18. Metoda konečných prvků

Mezi moderními metodami napěťově-deformační analýzy dnes jednoznačně dominuje metoda konečných prvků (dále jen MKP), používaná i v jiných oblastech inženýrských výpočtů (vedení tepla, proudění kapalin, elektřina a magnetismus). V oblasti mechaniky těles MKP umožňuje řešit tyto základní typy úloh:

- Napěťově deformační analýza při statickém, cyklickém i dynamickém zatěžování, včetně nejrůznějších nelineárních úloh.
- Vlastní i vynucené kmitání soustav s tlumením i bez tlumení
- Kontaktní úloha pružnosti (rozložení stykového tlaku)
- Stabilitní problémy (ztráta tvarové stability konstrukcí)
- Analýza stacionárního i nestacionárního vedení tepla a určení teplotní napjatosti (včetně zbytkové).

MKP je založena na zcela jiném principu než analytické metody pružnosti. Zatímco analytické metody jsou založeny na diferenciálním a integrálním počtu, MKP je založena na obecně méně známém počtu variačním, hledá minimum nějakého **funkcionálu**.

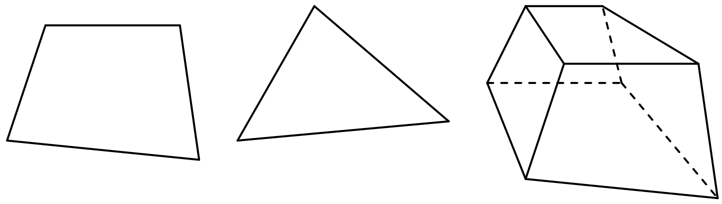
Pozn.:
***Funkce** – zobrazení mezi množinami čísel. Je to tedy matematický termín pro pravidlo, kterým jednoznačně přiřadíme nějaké číselné hodnotě (z definičního oboru funkce) jinou číselnou hodnotu (z oboru funkčních hodnot).*
***Funkcionál** – zobrazení z množiny funkcí do množiny čísel. Je to tedy pravidlo, podle něhož přiřadíme funkci na jejím definičním oboru (nebo jeho části) nějakou číselnou hodnotu. Příkladem je určitý integrál funkce.*

Základním funkcionálem v deformačně-napěťové analýze pružných těles je jejich **energie napjatosti.** Je to práce spotřebovaná na deformaci tělesa, která je v případě pružné deformace vratná, tj. dá se z tělesa při návratu do původního nedeformovaného tvaru zpětně získat (pružiny). V souladu s definicí funkcionálu je to číselná hodnota, přiřazená např. funkcím popisujícím deformační posuvy jednotlivých bodů tělesa (jsou-li posuvy základními neznámými funkcemi, jedná se o nejběžnější, tzv. deformační variantu MKP). Pro libovolný deformovaný tvar tělesa je možné tuto energii napjatosti určit z přetvoření a napětí ve všech bodech tělesa. Při daném zatížení a vazbách k okolí nemůže v praxi těleso zaujmout libovolný tvar, nýbrž jeho deformovaný tvar je jednoznačně definován (s výjimkou některých stabilitních problémů). Z různých možných deformovaných tvarů tělesa je to ten energeticky nejméně náročný, což matematicky vyjadřuje tzv. **věta o minimu kvadratického funkcionálu.** Formuluje obecný přírodní princip, že z možných dějů proběhne ve skutečnosti vždy ten, k jehož uskutečnění je zapotřebí minimální energie (např. ostří nože nebo sekery projde materiálem vždy cestou nejmenšího odporu). Z možných deformovaných tvarů tělesa, odpovídajících definovaným okrajovým podmínkám (zatížení, vazby), se proto realizuje ten, jenž je energeticky nejméně náročný. Příslušným energetickým funkcionálem, jehož minimum určí skutečný deformovaný tvar tělesa, je celková potenciální energie tělesa Π, definovaná jako rozdíl energie napjatosti tělesa W a potenciálu vnějšího zatížení P.

