj. změny polohy částic v daném místě).
 - Tenzor deformace ϵ v klasické pružnosti 1. řádu neobsahuje informaci o translaci a rotaci (kdybychom na pole posuvů superponovali homogenní translaci a rotaci, tenzor deformace se nezmění).
 - Podle hookeova zákona se nezávislost tenzoru deformace ϵ na rotaci a translaci přenáší i na tenzor napjatosti σ a v konečném důsledku vede k tomu, že v klasické pružnosti 1. řádu závisí matice \underline{K} pouze na materiálu a počáteční geometrii MKP sítě, nikoli na posuvech.
- Za těchto okolností nelze vyjádřit rovnice rovnováhy v deformovaném stavu, což je nutné pro nalezení Eulerovy kritické síly.

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Rovnice rovnováhy v MKP

- Vnitřní síly jsou důsledkem deformace (tj. změny polohy částic v daném místě).
 - Tenzor deformace ϵ v klasické pružnosti 1. řádu neobsahuje informaci o translaci a rotaci (kdybychom na pole posuvů superponovali homogenní translaci a rotaci, tenzor deformace se nezmění).
 - Podle hookeova zákona se nezávislost tenzoru deformace ϵ na rotaci a translaci přenáší i na tenzor napjatosti σ a v konečném důsledku vede k tomu, že v klasické pružnosti 1. řádu závisí matice \underline{K} pouze na materiálu a počáteční geometrii MKP sítě, nikoli na posuvech.
- Za těchto okolností nelze vyjádřit rovnice rovnováhy v deformovaném stavu, což je nutné pro nalezení Eulerovy kritické síly.

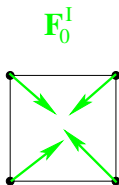
Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Rovnice rovnováhy v MKP

- Vnitřní síly jsou důsledkem deformace (tj. změny polohy částic v daném místě).
 - Tenzor deformace ϵ v klasické pružnosti 1. řádu neobsahuje informaci o translaci a rotaci (kdybychom na pole posuvů superponovali homogenní translaci a rotaci, tenzor deformace se nezmění).
 - Podle hookeova zákona se nezávislost tenzoru deformace ϵ na rotaci a translaci přenáší i na tenzor napjatosti σ a v konečném důsledku vede k tomu, že v klasické pružnosti 1. řádu závisí matice \underline{K} pouze na materiálu a počáteční geometrii MKP sítě, nikoli na posuvech.
- Za těchto okolností nelze vyjádřit rovnice rovnováhy v deformovaném stavu, což je nutné pro nalezení Eulerovy kritické síly.

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

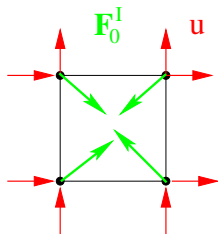
Počáteční napětí



Uvažujme obecný konečný element, který je ve stavu rovnováhy a jsou v něm počáteční vnitřní síly \vec{F}_0^I z předchozího zatěžování. Poznamenejme, že symboly pro vektorové a maticové operátory vztahující se k jednomu elementu a tytéž operátory popisující celou MKP síť nebudeme rozlišovat. Jejich význam vyplývá z kontextu.

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

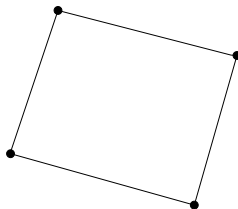
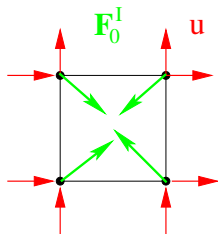
Počáteční napětí



Aplikujme uzlové posuvy \vec{u} .

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

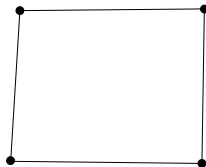
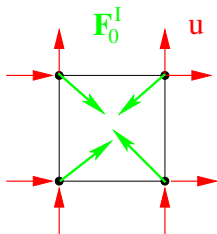
Počáteční napětí



Element se obecně zdeformuje a natočí.

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

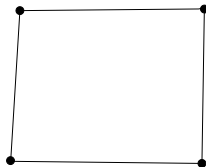
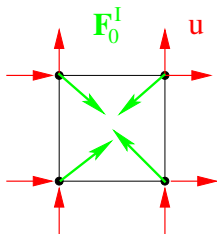
Počáteční napětí



V případě pružnosti 1. řádu se natočení neprojeví na výsledné vnitřní síle, ...

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

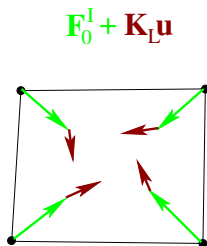
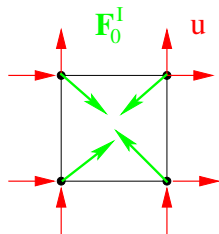
Počáteční napětí



V případě pružnosti 1. řádu se natočení neprojeví na výsledné vnitřní síle, ...

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Počáteční napětí

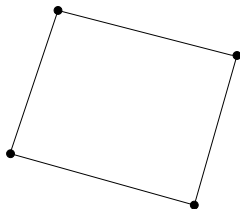
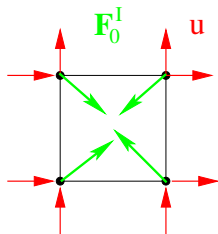


... kterou stanovíme s pomocí odpovídající matice tuhosti \underline{K}_L a principu superpozice jako součet počátečních vnitřních sil \vec{F}_0^I a přírůstku vnitřních sil v důsledku posuvů \vec{u}

$$\vec{F}^I(\vec{u}) = \vec{F}_0^I - \underline{K}_L \vec{u}.$$

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Počáteční napětí

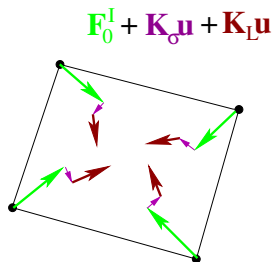
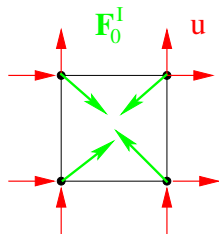


V případě pružnosti 2. řádu síly \vec{F}_0^I rotují spolu s elementem, a jejich složky (ne velikosti) se změní. Tuto změnu charakterizuje **matice počátečních vnitřních sil**, resp. **matice počátečních napětí**, jako

$$\Delta \vec{F}^I = -\underline{K}_\sigma \left(\vec{F}_0^I \right) \vec{u}.$$

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Počáteční napětí

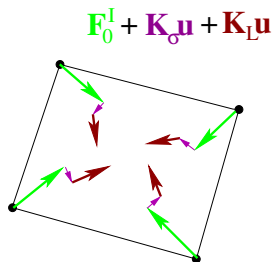
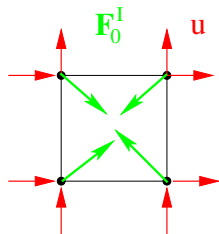


$$\Delta \vec{F}^I = -\underline{K}_\sigma \left(\vec{F}_0^I \right) \vec{u}.$$

Poznamenejme, že translace elementu změnu složek počátečních vnitřních sil nevyvolá. Dále zdůrazněme, že matice počátečních napětí na počátečních napětích závisí.

