Válcová momentová skořepina

Momentová skořepina je tenkostěnné těleso, jež nesplňuje předpoklady o membránové napjatosti. Válcová skořepina je zvláštním případem skořepiny rotačně symetrické, musí tedy splňovat podmínky rotační symetrie pro geometrii, materiál, vazby i zatížení, aby deformačně napěťové stavy byly rotačně symetrické. Základním deformačním parametrem je radiální posuv u, nezávislým je také axiální posuv w, jako pomocný deformační parametr zavádíme úhel natočení tečny ke střednicové ploše υ.

Tenzor napětí:

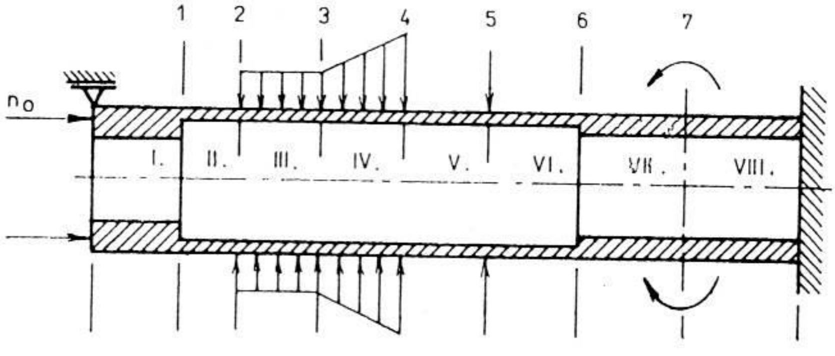
- oproti obecnému rotačně symetrickému tělesu je jedno z hlavních napětí (σ_r) zanedbatelné (v důsledku malého rozměru skořepiny ve směru r - podobně jako u membránové skořepiny),
- meridián je rovnoběžný s osou z, takže meridiánové napětí označujeme σ_z,
- smykové napětí τ_{rz} uvažujeme v rovnicích rovnováhy, ale podobně jako u ohýbaných dlouhých prutů a Kirchhoffových desek je jeho velikost nepodstatná pro posouzení mezních stavů.

Tenzor napětí v maticovém zápisu má tedy tvar:

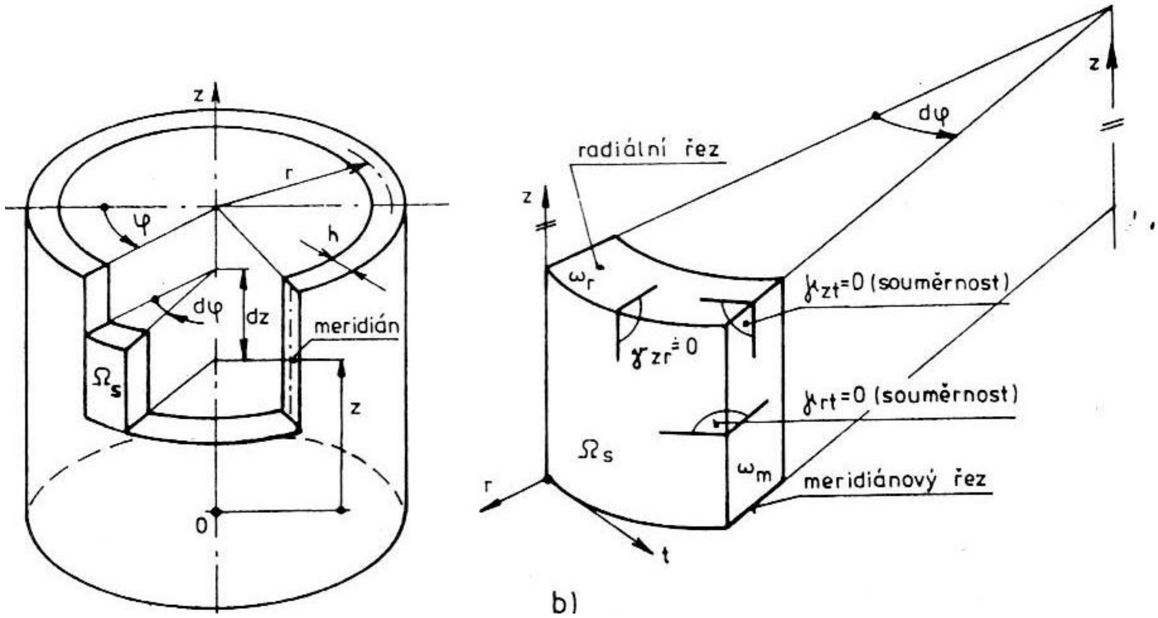
$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r \cong 0 & 0 & \tau_{rz} \cong 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ \tau_{rz} \cong 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Teorii válcové momentové skořepiny je nutno použít tehdy, nejsou-li splněny předpoklady membránové napjatosti skořepiny, k čemuž může dojít např. za následujících podmínek (viz obr.):