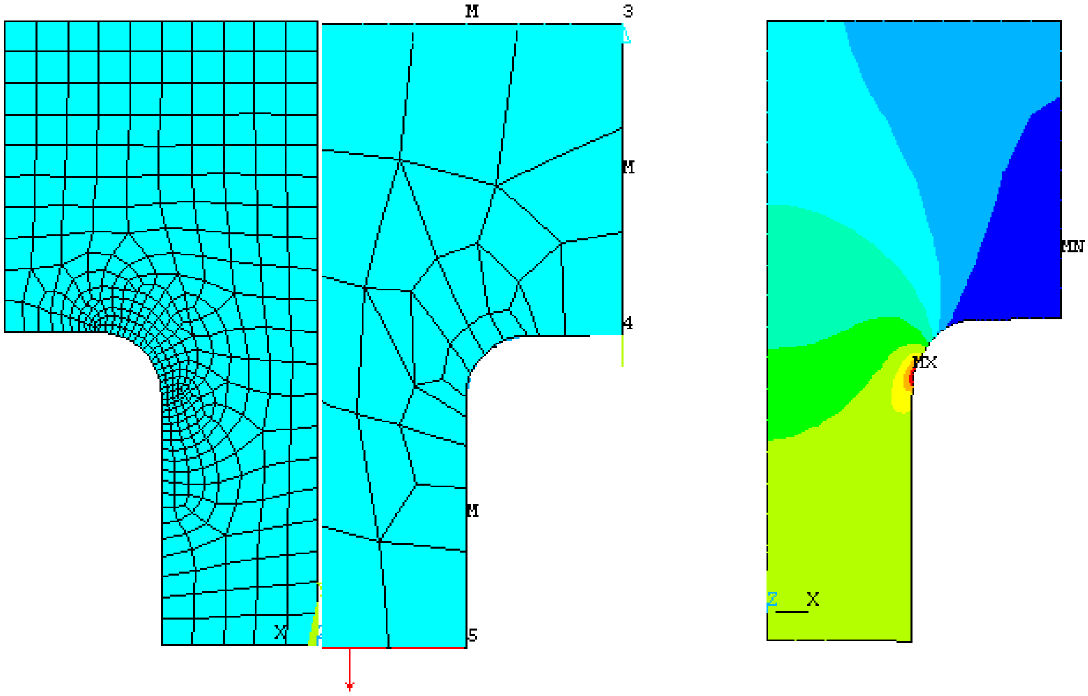
$$\Pi = W - P$$

Celková potenciální energie tělesa je samozřejmě funkcí posuvů jeho jednotlivých bodů. Variační metody matematiky pak umožňují najít minimum funkcionálu, tedy nalézt takový tvar, v němž bude při daných okrajových podmínkách funkcionál Π nejmenší a který se proto ve skutečnosti jako jediný realizuje. Z deformačních posuvů jednotlivých bodů v tomto stavu tělesa pak je možno určit složky tenzoru přetvoření a z nich pomocí konstitutivních vztahů (při známých materiálových charakteristikách) následně složky tenzoru napětí.
Prakticky výpočet probíhá tak, že za pomoci počítačového programu pro přípravu vstupních dat (*preprocesingu*) se vytvoří geometrický model tělesa nebo soustavy, který se spojitě, tj. beze zbytku, rozdělí na prvky konečných rozměrů. Základním prvkem v rovině je čtyřúhelník, v prostoru pak šestistěn (anglicky brick = kostka, cihla), někdy je nutné použít zjednodušené tvary prvku (trojúhelník,

čtyřstěn). Rohy těchto prvků, případně některé další význačné body, jsou uzlovými body, v nichž se



určují neznámé hodnoty posuvů, strany (hrany) prvků vytvářejí síť, jejíž hustota je rozhodující pro přesnost výsledků. Hrany prvků jsou obvykle přímé, ale pomocí kvadratických prvků lze realizovat i zakřivené. Kvadratické prvky mají kromě rohových uzlů ještě další uzly uprostřed stran (resp. hran), čímž dostáváme v rovině prvek osmiuzlový a v prostoru prvek (brick) dvacetiuzlový. Tyto prvky lépe vystihují lokální koncentraci napětí i při použití hrubé sítě (viz následující obrázky a tabulka).

