Rotačně symetrická deska

je tenkostěnné těleso, jehož střednicová plocha je v nedeformovaném stavu rovinná, kruhová nebo mezikruhová. **Zatížení působí kolmo ke střednicové rovině**, takže při deformaci se střednicová plocha stává rotačně symetrickou zborcenou (nerovinnou) plochou. Základním deformačním parametrem je **průhyb w**, jako pomocný deformační parametr zavádíme **úhel natočení υ**.

Tenzor napětí má oproti obecnému rotačně symetrickému tělesu jedno z hlavních napětí (σ_z) nulové (v důsledku malého rozměru desky ve směru z), takže má tvar:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ \tau_{rz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Klasifikace desek:
Podle relativní tloušťky se desky dělí do několika kategorií:

a) **Tlusté desky**
Průhyby jsou velmi malé, prodloužení radiálních vláken po deformaci zanedbatelné, stejně jako membránová napětí. Ohybová napětí nejsou řádově vyšší než smyková (viz tlusté pruty), je nutno uvažovat **namáhání ohybem i smykem**. Normály ke střednicové ploše se nejen natáčejí, ale i deformují. **Mindlinova** teorie vychází ze zjednodušeného předpokladu, že tyto normály zůstávají přímé, ale nikoli kolmé ke střednicové ploše. V technické praxi málo běžné.

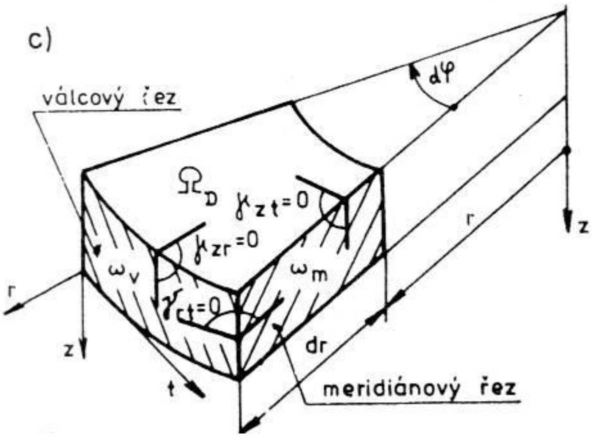
b) **Tenké desky s malými průhyby** (středně tlusté)
U těchto desek jsou smyková napětí zanedbatelná ve srovnání s normálovými ($\tau_{rz} \approx 0$), **namáhání smykem se zanedbává** (obvyklá hranice tloušťky je **h<R/10**). Současně však musí být průhyb natolik malý, aby problém byl geometricky lineární (obvyklá hranice **w<h/4**). **Kirchhoffova teorie desek** předpokládá zachování (kolmosti a lineárnosti) normál ke střednicové ploše), v důsledku malých deformací je změna délek radiálních vláken zanedbatelná a lze **zanedbávat membránová napětí**. Uvažují se pouze **napětí ohybová** (rozložená lineárně po tloušťce s nulou na střednicové ploše). Nejjednodušší a nejčastější v technické praxi.

c) **Tenké desky s velkými průhyby**
Jsou to desky, jejichž tuhost (tloušťka) je ještě nižší než v bodě b). Tloušťku nelze exaktně vymezit, odlišují se velikostí průhybu h/4<w<5h. Velké deformace vyvolávají nutnost nelineárního řešení (geometrická nelinearita), současně je třeba uvažovat i membránová napětí.

d) **Membrány**
Jsou tak tenké, že jejich ohybová tuhost je zanedbatelná, uvažují pouze namáhání na tah (napětí rovnoměrná po tloušťce, membránová napjatost, membránová teorie skořepin uváděná dále se zde však nedá použít, vychází z předpokladu malých deformací). Od předchozích je smluvně oddělujeme opět nikoli tloušťkou, ale rovněž relativní velikostí průhybu w>5h.