1. body střednice vázané k jinému tělesu (omezené posuvy, příp. natočení),
2. skoková změna tuhosti (tj. tloušťky skořepiny nebo modulu pružnosti materiálu),
3. zlomy střednicové plochy (u válcové se nevyskytují),
4. skokové změny křivosti střednicové plochy (u válcové se nevyskytují),
5. nespojitost zatížení (liniová síla, liniový moment) nebo jejich derivací (změna průběhu tlaku - viz obr.).

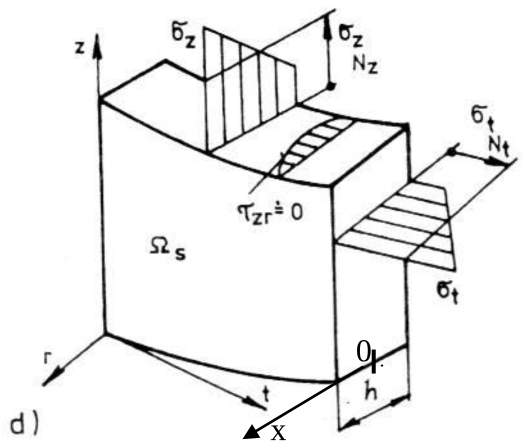


Typický elementární prvek a souřadnicový systém:



Napětí na elementárním prvku

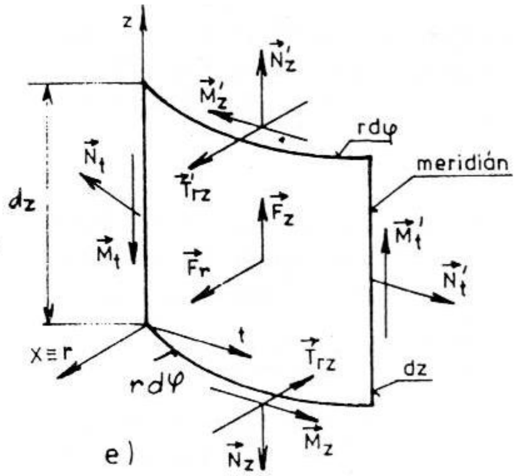
Napětí normálová nejsou konstantní, jsou po tloušťce elementu rozložena lineárně, vzhledem k významné membránové složce napjatosti však nejsou nulová na střednicové ploše:



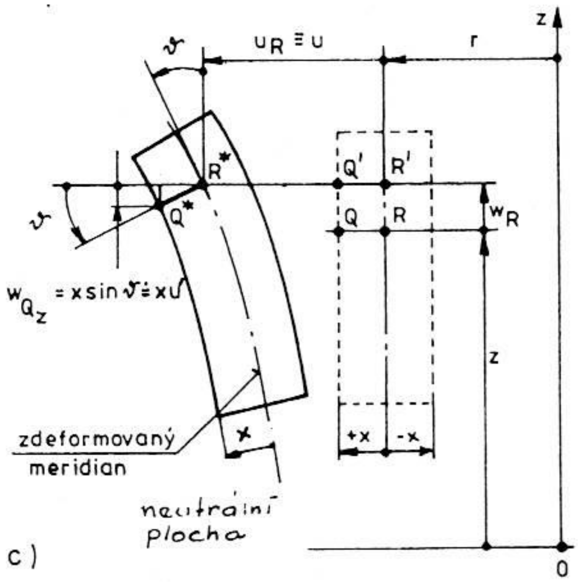
Napětí nahradíme jejich **liniovými** silovými a momentovými **výslednicemi** na základě **statické ekvivalence**

$$n_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z dx \quad ; \qquad n_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t dx \quad ; \qquad t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz} dx \tag{1}$$

$$m_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x\sigma_t dx \qquad m_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x\sigma_z dx \tag{2}$$