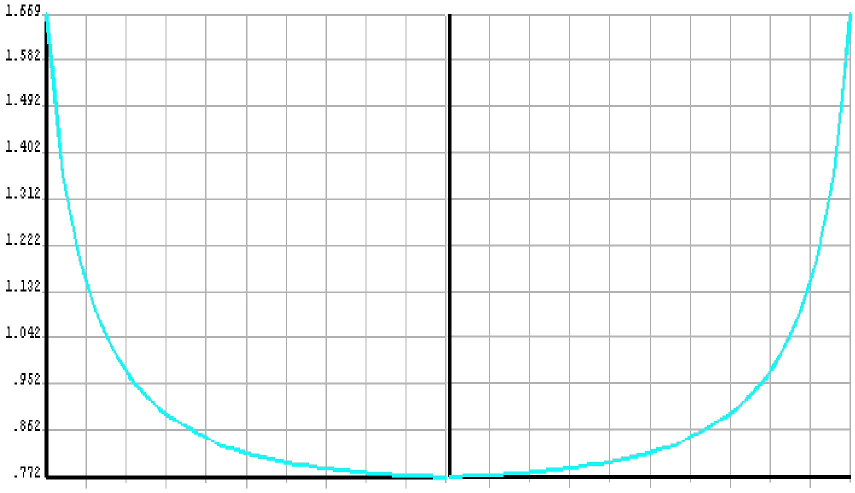


Typ prvku	Hustota sítě	vypočtené max. napětí [MPa]
lineární - čtyřuzlový	hrubá	1,28
lineární – čtyřuzlový	jemná	1,67
kvadratický - osmiuzlový	hrubá	1,59
kvadratický - osmiuzlový	jemná	1,67

Tabulka uvádí hodnoty maximálního napětí v kořeni vrubu (osazení hřídele) při tahovém namáhání, vypočtené s různými typy prvků pro hrubou a jemnou síť podle obrázku. Vpravo je barevně znázorněno rozložení největšího hlavního napětí v prutu, červená barva odpovídá nejvyšší hodnotě napětí. Napětí ve směru podélné osy hřídele má ve vrubu nominální hodnotu 1 MPa, maximální 1,676 MPa. Z tabulky je zřejmé, že v případě jemné sítě dávají oba typy prvků správné výsledky, pro hrubou síť je při použití lineárních prvků chyba mnohem větší, než při použití prvků kvadratických.

Bodů, ve kterých určujeme posuvy, nemůže být v praxi samozřejmě nekonečně mnoho. Hustotu sítě těchto bodů volí výpočtář na základě své zkušenosti. V případě příliš husté sítě trvá řešení příliš dlouho, naopak příliš řídká síť může vést k podhodnocení napětí, jestliže u něj existuje výrazný lokální

