Základní typy těles obecné pružnosti

1. **Obecné** těleso - není známo analytické řešení

2. **Rotačně symetrické** těleso
Aby bylo těleso rotačně symetrické deformačně-napěťově, musí být nejen rotačně symetrické nejen jeho geometrie, ale i materiálové vlastnosti, vazby a zatížení).

3. **Tenkostěnné** těleso

střednicová plocha zakřivená
skořepina

střednicová plocha rovinná

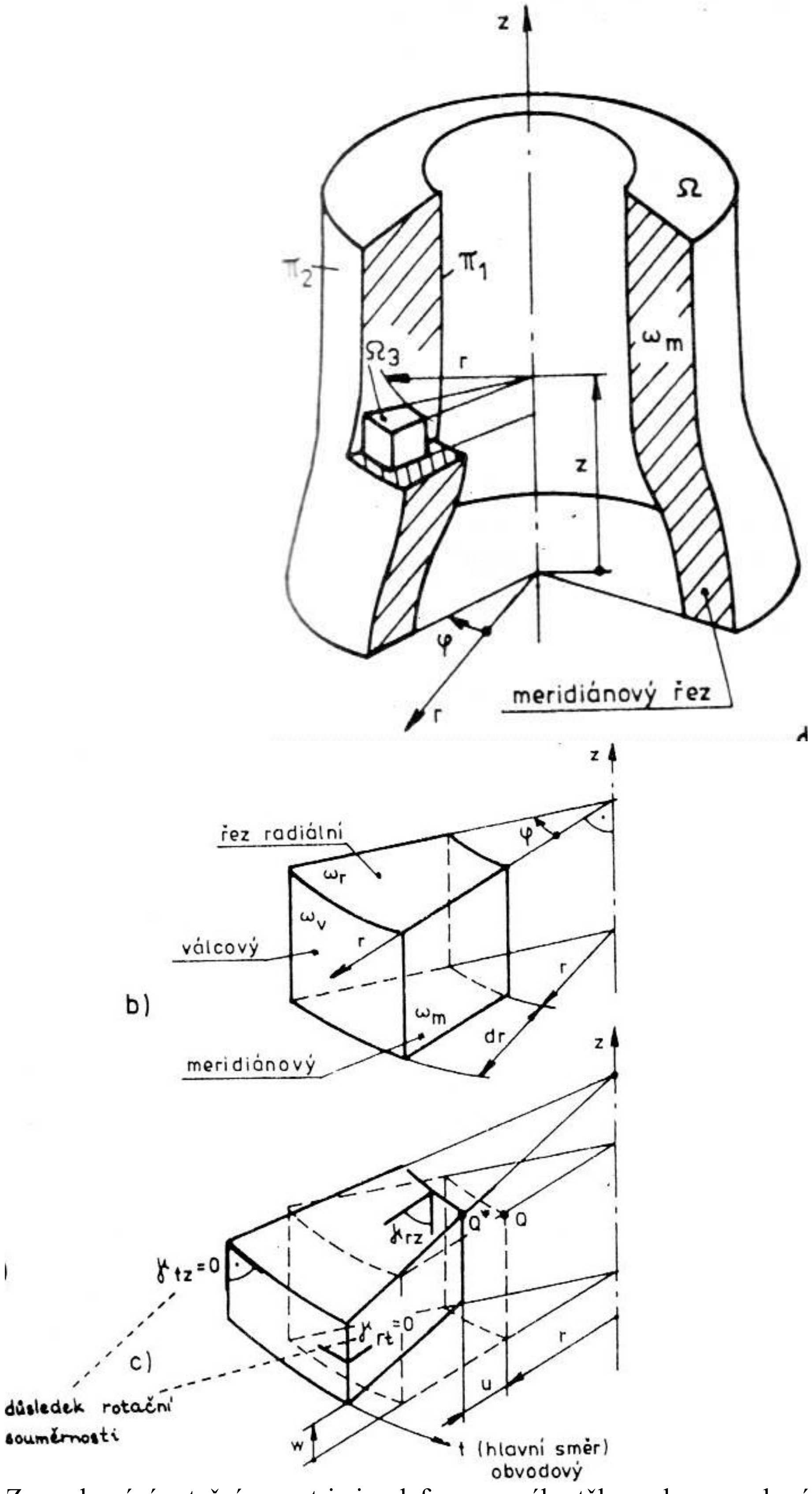
i po zatížení - **stěna** (zatížení působí jen ve střednicové rovině)

v nedeformovaném stavu, po zatížení zakřivená - **deska** (zatížení působí kolmo ke střednicové rovině)

napětí konstantní po tloušťce - **membránová** (bezmomentová) teorie skořepin

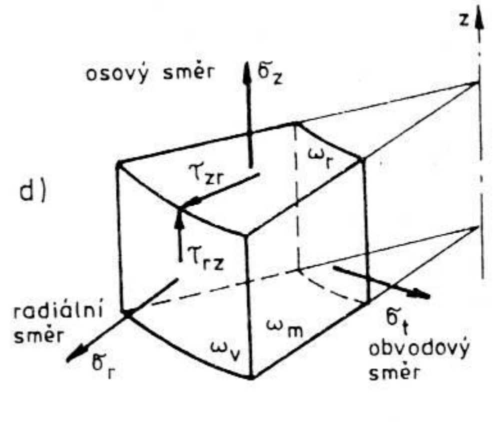
napětí proměnná po tloušťce - **momentová** (ohybová) teorie skořepin

