Systém vztahů obecné pružnosti

Zobecněný Hookeův zákon

V PPI se řešily úlohy pružnosti u prutů. Pro řešení posuvů napětí a přetvoření obecného 3D těleso je třeba sestavit a řešit systém vztahů obecné pružnosti. Jeho řešení může být realizováno přístupem:

- **diferenciálním** – řešení soustavy diferenciálních rovnic,
- variačním – vyjádření energetické veličiny a hledání jejího extrému pomocí variačního počtu.

Materiál považujeme za kontinuum (homogenní, izotropní, lineárně elastické), jehož vlastnosti jsou popsány globálními elastickými parametry (E, μ) a dalšími materiálovými parametry (σ_k, σ_{Pt}, σ_C, K_{IC}...)a diferenciální rovnice sestavujeme na základě uvolnění trojnásobně elementárního prvku.

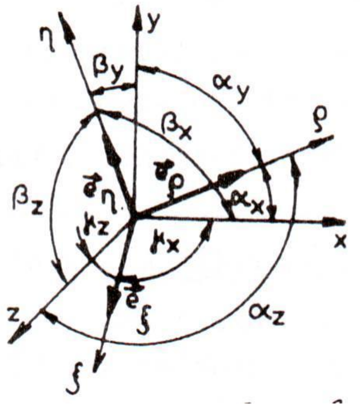
Nejdůležitější vlastnosti tenzoru napětí (opakování PPI):

1. Lze jej zapsat čtvercovou maticí 3 x 3.
2. Z této matice lze určit složky napětí v libovolné rovině tedy i souřadnice tenzoru v libovolné souř. soustavě.
3. Při pootáčení elem. hranolku lze nalézt polohu, kdy smyková napětí ve všech třech vzájemně kolmých rovinách jsou nulová; normálová napětí se pak nazývají hlavními napětími.
4. Hlavní směry tenzoru jsou vzájemně kolmé; pouze v případě, že dvě hlavní složky jsou stejné, pak příslušné hlavní směry mohou svírat libovolný úhel.
5. Hlavní napětí lze určit z charakteristické rovnice tenzoru napětí, což je algebraická rovnice 3, stupně se třemi reálnými kořeny; jejími koeficienty jsou invarianty tenzoru napětí.
6. Tenzor napětí lze graficky znázornit v Mohrově rovině, což nám umožňuje snadno určit minimální a maximální hodnoty normálového i smykového napětí.
7. Jsou-li některé složky tenzoru nulové, příp. stejné, dostáváme zvláštní typy napjatosti: rovinná (dvouosá), jednoosá, rovinná rovnoměrná, prutová, smyková, trojosá rovnoměrná atd.
8. Tenzor napětí lze rozložit na deviátorovou a rovnoměrnou (kulovou) část.

1)

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

2)



$$\sigma_\rho = \alpha_\rho^T . T_\sigma . \alpha_\rho$$

$$\sigma_\eta = \alpha_\eta^T . T_\sigma . \alpha_\eta$$

$$\sigma_\xi = \alpha_\xi^T . T_\sigma . \alpha_\xi \qquad \alpha_\eta = \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix}$$

$$\tau_{\rho\eta} = \alpha_\rho^T . T_\sigma . \alpha_\eta$$

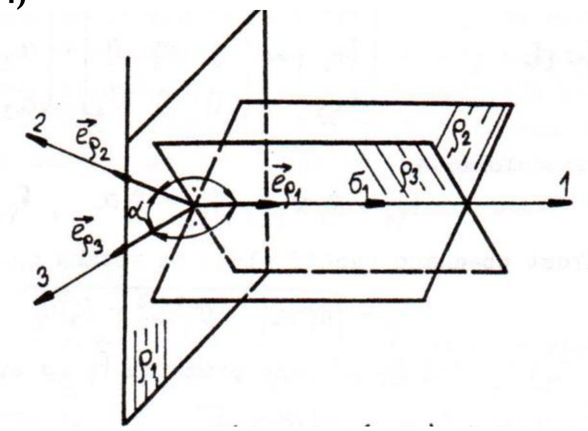
$$\tau_{\rho\xi} = \alpha_\rho^T . T_\sigma . \alpha_\xi$$

$$\tau_{\eta\xi} = \alpha_\eta^T . T_\sigma . \alpha_\xi \qquad \alpha_\xi = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}$$