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Počáteční napětí



Výslednou vnitřní sílu v důsledku přírůstku posuvu s uvažováním vlivu počátečních vnitřních sil stanovíme s pomocí odpovídající matice tuhosti $\underline{K} = \underline{K}_L + \underline{K}_\sigma$ a principu superpozice jako

$$\vec{F}'(\vec{u}) = \vec{F}_0' - \underline{K}\vec{u} = \vec{F}_0' - [\underline{K}_L + \underline{K}_\sigma] \vec{u}.$$

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Eulerova kritická síla

Připomeňme východiska analytického Eulerova řešení ztráty stability prutu:

- Prut je zatížen osovou silou, která vyvolává čistě membránové namáhání (mimo stavů při kritickém zatížení)

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Eulerova kritická síla

Připomeňme východiska analytického Eulerova řešení ztráty stability prutu:

- Prut je zatížen osovou silou, která vyvolává čistě membránové namáhání (mimo stavů při kritickém zatížení)
- Deformace prutu ve směru střednice je ignorována, je řešena pouze ohybová rovnice rovnováhy s nulovým příčným zatížením a členem zohledňujícím tlakovou sílu.

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Eulerova kritická síla

Připomeňme východiska analytického Eulerova řešení ztráty stability prutu:

- Prut je zatížen osovou silou, která vyvolává čistě membránové namáhání (mimo stavů při kritickém zatížení)
- Deformace prutu ve směru střednice je ignorována, je řešena pouze ohybová rovnice rovnováhy s nulovým příčným zatížením a členem zohledňujícím tlakovou sílu.
- Člen zohledňující tlakovou sílu

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI}$$

je na ní lineárně závislý

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Eulerova kritická síla

Analogickou homogenní rovnici rovnováhy diskrétního MKP modelu lze zapsat ve tvaru

$$\left[\underline{K}_L + \underline{K}_\sigma \left(\vec{F}_0^I \right) \right] \vec{U} = 0 ,$$

kde symboly \underline{K}_L , \underline{K}_σ a \vec{U} zde představují globální matice tuhosti a vektor posuvů.

- Pro stanovení \underline{K}_σ je tenkostěnné těleso zatíženo vnějšími silami \vec{F}_m , které vyvolávají membránový stav napjatosti. V komerčních MKP programech je obvykle třeba formálně provést nelineární statický výpočet, aby se matice $\underline{K}_\sigma \left(\vec{F}_m \right)$ vygenerovala.

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Eulerova kritická síla

- Pro existenci netriviálního řešení je nutné, aby

$$\det \left[\underline{K}_L + \underline{K}_\sigma \left(\vec{F}_m \right) \right] = 0 \cdot$$

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Eulerova kritická síla

- Pro existenci netriviálního řešení je nutné, aby

$$\det \left[\underline{K}_L + \underline{K}_\sigma \left(\vec{F}_m \right) \right] = 0 \cdot$$

- Otázkou zůstává, jak efektivně najít kritickou hodnotu zatížení $\vec{F}_{m,KR}$

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Eulerova kritická síla

- Pro existenci netriviálního řešení je nutné, aby

$$\det \left[\underline{K}_L + \underline{K}_\sigma \left(\vec{F}_m \right) \right] = 0 \cdot$$

- Otázkou zůstává, jak efektivně najít kritickou hodnotu zatížení $\vec{F}_{m,KR}$
- V mnoha případech lze závislost matice počátečních napětí na velikosti sil \vec{F}_m linearizovat tak, že

$$\underline{K}_\sigma \left(\Lambda \vec{F}_{m,0} \right) = \Lambda \underline{K}_\sigma \left(\vec{F}_{m,0} \right) = \Lambda \underline{K}_{\sigma,0} \cdot$$

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Eulerova kritická síla

- Homogenní rovnici rovnováhy diskrétního MKP modelu lze pak zapsat jako

$$[\underline{K}_L + \Lambda \underline{K}_{\sigma,0}] \vec{U} = 0 .$$

a netriviální řešení $\{\vec{U}_i\}_{i=1}^N$ najít pro vlastní hodnoty $\{\Lambda_i\}_{i=1}^N$ řešením problému vlastních čísel vhodnou numerickou metodou.

Stanovení Eulerovy kritické síly MKP

Eulerova kritická síla

- Homogenní rovnici rovnováhy diskrétního MKP modelu lze pak zapsat jako

$$[\underline{K}_L + \Lambda \underline{K}_{\sigma,0}] \vec{U} = 0 .$$

a netriviální řešení $\{\vec{U}_i\}_{i=1}^N$ najít pro vlastní hodnoty $\{\Lambda_i\}_{i=1}^N$ řešením problému vlastních čísel vhodnou numerickou metodou.

- Eulerovo kritické zatížení dostaneme pro první vlastní hodnotu Λ_1 jako

$$\vec{F}_{KR,\varepsilon} = \Lambda_1 \vec{F}_{m,0} .$$

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

Výpočet limitního zatížení reálných tenkostěnných konstrukcí není dodnes obecně zvládnutý.

Typickým přístupem, např. u leteckých konstrukcí je aplikace analytických teorií ztráty stability za zjednodušujících předpokladů korigovaných empiricky získanými opravnými koeficienty.

Jinou možností je využití MKP buď pro odhad kritických sil nebo pro simulaci hroucení a hledání aproximace limitního zatížení.

Na případu tenkostěnné válcové skořepiny jsou předvedeny základní přístupy ke stanovení limitního zatížení jednoduché skořepinové konstrukce:

- Experimentální stanovení limitního zatížení.

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

Výpočet limitního zatížení reálných tenkostěnných konstrukcí není dodnes obecně zvládnutý.