extrém (např. vrub). Současné programy zvládají více nebo méně kvalitně automatickou tvorbu sítě, ale téměř vždy tato síť klade výrazně vyšší nároky na výpočtový čas a paměť počítače, než když ji vytváří zkušený výpočtář. U trojrozměrné úlohy představuje každý uzlový bod sítě tři neznámé parametry, a to hodnoty jeho posuvů ve třech směrech. Současné počítače řeší běžně v rozumných výpočtových časech úlohy o desetitisících až statisících neznámých parametrech.
Všem prvkům je třeba zadat konstitutivní parametry materiálu (pro izotropní lineárně elastický materiál modul pružnosti a Poissonovo číslo). Dále se definují okrajové podmínky (vazby, zatížení), které pro statickou úlohu musí zajistit jednoznačnou polohu tělesa v prostoru. Zatížení může být např. silové, deformační nebo i teplotní (buď explicitně zadané nebo získané předchozím řešením úlohy vedení tepla ve vyšetřovaném tělese).
Následuje spuštění řešiče (*solveru*), což je program, který na základě vstupních hodnot sestaví a vyřeší soustavu rovnic s neznámými posuvy a z nich spočítá přetvoření a napětí. Bez zadání všech vstupních údajů nelze řešič spustit, takže metodou konečných prvků **není možné řešit nepřímé úlohy**.
Poslední částí programového systému je *postprocesing*, neboli program pro zpracování výsledků. Umožňuje v nejrůznějších podobách znázornit rozložení kterýchkoli neznámých parametrů v tělese nebo zvolené podoblasti, stejně jako počítat redukovaná napětí nebo jiné hodnoty potřebné pro posuzování mezních stavů (např. rozložení normálového napětí po průřezu prutu na následujícím obrázku).



Bodů, ve kterých určujeme posuvy, nemůže být v praxi samozřejmě nekonečně mnoho. Hustotu sítě těchto bodů volí výpočtář na základě své zkušenosti. V případě příliš husté sítě trvá řešení příliš dlouho, naopak příliš řídká síť může vést k podhodnocení napětí, jestliže u něj existuje výrazný lokální extrém. U trojrozměrné úlohy představuje každý uzlový bod sítě tři neznámé parametry, a to hodnoty jeho posuvů ve třech směrech. Současné počítače řeší běžně v rozumných výpočtových časech úlohy o desetitisících až statisících neznámých parametrech.

Důležitým krokem ve výpočtovém modelování s využitím MKP je **volba typu prvku**. Řadu praktických úloh lze řešit zjednodušeně, bez plného trojrozměrného modelu. Týká se to například úloh **rovinných** nebo **rotačně symetrických**. U nich používáme k vytvoření modelu MKP čtyřúhelníky, příp. trojúhelníky, jejichž vrcholy představují uzlové body, v nichž se určují hodnoty obou složek posuvů. Těmito prvky vyplňujeme pouze rovinu, tloušťka prvku je jednotková nebo se dá zvolit jiná konstantní hodnota. Posuvy, které je třeba znát v libovolném bodě tělesa, se mezi uzlovými body nahrazují nějakou funkcí (tzv. bázovou). Jsou-li bázové funkce lineární, je průběh posuvů na hraně prvku aproximován přímkou. Protože přetvoření jsou dána derivací posuvů (např. vztahem $\varepsilon_x=du/dx$), znamená to, že hodnota přetvoření a v důsledku Hookova zákona i napětí je na kterékoli hraně prvku a tedy i na celém prvku konstantní. Je-li proto rozměr prvku a gradient napětí v oblasti velký, nedostaneme vůbec extrémní hodnoty, ale pouze průměry pro jednotlivé prvky. Je proto třeba volit rozměry prvků natolik malé, aby rozdíly napětí na jeho ploše byly zanedbatelné. Z toho plyne, že čím