3)

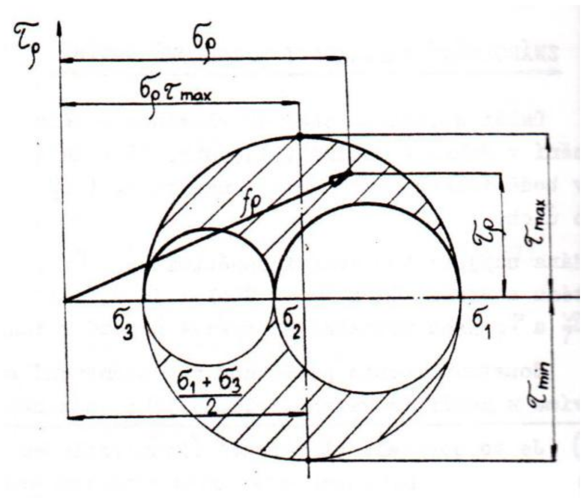
$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

4)

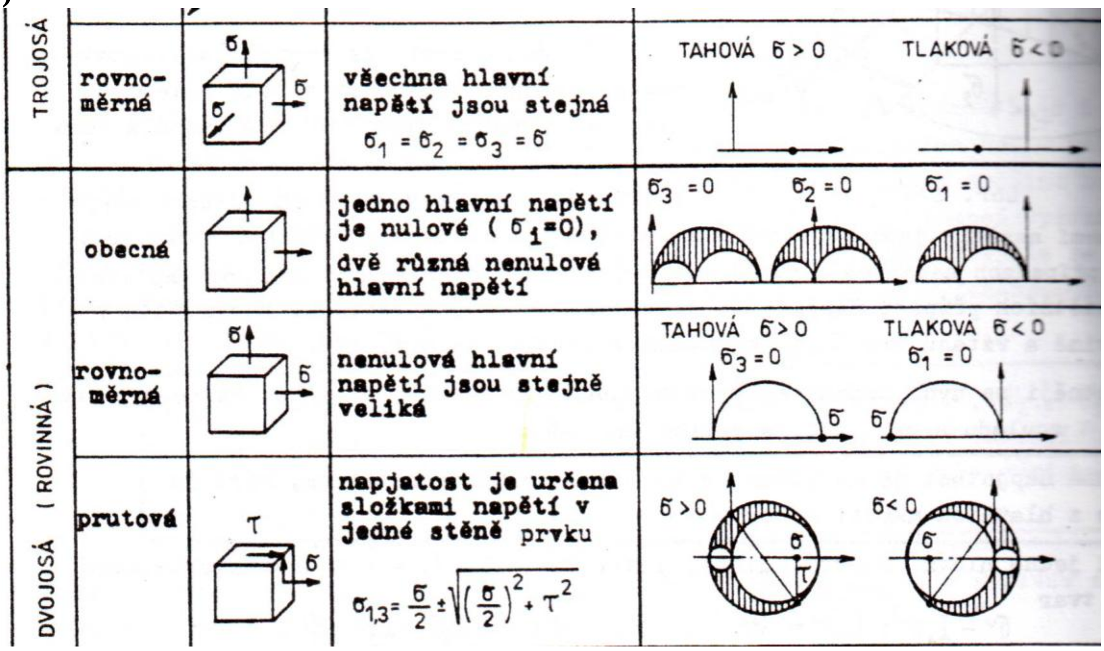


5) $\sigma^3 - I_1.\sigma^2 + I_2.\sigma - I_3 = 0$

6)



7)



TROJOSÁ	rovnoměrná	σ, σ, σ	všechna hlavní napětí jsou stejná $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$	TAHOVÁ $\sigma > 0$ TLAKOVÁ $\sigma < 0$
DVOJOSÁ (ROVINNÁ)	obecná		jedno hlavní napětí je nulové ($\sigma_1 = 0$), dvě různá nenulová hlavní napětí	$\sigma_3 = 0$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_1 = 0$
	rovnoměrná	σ, σ	nenulová hlavní napětí jsou stejně veliká	TAHOVÁ $\sigma > 0$ $\sigma_3 = 0$ σ; TLAKOVÁ $\sigma < 0$ $\sigma_1 = 0$ σ
	prutová	τ, σ	napjatost je určena složkami napětí v jedné stěně prvku $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$	$\sigma > 0$ σ τ; $\sigma < 0$ σ