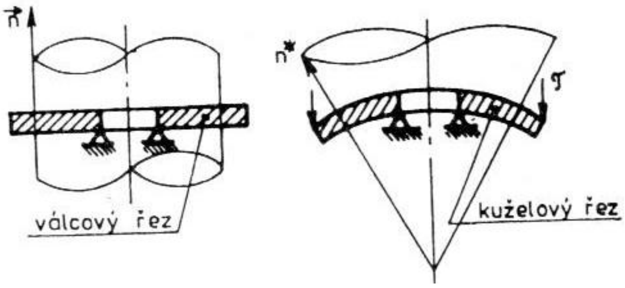
Kirchhoffova teorie tenkých rotačně symetrických desek

Typický elementární prvek a souřadnicový systém:



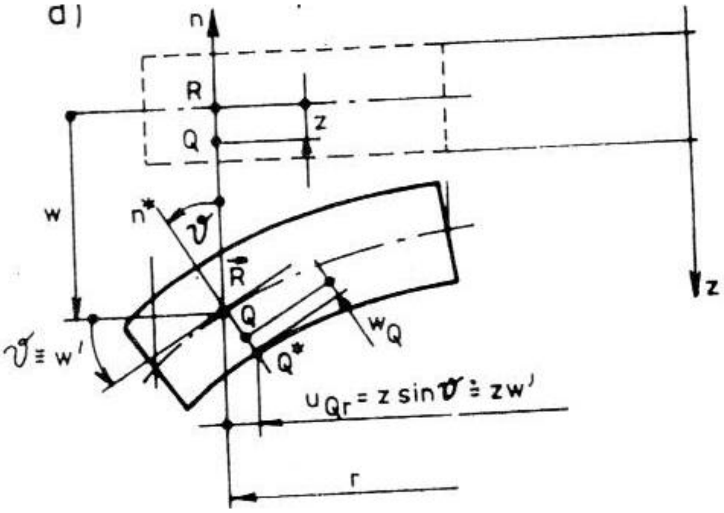
Základní předpoklady

1. Napjatost a deformace rotačně symetrické - tangenciální směr je hlavní (obr. c).
2. Normály ke střednicové ploše k ní zůstávají kolmé i po deformaci (viz obr), válcový řez se mění na kuželový, důsledkem lineární rozložení přetvoření i napětí po tloušťce desky.



3. $\tau_{rz} \approx 0$, smykové napětí je nepodstatné z hlediska mezních stavů (napětí) i deformace, ale není bez něj možná rovnováha elementu.
4. Napětí kolmá ke střednicové ploše (σ_z) jsou zanedbatelná (malá tloušťka desky).
5. Body ve střednicové rovině mají zanedbatelné radiální posuvy ($u_R = 0$), membránová napjatost je nepodstatná.

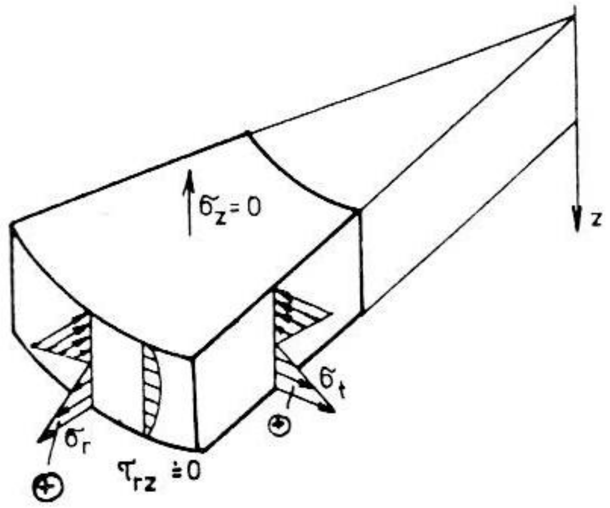
Vztahy mezi deformačními parametry



$$\upsilon = tg\,\upsilon = \frac{dw}{dr} \qquad (1)$$

$$u = -z\upsilon \qquad (2)$$

Napětí na elementárním prvku



Napětí nahradíme jejich **liniovými** silovými a momentovými **výslednicemi** na základě jejich **statické ekvivalence**

$$t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz} dz \tag{3a}$$

$$m_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_r dz \qquad m_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_t dz \tag{3b}$$