Rotační těleso



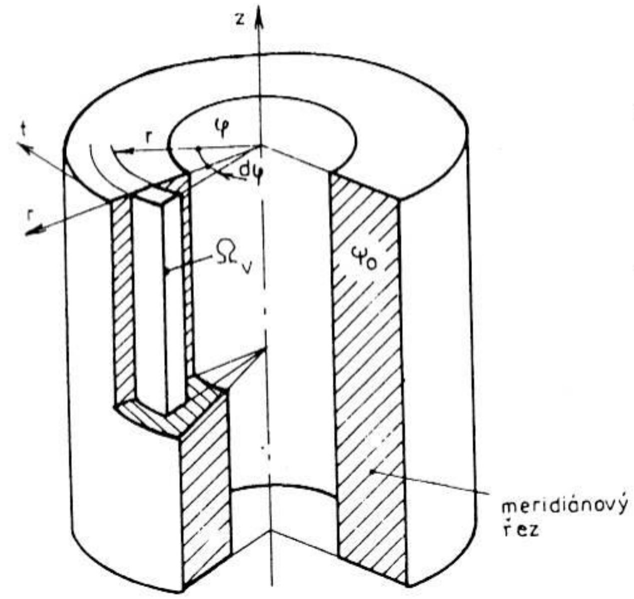
Ze zachování rotační symetrie i u deformovaného tělesa plynou nulová přetvoření γ_{rt} a γ_{tz} (viz obr.).

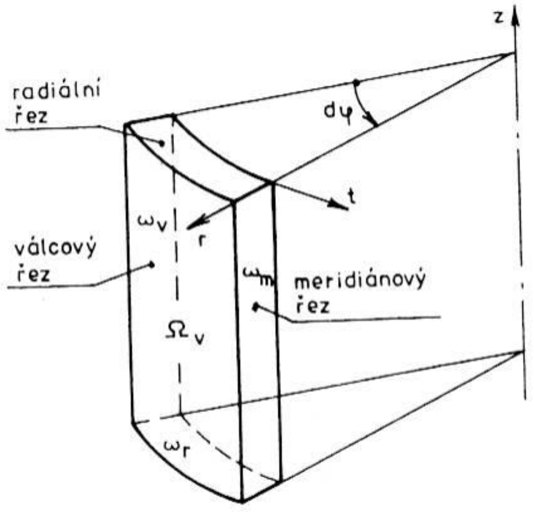
Podle Hookeova zákona nulovým úhlovým přetvořením odpovídají **nulová příslušná smyková napětí**, takže $\tau_{rt} = 0$ a $\tau_{tz} = 0$ a uvolněný element vypadá následovně:



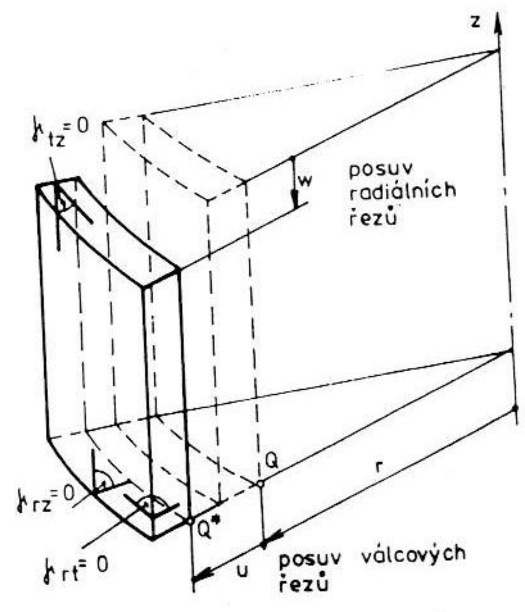
Tlustostěnné válcové těleso

je zvláštním případem rotačního tělesa. U válcového tělesa nedochází k natáčení ani radiálních řezů, takže všechny zkosy jsou nulové, tudíž i všechna smyková napětí. Směry r,t,z jsou pak **hlavními směry** (napětí i přetvoření).