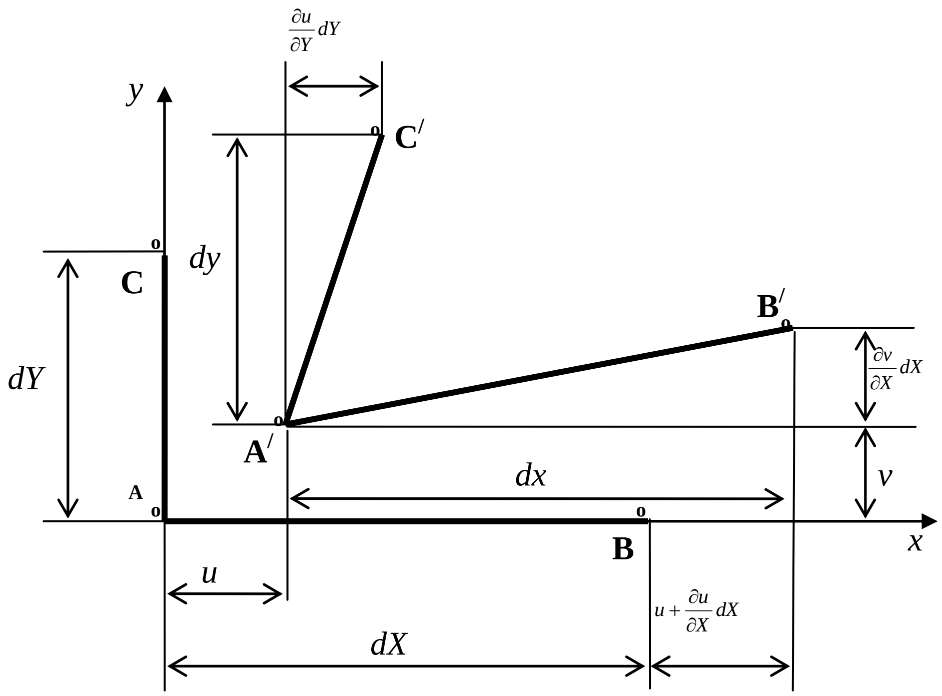
8)

$$T_\sigma = D_\sigma + K_\sigma$$

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_s & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_s \end{bmatrix} \qquad K_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{bmatrix}$$

Tenzor přetvoření

odvození geometrických vztahů



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,; \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Z analogie (a obecných vlastností tenzoru) plynou podobné nejdůležitější **vlastnosti tenzoru přetvoření**:

1. Lze jej zapsat čtvercovou maticí 3 x 3.
2. Z této matice lze určit složky přetvoření v libovolné rovině tedy i souřadnice tenzoru v libovolné souř. soustavě.
3. Při pootáčení elem. hranolku lze nalézt polohu, kdy úhlová přetvoření ve všech třech vzájemně kolmých rovinách jsou nulová; délková přetvoření se pak nazývají hlavními přetvořeními.
4. Hlavní směry tenzoru jsou vzájemně kolmé; pouze v případě, že dvě hlavní složky jsou stejné, pak příslušné hlavní směry mohou svírat libovolný úhel.
5. Hlavní přetvoření lze určit z charakteristické rovnice tenzoru přetvoření, což je algebraická rovnice 3, stupně se třemi reálnými kořeny; jejími koeficienty jsou invarianty tenzoru přetvoření.
6. Tenzor přetvoření lze graficky znázornit v Mohrově rovině, což nám umožňuje snadno určit minimální a maximální hodnoty délkových i úhlových přetvoření.
7. Jsou-li některé složky tenzoru nulové, příp. stejné, dostáváme zvláštní deformační stavy v bodě: rovinný (dvouosý), jednoosý, smykový , trojosý rovnoměrný atd.
8. Tenzor přetvoření lze rozložit na deviátorovou (tvarovou) a rovnoměrnou (kulovou, objemovou) část.