Soustava rovnic pro řešení

Rovnice SR:

$$\sum F_z = 0: \quad \frac{dt}{dr} + \frac{t}{r} + p(r) = 0 \tag{4a}$$

$$\sum M_t = 0: \quad m_r - m_t + r\frac{dm_r}{dr} = rt \tag{4b}$$

Geometrické rovnice:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = -z\frac{d\upsilon}{dr} \tag{5a}$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} = -z\frac{\upsilon}{r} \tag{5b}$$

Konstitutivní vztahy:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t\right] \tag{6a}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r\right] \tag{6b}$$

Postup řešení:
Do rovnic statické ekvivalence (3b) dosadíme konstitutivní vztahy (6) a do nich dále geometrické rovnice (5). Po úpravě dostaneme vztahy:

$$m_r = -\frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}\left[\frac{d\upsilon}{dr} + \mu\frac{\upsilon}{r}\right] = -B\left[\frac{d\upsilon}{dr} + \mu\frac{\upsilon}{r}\right] \qquad (7a)$$

$$m_t = -\frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}\left[\frac{\upsilon}{r} + \mu\frac{d\upsilon}{dr}\right] = -B\left[\frac{\upsilon}{r} + \mu\frac{d\upsilon}{dr}\right] \qquad (7b)$$

V těchto rovnicích jsme označili výraz před závorkou jako **ohybovou tuhost desky**

$$B = \frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)} \qquad (8)$$

Vztahy (7) a derivaci výrazu (7a) dosadíme do momentové rovnice SR (4b) a po úpravě dostaneme rovnici SR vyjádřenou pomocí úhlu natočení υ ve tvaru:

$$\frac{d^2\upsilon}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\upsilon}{dr} - \frac{1}{r^2}\upsilon = -\frac{t(r)}{B} \qquad (9)$$

Rovnice (9) má obecný integrál ve tvaru

$$\upsilon(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r} + \upsilon_p \qquad (10)$$

kde υ_p je partikulární integrál DR s pravou stranou, jehož tvar závisí na tvaru funkce t(r) (liniová posouvající síla).

Rovnice (9) se také dá upravit do tvaru

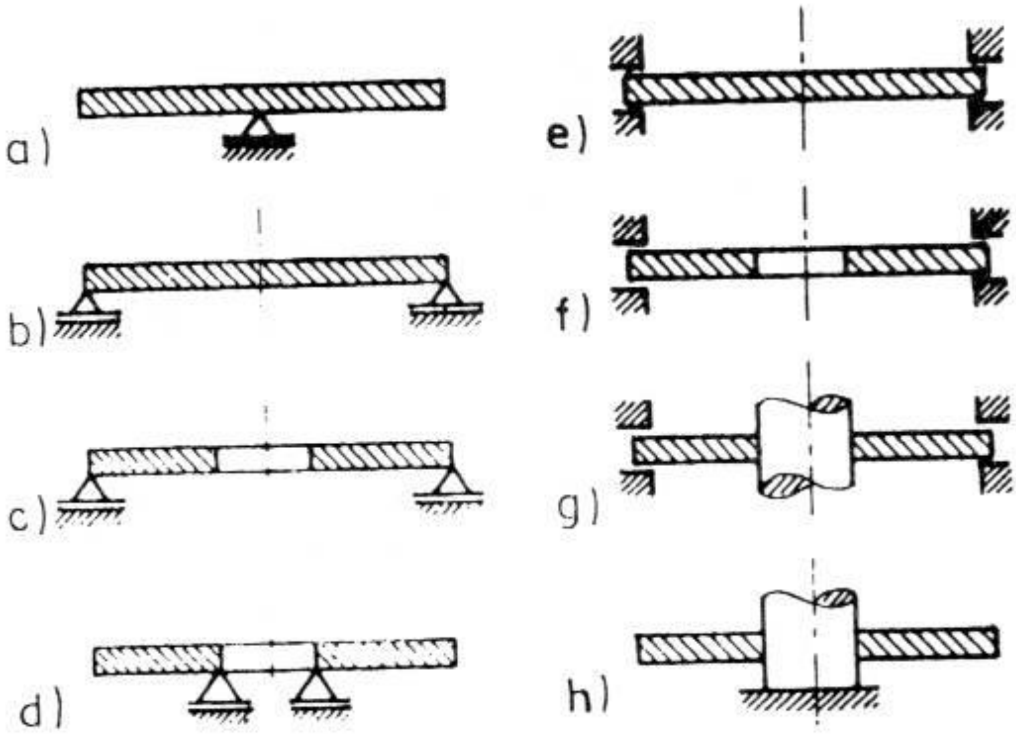
$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\upsilon\right)\right] = -\frac{t(r)}{B} \qquad (11)$$