Typickým přístupem, např. u leteckých konstrukcí je aplikace analytických teorií ztráty stability za zjednodušujících předpokladů korigovaných empiricky získanými opravnými koeficienty.

Jinou možností je využití MKP buď pro odhad kritických sil nebo pro simulaci hroucení a hledání aproximace limitního zatížení.

Na případu tenkostěnné válcové skořepiny jsou předvedeny základní přístupy ke stanovení limitního zatížení jednoduché skořepinové konstrukce:

- Experimentální stanovení limitního zatížení.
- Analytický výpočet limitního zatížení.

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

Výpočet limitního zatížení reálných tenkostěnných konstrukcí není dodnes obecně zvládnutý.

Typickým přístupem, např. u leteckých konstrukcí je aplikace analytických teorií ztráty stability za zjednodušujících předpokladů korigovaných empiricky získanými opravnými koeficienty.

Jinou možností je využití MKP buď pro odhad kritických sil nebo pro simulaci hroucení a hledání aproximace limitního zatížení.

Na případu tenkostěnné válcové skořepiny jsou předvedeny základní přístupy ke stanovení limitního zatížení jednoduché skořepinové konstrukce:

- Experimentální stanovení limitního zatížení.
- Analytický výpočet limitního zatížení.
- **Numerický výpočet limitního zatížení MKP.**

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

- Analytické teorie:

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

- Analytické teorie:
 - Existují pro omezenou množinu geometrických konfigurací, které jsou dostatečně jednoduché a jejichž řešení vykazuje bifurkaci.

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

- Analytické teorie:
 - Existují pro omezenou množinu geometrických konfigurací, které jsou dostatečně jednoduché a jejichž řešení vykazuje bifurkaci.
 - Předpokládají perfektní tvar konstrukce

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

- Analytické teorie:
 - Existují pro omezenou množinu geometrických konfigurací, které jsou dostatečně jednoduché a jejichž řešení vykazuje bifurkaci.
 - Předpokládají perfektní tvar konstrukce
 - Mají řešení v uzavřeném tvaru

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

- Analytické teorie:
 - Existují pro omezenou množinu geometrických konfigurací, které jsou dostatečně jednoduché a jejichž řešení vykazuje bifurkaci.
 - Předpokládají perfektní tvar konstrukce
 - Mají řešení v uzavřeném tvaru
 - Typickým představitelem je Eulerova teorie vzpěru přímých prutů

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

- Analytické teorie:
 - Existují pro omezenou množinu geometrických konfigurací, které jsou dostatečně jednoduché a jejichž řešení vykazuje bifurkaci.
 - Předpokládají perfektní tvar konstrukce
 - Mají řešení v uzavřeném tvaru
 - Typickým představitelem je Eulerova teorie vzpěru přímých prutů
- Numerické přístupy (MKP):

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

- Analytické teorie:
 - Existují pro omezenou množinu geometrických konfigurací, které jsou dostatečně jednoduché a jejichž řešení vykazuje bifurkaci.
 - Předpokládají perfektní tvar konstrukce
 - Mají řešení v uzavřeném tvaru
 - Typickým představitelem je Eulerova teorie vzpěru přímých prutů
- Numerické přístupy (MKP):
 - Geometricky složitější konstrukce

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

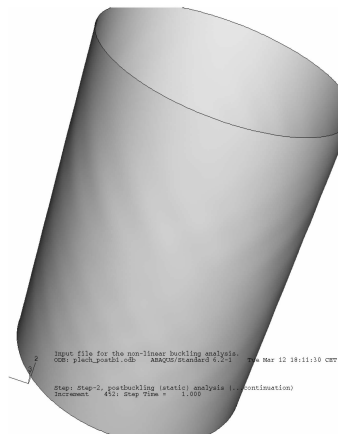
- Analytické teorie:
 - Existují pro omezenou množinu geometrických konfigurací, které jsou dostatečně jednoduché a jejichž řešení vykazuje bifurkaci.
 - Předpokládají perfektní tvar konstrukce
 - Mají řešení v uzavřeném tvaru
 - Typickým představitelem je Eulerova teorie vzpěru přímých prutů
- Numerické přístupy (MKP):
 - Geometricky složitější konstrukce
 - Řešení není v uzavřeném tvaru

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

Cílem práce je:

- Ověření a osvojení různých přístupů k MKP simulaci hroucení tenkostěnné válcové skořepiny.

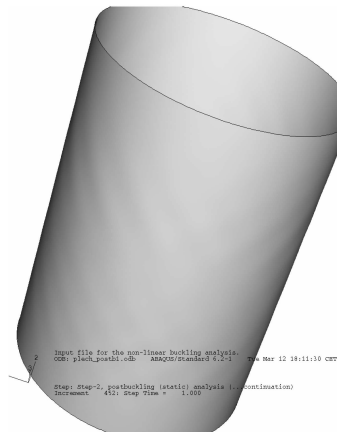


Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

Cílem práce je:

- Ověření a osvojení různých přístupů k MKP simulaci hroucení tenkostěnné válcové skořepiny.
- Verifikace výsledků s experimentem

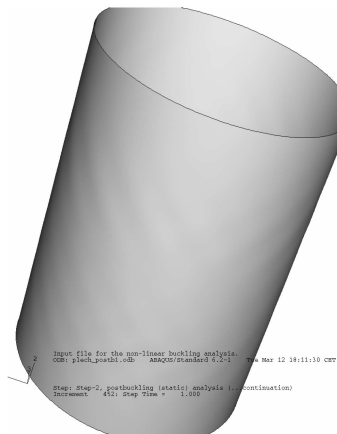


Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Motivace

Cílem práce je:

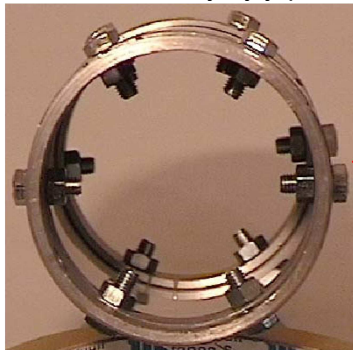
- Ověření a osvojení různých přístupů k MKP simulaci hroucení tenkostěnné válcové skořepiny.
- Verifikace výsledků s experimentem
- Zhodnocení a porovnání jednotlivých přístupů z hlediska přesnosti a efektivity