Deformace elementu



$$w_Q(z,x) = w_R + w_{Qz}$$

Z tohoto vztahu se zohledněním relací na obrázku dostaneme geometrickou rovnici

$$\varepsilon_z = \frac{dw_Q}{dz} = \frac{dw}{dz} - x\frac{d^2u}{dz^2} \qquad (3)$$

Soustava rovnic pro řešení

Rovnice SR:

$$\sum F_z = 0: \quad \frac{dn_z}{dz} + p_z = 0 \tag{4a}$$

$$\sum F_r = 0: \quad \frac{dt_{rz}}{dz} - \frac{n_t}{r} + p_r = 0 \tag{4b}$$

$$\sum M_t = 0: \quad -\frac{dm_z}{dz} + t_{rz} = 0 \tag{4c}$$

Geometrické rovnice:

$$\varepsilon_r(z,x) = \frac{du}{dr} \tag{5a}$$

$$\varepsilon_t(z,x) = \frac{u}{r} \tag{5b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} - x\frac{d^2u}{dz^2} \tag{5c}$$

Konstitutivní vztahy:

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_z + \mu\varepsilon_t\right] \tag{6a}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_t + \mu\varepsilon_z\right] \tag{6b}$$

Postup řešení:
Do konstitutivních vztahů (6) dosadíme geometrické rovnice (5) a výsledek dosadíme do rovnic statické ekvivalence (1) a (2). Po integraci a úpravě dostaneme vztahy:

$$n_z = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{dw}{dz} + \mu\frac{u}{r}\right) \tag{7a}$$

$$n_t = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r} + \mu\frac{dw}{dz}\right) \tag{7b}$$

$$m_z = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{d^2u}{dz^2} = -B\frac{d^2u}{dz^2} \tag{8a}$$

$$m_t = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{d^2u}{dz^2}\mu = -B\frac{d^2u}{dz^2}\mu = \mu m_z \tag{8b}$$

V rovnicích (8) jsme výraz před závorkou označili jako **ohybovou tuhost skořepiny**

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{9}$$

Eliminací výrazu dw/dz z rovnic (7a), (7b) dostaneme vztah

$$n_t = \mu n_z + Eh\frac{u}{r} \tag{10}$$

Zderivujeme-li rovnici rovnováhy (4c) a dosadíme do (4b) dostaneme vztah

$$\frac{d^2m_z}{dz^2} - \frac{n_t}{r} + p_r = 0 \tag{11}$$

Do něj dosadíme rovnici (8a) a dostáváme

$$-B\frac{d^4u}{dz^4} - \frac{n_t}{r} + p_r = 0 \tag{12}$$

Dosazením (10) do (12) a úpravou dostaneme

$$-B\frac{d^4u}{dz^4} - \frac{Eh}{r^2}u - \mu\frac{n_z}{r} + p_r = 0 \tag{13}$$

Rovnici upravíme do normovaného tvaru

$$\frac{d^4u}{dz^4} + 4\beta^4 u = \frac{1}{B}\left[p_r - \frac{\mu}{r}n_z\right] \tag{14}$$

v němž jsme zavedli parametr β, daný výrazem

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2h^2}} \quad \left[m^{-1}\right] \tag{15}$$

Tento parametr je dán převážně geometrií skořepiny a je rozhodující pro velikost oblasti, kde je porušena membránová napjatost.