ve kterém se dá řešit dvojí postupnou integrací.

Na základě rovnice (1) pak další integrací rovnice (10) dostaneme vztah pro průhyb desky w:

$$w(r) = c_1\frac{r^2}{2} + c_2\ln r + w_p + c_3 \qquad (12)$$

Typické případy uložení rotačně symetrické desky



Obr.93

Okrajové podmínky

lze formulovat na základě omezení deformačních parametrů (vazby), vnějšího zatížení (liniové zátěžné momenty), rotační symetrie střednicové plochy (deska bez otvoru), resp. spojitosti a hladkosti střednice na rozhraní úseků.

- Vazby:
  - vetknutí: $w=0$, $\upsilon=0=w'$.
  - podpora (není důležité, zda je rotační nebo obecná, síly ve střednicové rovině zanedbáváme): $w=0$.
- Volný okraj: $m_r=0$
- Při zatížení liniovým momentem na volném okraji je radiální moment v daném místě nenulový, daný hodnotou tohoto zátěžného momentu.
- Deska bez otvoru: pro $r=0$ platí $\upsilon=0 \Rightarrow c_2=0$.
- Je-li na desce nespojitost v zatížení mimo její okraje (podpora, osamělá síla, změna charakteru spojitého zatížení) nebo změna tloušťky, je třeba v tomto místě desku rozdělit na části, řešit každou zvlášť a svázat je další trojicí okrajových podmínek, vycházející z rovnosti průhybů, úhlů natočení a radiálních momentů na rozhraní obou částí.
- Působí -li mimo okraje desky osamělý (liniový) moment, pak je v hodnotách radiálního ohybového momentu skoková změna o hodnotu danou tímto vnějším zátěžným momentem.

Postup řešení přímé úlohy:

Pozn.: *Při odvození jsme nepoužili silovou rovnici SR (4a). Rovnováha do osy z se při řešení použije pro určení liniové posouvající síly, jednodušší však je sestavit tuto rovnici pro konečný prvek desky oddělený válcovým řezem.*

1. Rozdělíme desku na intervaly, v nichž je posouvající síla dána jedinou spojitou a hladkou funkcí a tloušťka desky je konstantní.

2. Pro každý interval uvolníme konečný prvek desky a určíme liniovou posouvající sílu t(r) z rovnice silové rovnováhy do osy z.

3. Následně lze určit $\upsilon(r)$ dvojí integrací rovnice (11) nebo dosazením partikulárního integrálu υ_p do rovnice (10), pak w(r) dostaneme další integrací $\upsilon(r)$.

4. Sestavíme okrajové podmínky (3 pro každý interval) a určíme z nich integrační konstanty.

5. Dosazením $\upsilon(r)$ do rovnic (7) určíme liniové momenty jako funkce poloměru r a vykreslíme jejich průběhy.

6. Z průběhů momentů určíme jejich maxima, tj. nebezpečné body desky. V nich určíme extrémní napětí ze vztahů:
$$\sigma_r = \pm\frac{6m_r}{h^2} \quad \text{a} \quad \sigma_t = \pm\frac{6m_t}{h^2}$$

7. Protože třetí hlavní napětí σ_z je nulové, je redukované napětí při použití Trescovy podmínky plasticity (pro houževnatý materiál) rovno většímu z obou vypočtených napětí. Z něj určíme součinitel bezpečnosti.

8. Dosazením integračních konstant do rovnice (12) (při znalosti w_p) určíme průhyb w(r) a zkontrolujeme, zda jeho maximum splňuje podmínku $w < h/4$.