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Experiment

Zkušebními tělesy byly plechové obaly na nápoje



Detail upínacího přípravku



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Experiment

Výška L [mm]	85,0
Střední průměr D [mm]	65,6
Tloušťka stěny t [mm]	0,11
Limitní síla F_{LIM} [N]	660-1070
Střední lim. síla \bar{F}_{LIM} [N]	839

Zkušebními tělesy byly plechové obaly na nápoje



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Experiment

Výška L [mm]	85,0
Střední průměr D [mm]	65,6
Tloušťka stěny t [mm]	0,11
Limitní síla F_{LIM} [N]	660-1070
Střední lim. síla \bar{F}_{LIM} [N]	839

Zkušebními tělesy byly plechové obaly na nápoje



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Experiment

Výška L [mm]	85,0
Střední průměr D [mm]	65,6
Tloušťka stěny t [mm]	0,11
Limitní síla F_{LIM} [N]	660-1070
Střední lim. síla \bar{F}_{LIM} [N]	839

Zkušebními tělesy byly plechové obaly na nápoje



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Experiment

Výška L [mm]	85,0
Střední průměr D [mm]	65,6
Tloušťka stěny t [mm]	0,11
Limitní síla F_{LIM} [N]	660-1070
Střední lim. síla \bar{F}_{LIM} [N]	839

Zkušebními tělesy byly plechové obaly na nápoje



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Experiment

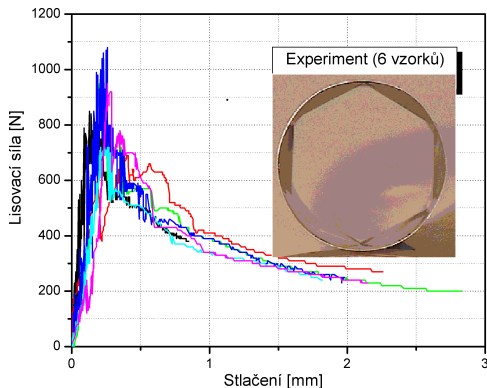
Výška L [mm]	85,0
Střední průměr D [mm]	65,6
Tloušťka stěny t [mm]	0,11
Limitní síla F_{LIM} [N]	660-1070
Střední lim. síla \bar{F}_{LIM} [N]	839

Zkušebními tělesy byly plechové obaly na nápoje



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Experiment



Obrázek: Naměřená závislost síla – stlačení pro 6 vzorků. Typický vzorek po zhroucení

Vzorky byly za-
těžovány řízenou
deformací (stlače-
ním) a snímána byla
reakční síla F . Je
patrné, že pro daný
typ tělesa existuje li-
mitní zatížení F_{LIM} .
Po jeho dosažení
již reakční síla s
rostoucím stlačením
klesá.

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Analytický výpočet σ_{LIM}

Vztah dle Špundy

$$\sigma_{LIM} = \sigma_{KR} = \frac{F_{LIM}}{A} = K_T E \left[\frac{2t}{D} \right]$$

Přístup	K_T [1]	σ_{KR} [MPa]
Teorie malých vybočení dle Eulera	0,605	169
Korekce dle Špundy	0,176	49
Dle experimentů	$\sigma_{LIM} = \frac{F_{LIM}}{A} = \frac{839}{22,7} = 37$	

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Analytický výpočet σ_{LIM}

Vztah dle Špundy

$$\sigma_{LIM} = \sigma_{KR} = \frac{F_{LIM}}{A} = K_T E \left[\frac{2t}{D} \right]$$

Přístup	K_T [1]	σ_{KR} [MPa]
Teorie malých vybočení dle Eulera	0,605	169
Korekce dle Špundy	0,176	49
Dle experimentů	$\sigma_{LIM} = \frac{F_{LIM}}{A} = \frac{839}{22,7} = 37$	

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Analytický výpočet σ_{LIM}

Vztah dle Špundy

$$\sigma_{LIM} = \sigma_{KR} = \frac{F_{LIM}}{A} = K_T E \left[\frac{2t}{D} \right]$$

Přístup	K_T [1]	σ_{KR} [MPa]
Teorie malých vybočení dle Eulera	0,605	169
Korekce dle Špundy	0,176	49
Dle experimentů	$\sigma_{LIM} = \frac{F_{LIM}}{A} = \frac{839}{22,7} = 37$	

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Analytický výpočet σ_{LIM}

Vztah dle Špundy

$$\sigma_{LIM} = \sigma_{KR} = \frac{F_{LIM}}{A} = K_T E \left[\frac{2t}{D} \right]$$

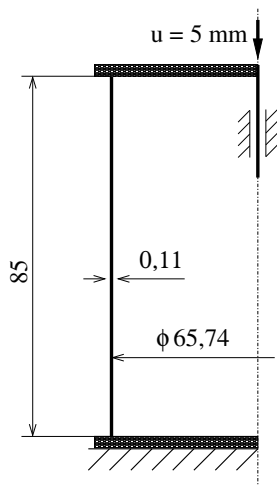
Přístup	K_T [1]	σ_{KR} [MPa]
Teorie malých vybočení dle Eulera	0,605	169
Korekce dle Špundy	0,176	49
Dle experimentů	$\sigma_{LIM} = \frac{F_{LIM}}{A} = \frac{839}{22,7} = 37$	

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: schéma

Vlastnosti MKP modelu:

Elementů	Shell	70 210
S 4		
Uzlů		70 623



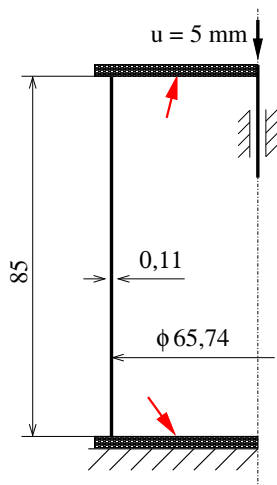
Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: schéma

Vlastnosti MKP modelu:

- Dokonale tuhá čela

Elementů	Shell	70 210
S 4		
Uzlů		70 623



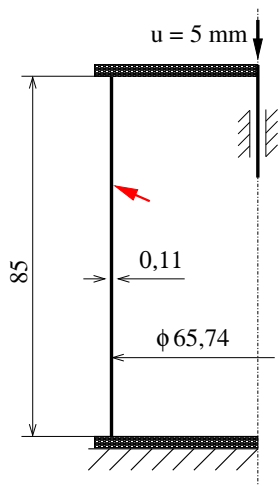
Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: schéma

Vlastnosti MKP modelu:

- Dokonale tuhá čela
- **Skořepinový plášť** vetknutý do čel

Elementů	Shell	70 210
S	4	
Uzlů		70 623



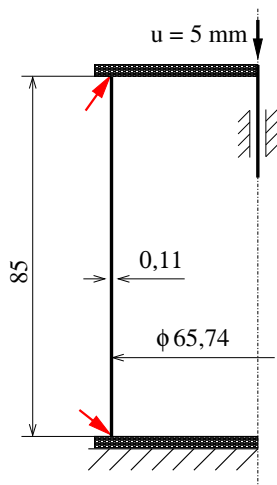
Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: schéma

Vlastnosti MKP modelu:

- Dokonale tuhá čela
- Skořepinový plášť **vetknutý do čel**

Elementů	Shell	70 210
S 4		
Uzlů		70 623



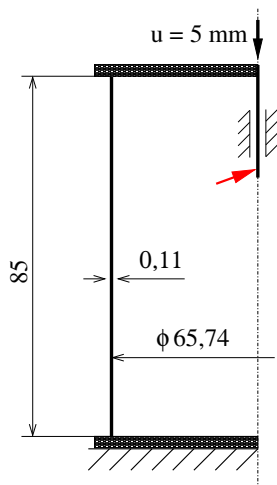
Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: schéma

Vlastnosti MKP modelu:

- Dokonale tuhá čela
- Skořepinový plášť vetknutý do čel
- **Horní čelo pohyblivé ve svislém směru**

Elementů	Shell	70 210
S 4		
Uzlů		70 623



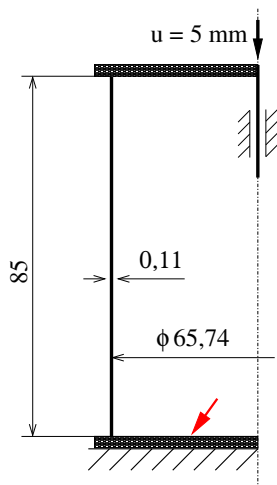
Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: schéma

Vlastnosti MKP modelu:

- Dokonale tuhá čela
- Skořepinový plášť vetknutý do čel
- Horní čelo pohyblivé ve svislém směru
- Spodní čelo nepohyblivé

Elementů	Shell	70 210
S 4		
Uzlů		70 623



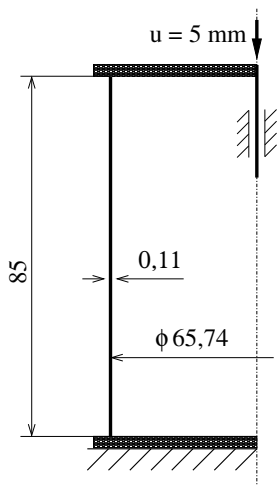
Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: schéma

Vlastnosti MKP modelu:

- Dokonale tuhá čela
- Skořepinový plášť vetknutý do čel
- Horní čelo pohyblivé ve svislém směru
- Spodní čelo nepohyblivé

Elementů	Shell	70 210
S 4		
Uzlů		70 623

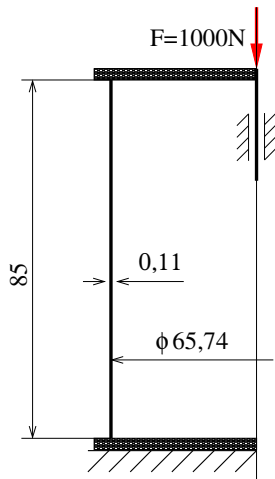


Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Eulerovo σ_{KR}

- Klasický výpočet indiferentní rovnováhy perfektního modelu

$$\det [\underline{K}_L + \Lambda \underline{K}_\sigma(F_{m,0})] = 0 \cdot$$



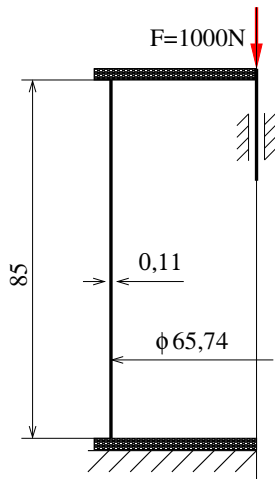
Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Eulerovo σ_{KR}

- Klasický výpočet indiferentní rovnováhy perfektního modelu

$$\det [\underline{K}_L + \Lambda \underline{K}_\sigma(F_{m,0})] = 0 \cdot$$

- Referenční síla $F_{m,0} = 1000 \text{ N}$.



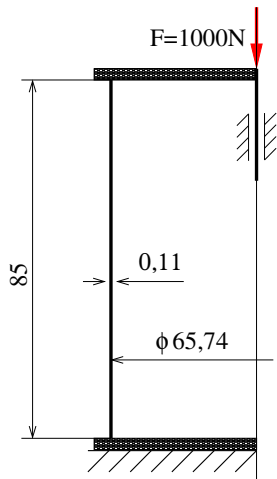
Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Eulerovo σ_{KR}

- Klasický výpočet indiferentní rovnováhy perfektního modelu

$$\det [\underline{K}_L + \Lambda \underline{K}_\sigma(F_{m,0})] = 0 \cdot$$

- Referenční síla $F_{m,0} = 1000 \text{ N}$.
- První vlastní číslo $\Lambda_1 = 3,85405$



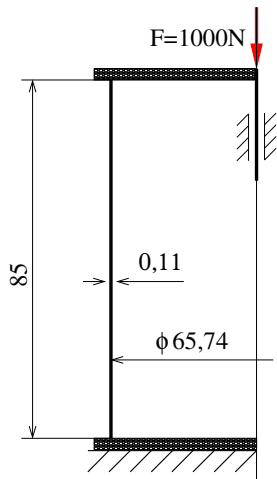
Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Eulerovo σ_{KR}

- Klasický výpočet indiferentní rovnováhy perfektního modelu

$$\det [\underline{K}_L + \Lambda \underline{K}_\sigma(F_{m,0})] = 0 \cdot$$

- Referenční síla $F_{m,0} = 1000 \text{ N}$.
- První vlastní číslo $\Lambda_1 = 3,85405$
- Kritická síla $F_{KR,\varepsilon} = 3854 \text{ N}$