větší je v dané oblasti gradient napětí (změna hodnoty napětí v závislosti na změně polohy), tím hustší zde musí být konečnoprvková síť.
Při zpracování výsledků nejsou prezentovány přímo vypočítané hodnoty, ale průběhy jsou matematickými metodami upraveny do hladkých křivek. Právě rozdíl mezi vypočítanými a vyhlazenými průběhy napětí může být **měřítkem kvality konečnoprvkové sítě**. Převedením tohoto rozdílu na rozdíl v energiích napjatosti (závislých na kvadrátu napětí) se zbavíme vlivu znaménka v rozdílu napětí. **Procentuální energetická chyba**, daná poměrem celkové energetické chyby sečtené na všech prvcích sítě k celkové energii napjatosti modelu, je parametrem umožňujícím základní posouzení, zda použitá konečnoprvková síť byla dostatečně hustá.
Pro přesnější zjištění extrémních hodnot napětí se často používá i bázových funkcí kvadratických, které průběh posuvů na hraně prvku nahradí kvadratickou funkcí (parabolou). Derivace paraboly je funkce lineární, takže průběh přetvoření a napětí na prvku již není konstantní, ale lineární (na hraně přímkový). Tyto prvky lépe vystihnou lokální extrémy. Pro definici paraboly ovšem potřebují třetí uzlový bod na hraně prvku, takže čtyřúhelníkový prvek tohoto typu obsahuje osm uzlů, kromě rohových obvykle umístěných ještě uprostřed jednotlivých hran. Pokud popíšeme funkcí stejného řádu (v daném případě kvadratickou) i geometrii prvku (zakřivené hrany prvku, možnost výstižnějšího geometrického popisu zakřivených tvarů), nazýváme takový prvek **izoparametrickým**. Tuto podmínku splňuje převážná většina prakticky používaných prvků.
Všechny rovinné prvky lze použít i pro řešení úloh **rotačně symetrických**. Pak rovinnými prvky vyplňujeme pouze meridiánový řez, jehož rotací kolem osy vznikne rotačně symetrické těleso. Protože formulace některých geometrických rovnic je odlišná oproti rovinné úloze, je třeba pomocí nějakého programového přepínače zapnout řešení v rotační symetrii. Při stejné síti je řešení co do nároků na čas a paměť stejné jako rovinné. Ale pozor, výsledná **napjatost** i hodnoty napětí a deformací se od **rovinné úlohy diametrálně liší**.
Pokud je jakýmkoli způsobem porušena rovinnost úlohy nebo její rotační symetrie (z hlediska vstupních hodnot úlohy PP, tedy nejen geometrie, ale i materiálu, vazeb a zatížení), je třeba provádět 3D řešení (v prostoru). Základním prvkem pro prostorové úlohy je šestistěn, případně pětistěn nebo čtyřstěn. Čtyřstěn je nejvhodnější pro automatické generování sítě, která však obvykle vede k větším nárokům na paměť i výpočtový čas. Síť ze šestistěnů musí obvykle výpočtář vytvářet mapovaně, tzn. podrobně volit a zadávat způsob rozdělení objemu tělesa na jednotlivé prvky. Základní prostorové prvky s lineárními bázovými funkcemi jsou **osmiuzlové** (uzly v rozích hranolu), šestistěn s kvadratickými bázovými funkcemi má kromě osmi rohových uzlů ještě 12 uzlů uprostřed hran, takže se jedná o prvek **dvacetiuzlový**.
Pro tenkostěnné konstrukce se pro zjednodušení výpočtu používají speciální typy prvků. Protože z důvodů matematické stability řešení nesmějí být prvky příliš nepravidelné (protáhlé nebo zkosené, tj. s vysokým poměrem jednotlivých stran nebo úhlů), musely by se modely takových obvykle rozměrných konstrukcí vytvářet z vysokého počtu velmi malých prvků a byly by pak výpočtově těžko zvládnutelné. Pro dlouhá štíhlá tělesa splňující s dostatečnou přesností prutové předpoklady je možno použít **prvků prutových**, které jsou pouze jednorozměrné obvykle se dvěma uzly. Místo vyplňování objemu prutu trojrozměrnými prvky (nebo plochy v rovině prvky dvojrozměrnými) je celý prut vytvořen z jednoho nebo několika málo prutových prvků. Jejich formulace vychází z analytické teorie prutů a podléhají proto stejným omezením jako analytické výpočty. Obvykle ani neumožňují všechny základní typy zatížení, ale pouze tah (tlak), případně navíc ohyb. Je na zkušenosti výpočtáře, aby posoudil, pro které části konstrukce je použití těchto prvků přijatelné. Při tlakovém namáhání tenkostěnné konstrukce záleží na matematické formulaci prvku, zda je schopen postihnout **ztrátu vzpěrné stability**. Ta je důležitým problémem při používání MKP, protože idealizované matematické modely jsou schopny setrvat v labilní rovnováze bez ztráty vzpěrné stability i v situacích, kdy je v praxi takové chování vyloučeno.
Pro tenkostěnné konstrukce se podobně používají speciální **skořepinové** nebo **deskostěnové** prvky, jejichž matematická formulace vychází zase z analytické teorie skořepin, stěn nebo desek, tedy podobně jako u prutů z jistých předpokladů o deformacích a rozložení napětí po relativně malé tloušťce tělesa. Omezení jsou opět stejná jako u analytických teorií pro tato tělesa, tyto prvky však na rozdíl od analytických teorií umožňují řešit i obecnější úlohy, nesplňující podmínky rotační symetrie.
Dále existují různé **speciální typy** prvků. Jako příklady lze uvést prvky **kontaktní**, umožňující řešit silové působení a deformace ve styku dvou těles, prvky **teplotní**, umožňující řešit vedení tepla v tělese