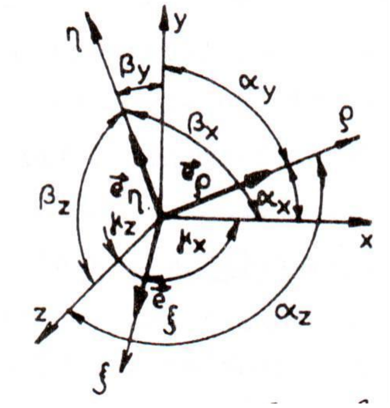
1)

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

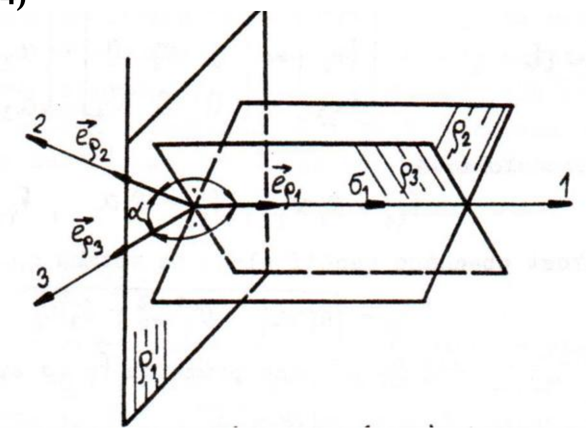
3)

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}$$

2)



4)



$$\varepsilon_\rho = \alpha_\rho^T . T_\varepsilon . \alpha_\rho$$

$$\varepsilon_\eta = \alpha_\eta^T . T_\varepsilon . \alpha_\eta$$

$$\varepsilon_\xi = \alpha_\xi^T . T_\varepsilon . \alpha_\xi \qquad \alpha_\eta = \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix}$$

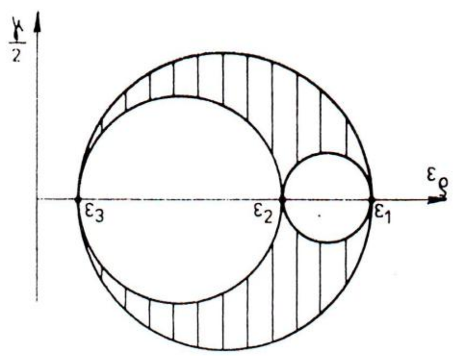
$$\frac{\gamma_{\rho\eta}}{2} = \alpha_\rho^T . T_\varepsilon . \alpha_\eta$$