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

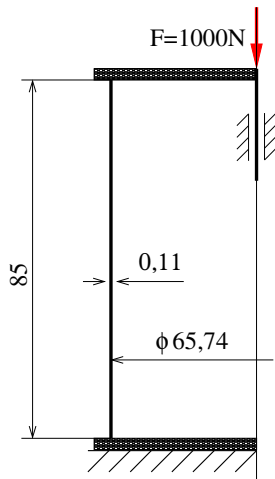
Výpočet MKP: Eulerovo σ_{KR}

- Klasický výpočet indiferentní rovnováhy perfektního modelu

$$\det [\underline{K}_L + \Lambda \underline{K}_\sigma(F_{m,0})] = 0.$$

- Referenční síla $F_{m,0} = 1000 \text{ N}$.
- První vlastní číslo $\Lambda_1 = 3,85405$
- Kritická síla $F_{KR,\varepsilon} = 3854 \text{ N}$
- Kritické napětí**

$$\sigma_{KR,\varepsilon} = \frac{F_{KR,\varepsilon}}{A} = \frac{3854}{22,7} = 169,7 \text{ [MPa]}$$



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Kvázistatická simulace hroucení

- Kvázistatickou simulací hroucení rozumíme plně nelineární statický MKP výpočet s monotónním zatěžováním buď tlakovou silou nebo posuvem horního čela. Cílem je stanovit závislost síla–stlačení analogickou experimentu.

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Kvázistatická simulace hroucení

- Kvázistatickou simulací hroucení rozumíme plně nelineární statický MKP výpočet s monotónním zatěžováním buď tlakovou silou nebo posuvem horního čela. Cílem je stanovit závislost síla–stlačení analogickou experimentu.
- Narozdíl od fyzických vzorků je MKP model geometricky perfektní. Proto lze realistické výsledky získat jedině tehdy, budou li do modelu zavedeny imperfekce.

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Kvázistatická simulace hroucení

- Kvázistatickou simulací hroucení rozumíme plně nelineární statický MKP výpočet s monotónním zatěžováním buď tlakovou silou nebo posuvem horního čela. Cílem je stanovit závislost síla–stlačení analogickou experimentu.
- Narozdíl od fyzických vzorků je MKP model geometricky perfektní. Proto lze realistické výsledky získat jedině tehdy, budou li do modelu zavedeny imperfekce.
- Imperfekce je geometrická odchylka skutečného tvaru tělesa od ideálního. V našem případě je popsána jako odchylka poloměru od teoretické hodnoty.

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Kvázistatická simulace hroucení

- Rozložení a velikost imperfekce na našich vzorcích má statistickou povahu, která je typická pro produkty opakované výroby.

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Kvázistatická simulace hroucení

- Rozložení a velikost imperfekce na našich vzorcích má statistickou povahu, která je typická pro produkty opakované výroby.
- Měření imperfekcí použitých vzorků nebylo prováděno. Namísto toho byla zavedena imperfekce uměle.

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Kvázistatická simulace hroucení

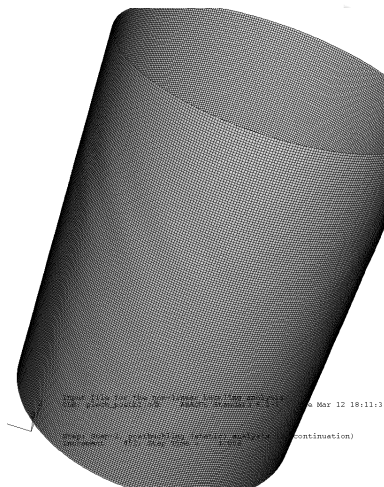
- Rozložení a velikost imperfekce na našich vzorcích má statistickou povahu, která je typická pro produkty opakované výroby.
- Měření imperfekcí použitých vzorků nebylo prováděno. Namísto toho byla zavedena imperfekce uměle.
- Algoritmus výpočtu umělé imperfekce se opírá o prvních N vlastních tvarů perfektního modelu a využívá následující postup

Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Kvázistatická simulace hroucení

Algoritmus výpočtu umělé imperfekce

- Normalizace vlastních vektorů



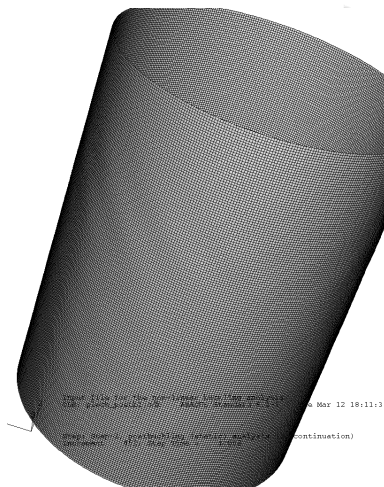
```
Done! Run for the nonlinear buckling analysis  
C:\Program Files\ANSYS Inc\ANSYS\bin\win64\Mar 12 18:11:3  
Step: 20000, prebuckling static analysis (continuation)  
Increment: 110, Step 20001, 1.000
```


Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Kvázistatická simulace hroucení

Algoritmus výpočtu umělé imperfekce

- Normalizace vlastních vektorů
- Kombinace vícenásobných vlastních vektorů tak, aby maximum radiálního posuvu leželo na radiální ose

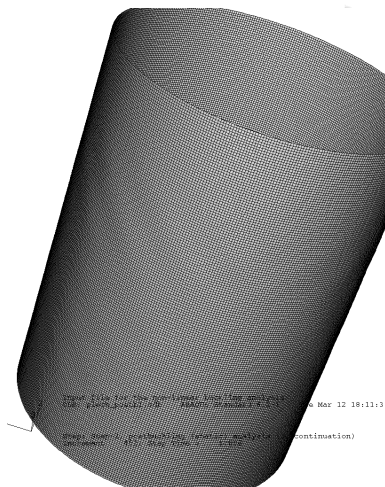


Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Kvázistatická simulace hroucení

Algoritmus výpočtu umělé imperfekce

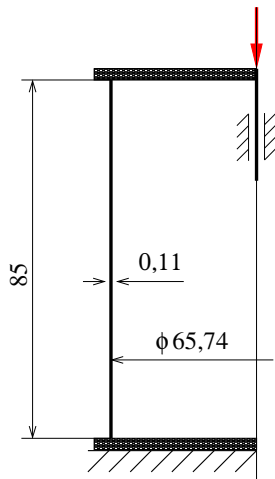
- Normalizace vlastních vektorů
- Kombinace vícenásobných vlastních vektorů tak, aby maximum radiálního posuvu leželo na radiální ose
- Korekce normalizačních koeficientů tak, aby lineární kombinace vlastních vektorů vedla k předepsané maximální odchylce $\Delta r_{max} = 0,5t = 0,055 \text{ mm}$.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Zatěžování silou