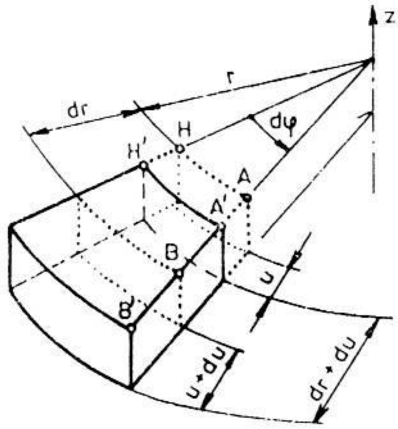
b)



Odvození rovnic pro řešení:

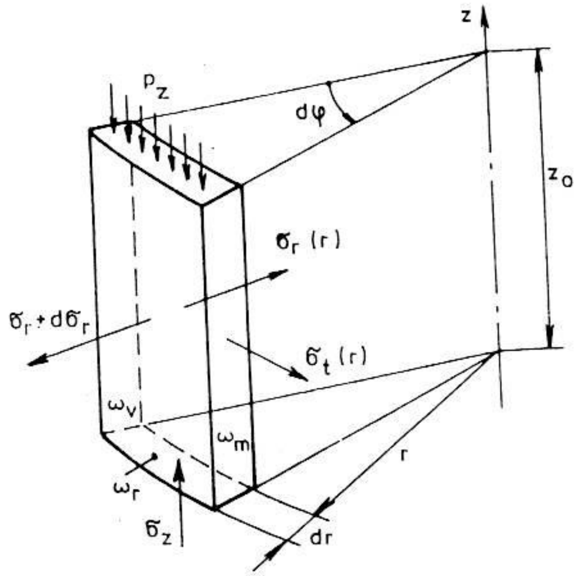
Hledané neznámé parametry: **σ_t, σ_r, σ_z, u,** všechny jsou funkcí pouze poloměru r.

1. Sestavení **geometrických rovnic** pro válcový souřadnicový systém.



$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = konst$$

2. Sestavení **podmínek statické rovnováhy** – použijeme pouze silovou podmínku pro radiální směr.



$$\sigma_r - \sigma_t + r\frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \qquad (1)$$

Pro axiální napětí platí $\sigma_z = konst$, protože $\varepsilon_z = konst$

3. **Hookeův zákon** lze **ve válcovém souř. systému** zapsat ve tvaru s explicitně vyjádřeným napětím:

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_r + \lambda.e = \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_r + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_z\right)\right],$$

z nějž derivací podle r a dosazením geometrických vztahů dostaneme:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{d\varepsilon_z}{dr}\right)\right] \qquad (2)$$

Z rovnic Hookeova zákona s explicitně vyjádřeným přetvořením:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu\left(\sigma_t + \sigma_z\right)\right]; \qquad \varepsilon_t = \frac{1}{E}\left[\sigma_t - \mu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right]$$

dostaneme odečtením obou rovnic

$$\sigma_r - \sigma_t = \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_r - \varepsilon_t\right) \qquad (3)$$

a dosazením geometrických vztahů

$$\sigma_r - \sigma_t = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) \qquad (4)$$

4. Dosazením rovnic (2) a (4) do rovnice (1) dostaneme po úpravě rovnici statické rovnováhy vyjádřenou v posuvech ve tvaru:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \qquad (5)$$

5. Jedná se o obyčejnou DR 2. řádu Eulerova typu, jejíž řešení lze nalézt ve tvaru

$$u = c_1 r + \frac{c_2}{r} \qquad (6)$$

6. Z posuvů zpětně vyjádříme napětí ve tvaru

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_r &= K - \frac{B}{r^2} \qquad (7a)\\ \sigma_t &= K + \frac{B}{r^2} \qquad (7b)\end{aligned}}$$

Postup řešení přímé úlohy:

1. Určení konstant v rovnicích (7a) a (7b) z okrajových podmínek (známých radiálních napětí)
2. Určení axiálního napětí σ_z z rovnice SR v ose z nebo pomocí Hookeova zákona ze známého axiálního přetvoření.
3. Analýza průběhů napětí, určení nebezpečných míst,
4. Výpočet hlavních napětí v nebezpečném místě, určení součinitele bezpečnosti pomocí redukovaného napětí.
5. Určení radiálního posuvu – nejsnadnější z obvodového přetvoření, vypočítaného pomocí Hookeova zákona.

Návrh válcové tlakové nádoby

(uzavřená s vnitřním přetlakem)

Cíl: navrhnout tloušťku stěny válcové nádoby se zadaným vnitřním poloměrem pro daný provozní tlak p_1 a bezpečnost k_k.

Pro hlavní napětí u ní platí: $\sigma_t \geq \sigma_z \geq \sigma_r$

Použijeme Trescovu podmínku plasticity

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{t(r=r_1)} - \sigma_{r(r=r_1)}$$

Dosazením rovnic (7a) a (7b) a integrační konstanty B určené pro okrajovou podmínku vnitřního tlaku p_1 ve tvaru

$$B = p_1 . \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

dostaneme rovnici, z níž lze vyjádřit hledaný vnější poloměr nádoby

$$r_2 = r_1 . \sqrt{\frac{\sigma_{red}}{\sigma_{red} - 2p_1}}$$

Důsledkem uvedené rovnice je, že z daného materiálu ($\sigma_{red} = \dfrac{\sigma_k}{k_k} = \sigma_{dov}$) nelze vyrobit nádobu na tlak vyšší než σ_{dov} /2.

Řešením je

- Kvalitnější materiál s vyšší mezí kluzu
- Autofretáž
- **Víceplášťová nalisovaná nádoba**