$$\frac{\gamma_{\rho\xi}}{2} = \alpha_\rho^T . T_\varepsilon . \alpha_\xi$$

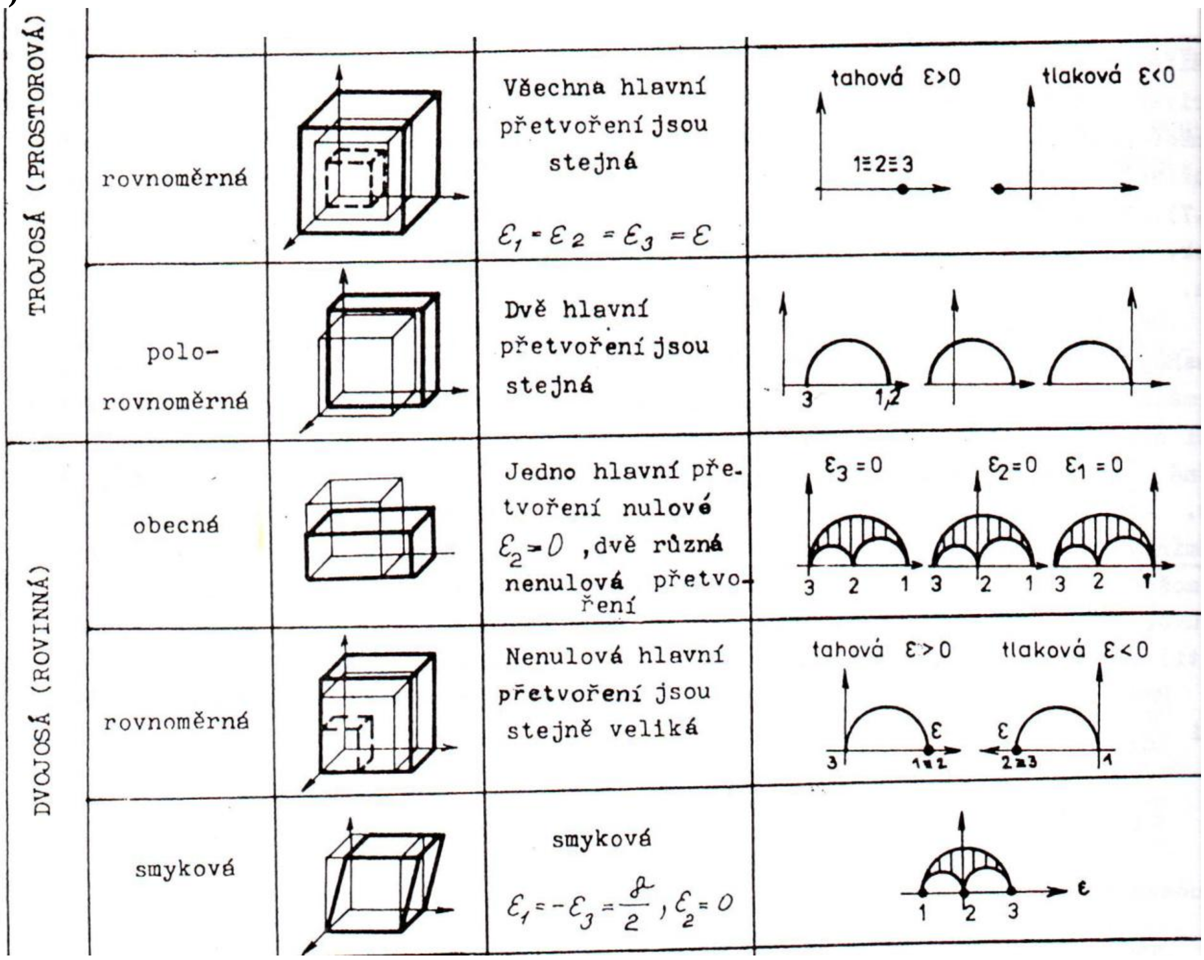
$$\frac{\gamma_{\eta\xi}}{2} = \alpha_\eta^T . T_\varepsilon . \alpha_\xi \qquad \alpha_\xi = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}$$

5) $\varepsilon^3 - E_1 . \varepsilon^2 + E_2 . \varepsilon - E_3 = 0$

6)



7)



TROJOSÁ (PROSTOROVÁ)	rovnoměrná	Všechna hlavní přetvoření jsou stejná $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$	tahová $\varepsilon > 0$; tlaková $\varepsilon < 0$; 1≡2≡3
	polo-rovnoměrná	Dvě hlavní přetvoření jsou stejná	3; 1,2
DVOJOSÁ (ROVINNÁ)	obecná	Jedno hlavní přetvoření nulové $\varepsilon_2 = 0$, dvě různá nenulová přetvoření	$\varepsilon_3 = 0$; $\varepsilon_2 = 0$; $\varepsilon_1 = 0$; 3 2 1 3 2 1 3 2 1
	rovnoměrná	Nenulová hlavní přetvoření jsou stejně veliká	tahová $\varepsilon > 0$; tlaková $\varepsilon < 0$; 3; ε; 1≡2; ε; 2≡3; 1
	smyková	smyková $\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = \frac{\gamma}{2}$, $\varepsilon_2 = 0$	ε; 1 2 3

8)

$$T_\varepsilon = D_\varepsilon + K_\varepsilon$$

$$D_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_s & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y - \varepsilon_s & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z - \varepsilon_s \end{bmatrix} \qquad K_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_s \end{bmatrix}$$

Poměrná změna objemu $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

Základní typy rovnic obecné pružnosti:

1. Cauchyho rovnice rovnováhy elementárního prvku:

a) ***Vnitřního***:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + o_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + o_y = 0 \qquad \vec{o} = \vec{A}\rho$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z = 0$$