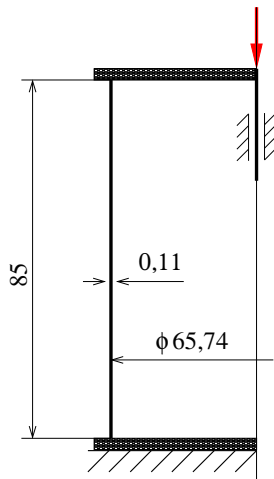
- Silové zatěžování bylo testováno při použití metody délky oblouku.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Zatěžování silou

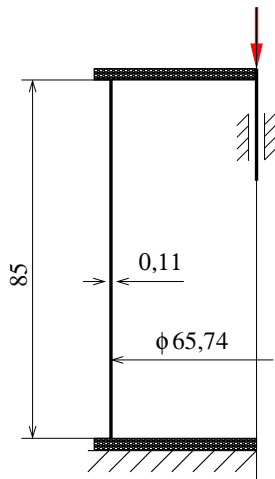
- Silové zatěžování bylo testováno při použití metody délky oblouku.
- Výsledné limitní zatížení vyšlo $F_{LIM} = 1302 \text{ N}$.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Zatěžování silou

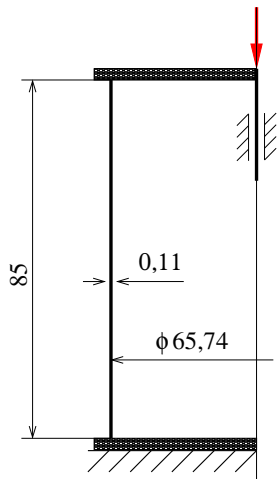
- Silové zatěžování bylo testováno při použití metody délky oblouku.
- Výsledné limitní zatížení vyšlo $F_{LIM} = 1302 \text{ N}$.
- Při pokračování výpočtu však došlo k obrácení smyslu síly, takže výpočet nepopsal proces hroucení.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Zatěžování silou

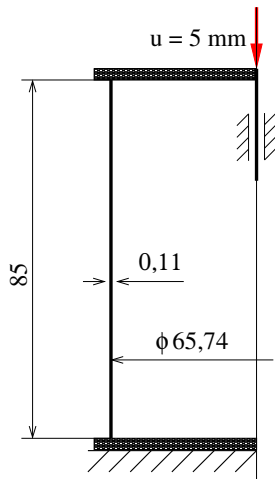
- Silové zatěžování bylo testováno při použití metody délky oblouku.
- Výsledné limitní zatížení vyšlo $F_{LIM} = 1302 \text{ N}$.
- Při pokračování výpočtu však došlo k obrácení smyslu síly, takže výpočet nepopsal proces hroucení.
- Shoda vypočteného a naměřeného limitního zatížení je dobrá



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Zatěžování posuvem

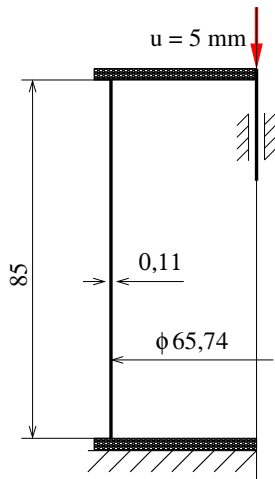
- Model je zatížen posuvem horního čela o hodnotu $u = 5 \text{ mm}$



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Zatěžování posuvem

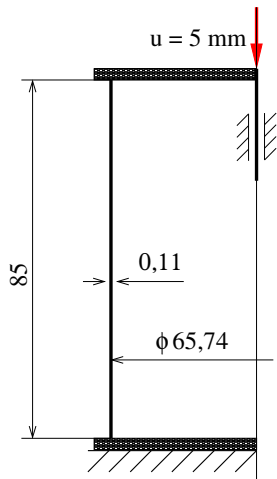
- Model je zatížen posuvem horního čela o hodnotu Model je zatížen posuvem horního čela o hodnotu
- V modelu je zavedeno umělé tlumení (stabilizační silový účinek). Zkreslující vliv tohoto tlumení na výsledky může být posouzen a posteriori.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Zatěžování posuvem

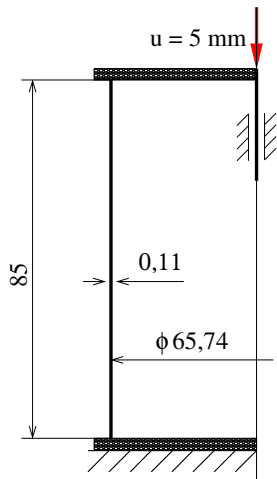
- Model je zatížen posuvem horního čela o hodnotu $u = 5 \text{ mm}$. Model je zatížen posuvem horního čela o hodnotu
- V modelu je zavedeno umělé tlumení (stabilizační silový účinek). Zkreslující vliv tohoto tlumení na výsledky může být posouzen a posteriori.
- Simulace je porovnávána s experimentem pomocí závislosti síla–stlačení.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

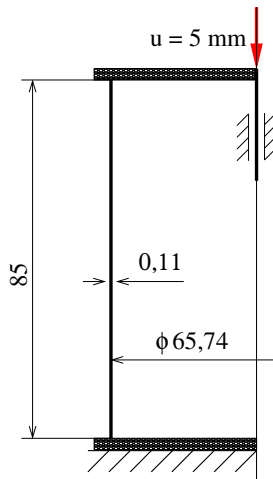
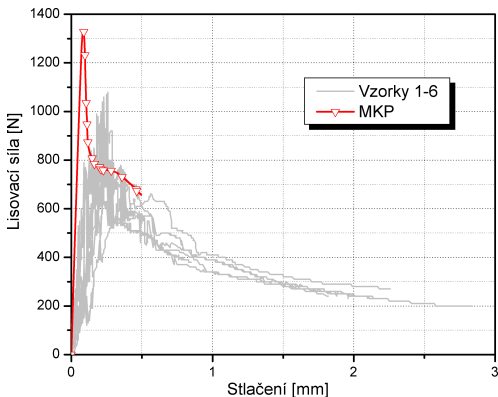
Výpočet MKP: Zatěžování posuvem