a následně ze znalosti rozložení teploty také **teplotní napjatost**, nebo prvky **trhlinové**, umožňující řešit vysokou koncentraci napětí na čele trhliny, potřebnou pro posouzení rizika jejího šíření metodami lomové mechaniky.

Přehled základních prvků podle tvaru:

- 2D prvky (rovinné, resp. rot. symetrické)
- 3D prvky (prostorové)
- prutové prvky (pouze pro tah-tlak nebo i pro ohyb, příp. krut)
- skořepinové prvky
- deskostěnové prvky
- speciální prvky (kontaktní, trhlinové, se speciálními konstitutivními vztahy apod.)

Další rozdělení prvků je **podle materiálových vlastností** (konstitutivních vztahů). Základní typy prvků samozřejmě vycházejí z předpokladu **lineárně elastického izotropního** materiálu. U některých komerčních programových systémů však umožňují i modelování komplikovanějšího chování materiálu, jejich praktické používání však již vyžaduje podrobné pochopení matematického popisu jejich vlastností (konstitutivních vztahů) a zůstává vyhrazeno školeným specialistům.

Základní typy materiálového chování jsou následující:

- **anizotropní** (elastické parametry jsou směrově závislé, příkladem jsou monokrystaly, dřevo, vláknové kompozity nebo vrstvené materiály)
- **pružně plastické** (ocel po překročení meze kluzu) s různým charakterem chování nad mezí kluzu (ideálně pružně plastický materiál, různé typy **zpevnění**),
- **nelineárně elastické** (deformace jsou vratné, ale nelineárně závislé na napětí),
- **hyperelastické** (vykazující pružné deformace řádu desítek až stovek procent, rovněž nelineární),
- **viskoelastické** (deformace je i časově závislá, vykazují tečení, resp. relaxaci napětí),
- **viskoplastické** (jejich plastická deformace je časově závislá) atd.

Nelineární chování řeší programové systémy MKP zjednodušeně řečeno nejčastěji tím způsobem, že rozloží zatížení tělesa na řadu zátěžných kroků tak malých, aby chování v daném rozmězí bylo možné s dostatečnou přesností linearizovat (například nelineární závislost mezi napětím a přetvořením nahradíme řadou přímek). Zatížení se přidává v jednotlivých krocích, deformace a napjatost se počítá lineárně, ale další přírůstek zatížení se přidává na těleso (konečnoprvkovou síť) již zdeformované, případně se změněnými materiálovými vlastnostmi. Takto se postupuje až do dosažení konečné hodnoty zatížení. Každý přírůstkový krok zatížení přitom vyžaduje několik iterací a **doba výpočtu** bývá proto **řádově vyšší než u úloh lineárních**. Připomínáme, že mezi nelineární úlohy patří kromě úloh s geometrickou (velké deformace) nebo materiálovou nelinearitou i úlohy kontaktní a úlohy spojené se ztrátou tvarové stability.