Z matematiky je známo řešení homogenní části rovnice (14) ve tvaru:

$$u_{\text{hom}} = e^{-\beta z}\left(c_1 \sin\beta z + c_2 \cos\beta z\right) + e^{\beta z}\left(c_3 \sin\beta z + c_4 \cos\beta z\right) \tag{16}$$

Z parametru β lze určit, do jaké vzdálenosti l_o je napjatost významně ovlivněna daným porušením membránové napjatosti podle bodů 1. až 5. na str. 1:

$$l_o \cong \frac{4}{\beta} \cong 3\sqrt{rh} \tag{17}$$

Je-li tedy délka skořepiny (přesněji vzájemná vzdálenost míst s porušením membránové napjatosti) větší než $2.l_o$ (takové skořepině říkáme „dlouhá“), pak se tato místa vzájemně neovlivňují a lze je počítat každé zvlášť. V rovnici (16) jsou pak konstanty c_3 a c_4 rovny nule a pro určení zbývajících stačí 2 okrajové podmínky.

Partikulární integrál rovnice (14) má tvar

$$u_{part} = \frac{r^2}{Eh}\left[p_r - \frac{\mu}{r}\left(n_z - \int p_z dz\right)\right] \tag{18}$$

Protože obvykle je axiální složka tlaku p_z zanedbatelná, lze psát řešení rovnice (14) ve tvaru

$$u = e^{-\beta z}\left(c_1 \sin \beta z + c_2 \cos \beta z\right) + \frac{pr^2}{Eh} - \mu\,\frac{n_z r}{Eh} \tag{19}$$

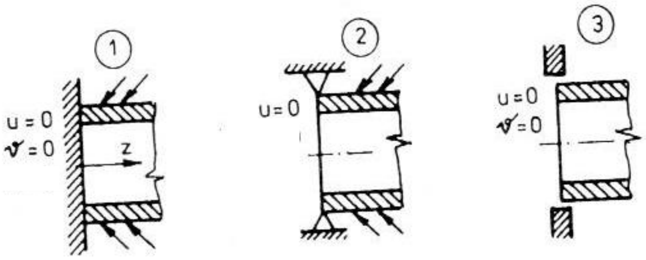
Postup řešení přímé úlohy:

- Podle vzdálenosti l mezi poruchami membránové napjatosti rozhodneme, jedná-li se o „dlouhou“ skořepinu (platí pro $l>2l_o$, kde l_o určíme z rovnice (17).
- Ze silové rovnice SR konečného prvku skořepiny (do směru z) určíme liniovou axiální sílu n_z a dosadíme do rovnice (19).
- Sestavíme okrajové podmínky pro rovnici (19); okrajové podmínky mohou být dány těmito známými hodnotami (pro z=0):
  - posuv u
  - úhel natočení $\upsilon = du/dz$
  - liniový ohybový moment m_z (dán rovnicí (8a))
  - liniová posouvající síla t_z (podle rovnice (4c) rovna derivaci momentu, tedy třetí derivaci posuvu).
- Vyřešíme integrační konstanty c_1 a c_2 a tím dostaneme rovnici pro radiální posuvy.
- Dosazením u do rovnic (8) určíme liniové momenty jako funkce souřadnice z a vykreslíme jejich průběhy; totéž provedeme pro liniové normálové síly (n_t dopočítáme z rovnice (10), posouvající sílu zanedbáme, protože smyková napětí na povrchu jsou nulová).
- Z průběhů momentů určíme jejich maxima, tj. nebezpečné body (obvykle pro z=0).
- Určíme extrémní napětí ze vztahů:

  $$\sigma_{z\,max} = \frac{n_z}{h} \pm \frac{6m_z}{h^2} \quad \text{a} \quad \sigma_{t\,max} = \frac{n_t}{h} \pm \frac{6m_t}{h^2}$$

  Znaménko vybíráme podle znaménka normálové síly tak, abychom z možných výsledků vybrali napětí s větší absolutní hodnotou (při zatížení vnitřním tlakem kladné).
- Protože třetí hlavní napětí σ_r je nulové, je redukované napětí při použití Trescovy podmínky plasticity (pro houževnatý materiál) rovno většímu z obou vypočtených napětí. Z něj určíme součinitel bezpečnosti.

Typické případy uložení skořepiny



Další okrajové podmínky:

- při zatížení liniovým momentem na volném okraji je axiální moment v daném místě nenulový, daný hodnotou tohoto zátěžného momentu,
- při zatížení liniovou silou na volném okraji je posouvající síla v daném místě nenulová, daná hodnotou působící liniové síly.