- Model je zatížen posuvem horního čela o hodnotu $u = 5 \text{ mm}$. Model je zatížen posuvem horního čela o hodnotu
- V modelu je zavedeno umělé tlumení (stabilizační silový účinek). Zkreslující vliv tohoto tlumení na výsledky může být posouzen a posteriori.
- Simulace je porovnávána s experimentem pomocí závislosti síla–stlačení.
- Při zatěžování posuvem bylo dosaženo výsledků nejbližších experimentu.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

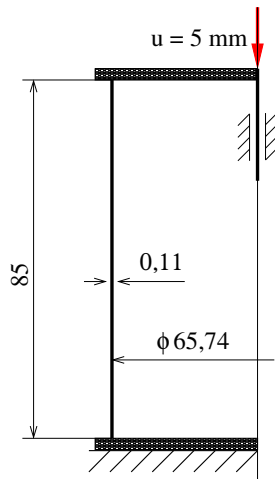
Výpočet MKP: Zatěžování posuvem



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Dynamická simulace

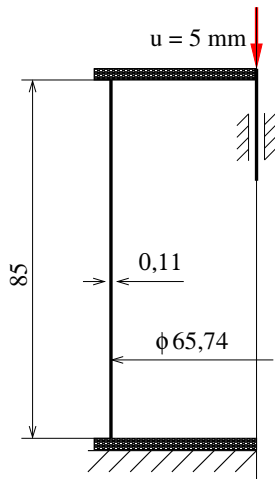
- Model je zatížen rychlostí horního čela



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Dynamická simulace

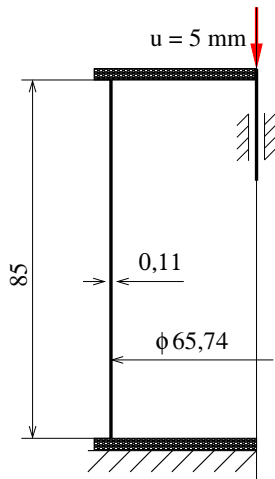
- Model je zatížen rychlostí horního čela
- Úloha je řešena dynamicky s explicitní integrací pohybových rovnic.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Dynamická simulace

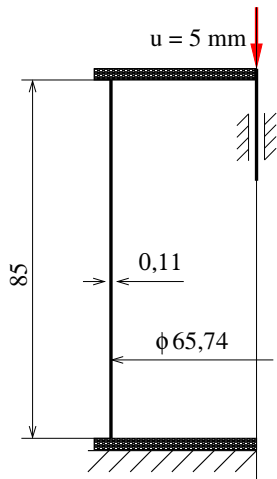
- Model je zatížen rychlostí horního čela
- Úloha je řešena dynamicky s explicitní integrací pohybových rovnic.
- Simulace je porovnávána s experimentem pomocí závislosti síla–stlačení.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

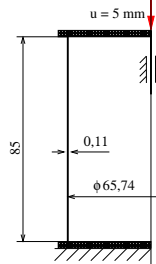
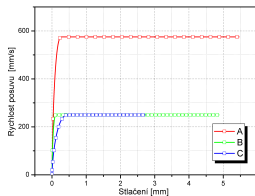
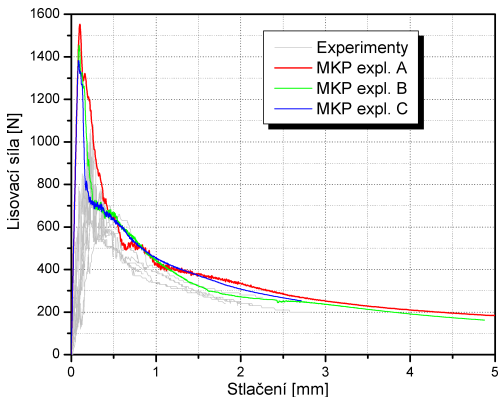
Výpočet MKP: Dynamická simulace

- Model je zatížen rychlostí horního čela
- Úloha je řešena dynamicky s explicitní integrací pohybových rovnic.
- Simulace je porovnávána s experimentem pomocí závislosti síla–stlačení.
- Při dynamické simulaci bylo dosaženo výsledků srovnatelných s kvázistatickým výpočtem.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

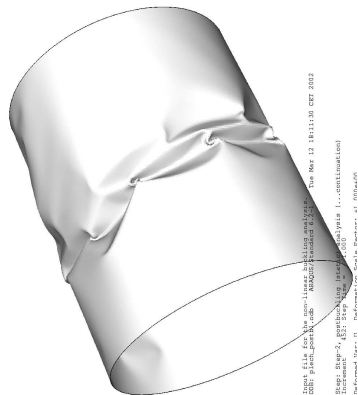
Výpočet MKP: Dynamická simulace



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Závěry

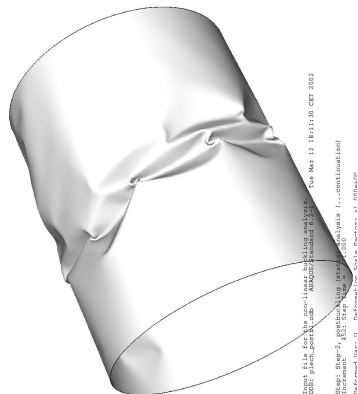
- Eulerovské řešení úloh s perfektní geometrií vysoce přeceňuje kritické zatížení.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Závěry

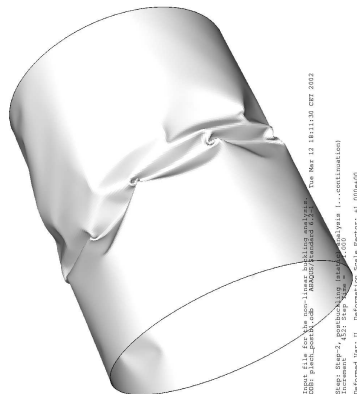
- Eulerovské řešení úloh s perfektní geometrií vysoce přeceňuje kritické zatížení.
- Okamžik zhroutení nastává v elastickém stavu.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Závěry

- Eulerovské řešení úloh s perfektní geometrií vysoce přeceňuje kritické zatížení.
- Okamžik zhroucení nastává v elastickém stavu.
- Při vlastním hroucení dochází k významné plastizaci.



Příklad hroucení tenkostěnné skořepiny

Výpočet MKP: Závěry

- Eulerovské řešení úloh s perfektní geometrií vysoce přeceňuje kritické zatížení.
- Okamžik zhroucení nastává v elastickém stavu.
- Při vlastním hroucení dochází k významné plastizaci.
- Dynamická simulace se jeví být vhodným a efektivním nástrojem pro řešení dané třídy úloh.