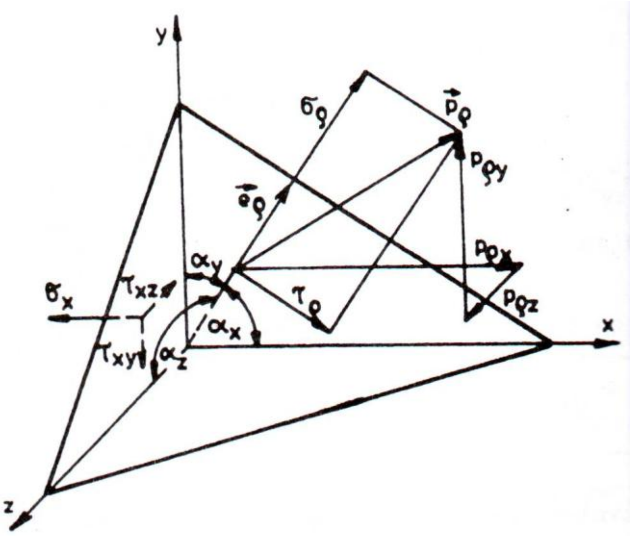
Prvek má tvar šestistěnu (hranolu, krychle), měrná objemová síla v těchto rovnicích může být gravitační, setrvačná, elektromagnetická aj.

b) ***Hraničního***:

$$p_{\rho x} = \sigma_x.\alpha_x + \tau_{yx}.\alpha_y + \tau_{zx}.\alpha_z$$

$$p_{\rho y} = \tau_{xy}.\alpha_x + \sigma_y.\alpha_y + \tau_{yz}.\alpha_z$$

$$p_{\rho z} = \tau_{xz}.\alpha_x + \tau_{yz}.\alpha_y + \sigma_z.\alpha_z$$



Prvek má tvar čtyřstěnu, jehož jedna stěna je součástí povrchu tělesa. Je-li tento povrch nezatížený, pak příslušný tlak je roven nule.

2. Geometrické vztahy:

Parciální diferenciální rovnice, které vyjadřují složky tenzoru přetvoření jako funkce posuvů.

3. Fyzikální (konstitutivní) vztahy:

Vyjadřují vzájemné závislosti mezi složkami tenzorů napětí a přetvoření. V lineární PP se jedná o Hookeův zákon (zobecněný).

Zobecněný Hookeův zákon

Platí pro homogenní izotropní lineárně pružný materiál. Takový materiál nazýváme pak Hookeovský.
Nejsnadněji se odvodí pomocí principu superpozice na základě jednoosého zatížení ve třech vzájemně kolmých směrech. Pro explicitně vyjádřená přetvoření platí:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}.\left[\sigma_x - \left(\mu\sigma_y + \mu\sigma_z\right)\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}.\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}.\left[\sigma_y - \left(\mu\sigma_x + \mu\sigma_z\right)\right] \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}.\tau_{xz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}.\left[\sigma_z - \left(\mu\sigma_x + \mu\sigma_y\right)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}.\tau_{yz}$$

Inverzní vztahy (s explicitně vyjádřenými napětími) mají tvar (příklad pro jednu složku normálového napětí):

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu}.\left[\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right]$$

Zavedením nových elastických konstant dostaneme:

$$\sigma_x = 2G.\varepsilon_x + \lambda e \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = 2G.\varepsilon_y + \lambda e \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\sigma_z = 2G.\varepsilon_z + \lambda e \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

kde $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$, $\lambda = \dfrac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$, $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

Často budeme používat Hookeův zákon **v maticovém tvaru** nebo speciální tvary Hookeova zákona pro **rovinnou napjatost** a **rovinný stav deformace**; odvodíme také tvar pro **smykovou napjatost**.

Energie napjatosti (=potenciální energie pružné deformace) se získá integrací měrné energie napjatosti přes objem vyšetřovaného tělesa.

Okrajové podmínky jsou nutné pro řešení diferenciálních rovnic. Mohou být dvojího typu:

- deformační (předepsané posuvy v některých bodech povrchu tělesa)
- silové (předepsán tlak na části povrchu tělesa). Tato podmínka platí i pro volný povrch tělesa (tlak je nulový).

Shrnutí:
Výstupními hodnotami jsou nezávislé funkce obecné pružnosti, tedy:

- posuvy (vektor posuvů u se složkami u, v, w),
- přetvoření (tenzor přetvoření T_ε s nezávislými složkami ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz}),
- napětí (tenzor napětí T_σ s nezávislými složkami σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz}).

Těchto 15 neznámých funkcí se řeší analyticky pomocí systému rovnic obecné pružnosti, který sestává z:

- rovnic statické rovnováhy elementárního prvku – 3 parciální diferenciální rovnice,
- rovnic geometrických – 6 parciálních diferenciálních rovnic,
- rovnic Hookeova zákona – 6 lineárních algebraických rovnic.

Základní úloha obecné pružnosti

je formulována jako tzv. *Vstupy: geometrie, materiál, vazby, zatížení.*
přímá úloha (vstupy →výstupy). *Výstupy: posuvy, napětí, přetvoření.*
Kirchhoff dokázal jednoznačnost řešení přímých úloh obecné pružnosti.

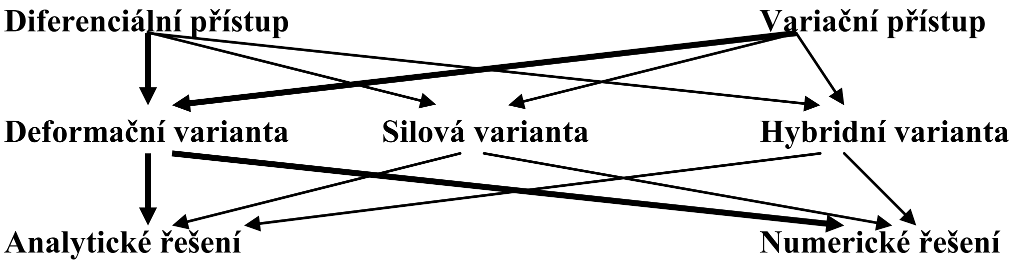
Inverzní úloha: na základě znalosti některého výstupního parametru (např. dovolené napětí) se vypočítá některý ze vstupních parametrů (rozměr, požadovaná pevnost materiálu, přípustné zatížení apod.). Řešení těchto úloh není jednoznačné, postup bývá obecně numericky nestabilní, špatná podmíněnost.

Optimalizační úloha: vstupní parametry se mění tak, aby bylo dosaženo extrémní hodnoty optimalizační veličiny (např. minimální hmotnosti, maximální únosnosti apod.)

Varianty řešení systému rovnic obecné pružnosti:
se liší podle toho, které z neznámých funkcí zvolíme za základní.
Deformační varianta:
postupujeme od posuvů k přetvořením a od nich k napětím. Tato varianta je nejpoužívanější jak při analytickém, tak při numerickém (variačním) řešení.

Silová varianta:
postupujeme od napětí k přetvořením a posléze posuvům. Málo používaná. Pro zajištění spojitosti řešených funkcí posuvů potřebuje další rovnice- rovnice kompatibility (spojitosti deformace) – viz skripta str. 25.

Přístupy k řešení přímého problému obecné pružnosti



Analytické řešení
Výhody: pokud existuje v uzavřeném tvaru, lze vyjádřit funkční závislost mezi vstupy a výstupy a řešit snadno inverzní i optimalizační úlohy.
Nevýhody: jen málo praktických problémů má analytické řešení.

Numerické řešení
Výhody: se současnými možnostmi výpočetní techniky lze řešit prakticky libovolně složité problémy z hlediska geometrie, materiálového chování.
Nevýhody: časová náročnost tvorby modelu, neznáme spojitou závislost mezi vstupy a výstupy, výsledky se těžko zobecňují; nelze přímo řešit inverzní nebo optimalizační úlohy.

Diferenciální deformační přístup

geometrické vztahy $\rightarrow$ Hookeův zákon $\rightarrow$ Cauchyho rovnice SR elementu

Dosadíme-li geometrické vztahy do Hookeova zákona a ten pak do Cauchyho rovnic rovnováhy, dostaneme **Lamého rovnice obecné pružnosti** v posuvech (viz skripta str. 56); jejich obecné řešení není známo.