Back to problem

Rozbor:

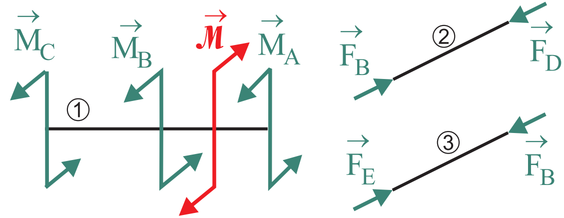
Soustava 3 vázaných přímých prutů, konstantního kruhového průřezu. Má být zajištěna lineárnost úlohy, tj. nesmí být překročen mezní stav pružnosti.

lineárnost úlohy

Úplné uvolnění:

statický rozbor

Protože je prut 1 vázán pomocí dvou shodných táhel, můžeme si představit jejich působení na prut 1 jako silovou dvojici o velikosti momentu $M_B = F_B D$, kde $\vec{F}_B$ je síla, kterou působí těleso 1 na táhla.

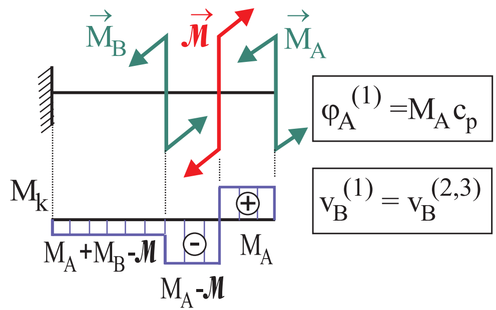


Statický rozbor: $\mu = 5 \qquad \nu = 3$
(1x soustava silových dvojic v rovnoběžných rovinách a 2x soustava sil na jedné nositelce)
$s = \mu - \nu = 2 \Rightarrow$ úloha 2x staticky neurčitá.

Částečné uvolnění:

Uvolníme např. prut 1

1. od základního tělesa v místě vazby pružinou a do bodu A zavedeme vazbovou deformační podmínku vyjadřující shodné zkroucení prutu i pružiny ($\varphi_A^{(1)} = M_A c_p$)
2. od táhel, kde deformační podmínka zajistí, že táhla i prut zůstanou i po deformaci spojená ($v_B^{(1)} = v_B^{(2,3)}$)



Vyjádření deformačních podmínek a výpočet sil v prutech:

Castiglianova věta

$$\varphi_A^{(1)} = \frac{\partial W^{(1)}}{\partial M_A} = \int\limits_\gamma \frac{M_k}{GJ_p^{(1)}} \frac{\partial M_k}{\partial M_A} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{GJ_p^{(1)}} \left\{ \int\limits_0^{b/2} M_A \cdot 1 \mathrm{d}x + \int\limits_0^{b/2} (M_A - \mathcal{M}) \cdot 1 \mathrm{d}x + \int\limits_0^{a} (M_A + M_B - \mathcal{M}) \cdot 1 \mathrm{d}x \right\} = -M_A \cdot c_p$$

$$v_B^{(1)} = \frac{\partial W^{(1)}}{\partial F_B} = \int\limits_\gamma \frac{M_k}{GJ_p^{(1)}} \frac{\partial M_k}{\partial F_B} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{GJ_p^{(1)}} \left\{ \int\limits_0^{b/2} M_A \cdot 0 \mathrm{d}x + \int\limits_0^{b/2} (M_A - \mathcal{M}) \cdot 0 \mathrm{d}x + \int\limits_0^{a} (M_A + F_B D - \mathcal{M}) \cdot D \mathrm{d}x \right\} =$$

$$= v_B^{(2,3)} = -\frac{F_B l}{ES^{(2)}}$$

Máme 5 rovnic pro 5 neznámých, můžeme spočítat M_A, M_B, M_C, F_D, F_E (jsou funkcí $\mathcal{M}$).

Řešení deformačních podmínek:

$J_p^{(1)} = \frac{\pi D^4}{32}, \qquad S^{(2)} = \frac{\pi d^2}{4},$

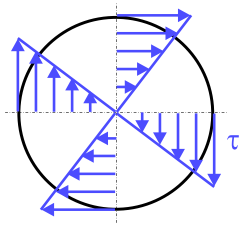
$$M_A \frac{b}{2} + M_A \frac{b}{2} - M \frac{b}{2} - \mathcal{M} a + M_B a + M_A c_p G J_p^{(1)} = 0 \Rightarrow M_A = \frac{\mathcal{M}(a + b/2) - M_B a}{b + a + c_p G J_p^{(1)}}$$

$$M_A a - \mathcal{M} a + M_B a + \frac{M_B l G J_p^{(1)}}{D^2 E S^{(2)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = 0,65 \mathcal{M}, \qquad M_A = 0,29 \mathcal{M}$$

Kontrola lineárnosti úlohy

lineárnost úlohy

1. **Prut 1**



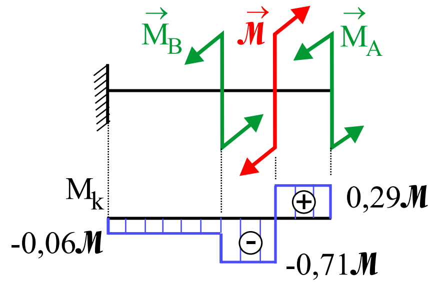
je zatížen prostým krutem. Aby nebyl překročen mezní stav pružnosti, musí platit $\tau_K > \tau_{\max}$, kde τ_K je smykové napětí na mezi kluzu a podle podmínky plasticity $\max\tau$ má velikost $\tau_K = \frac{\sigma_K}{2}$. U prostého krutu je průběh napětí po průřezu lineární, extrémní hodnota je na obvodu.

krut

$\max\tau$

Dosadíme spočítané stykové silové dvojice do průběhu M_k a určíme $M_{k\,\max} = f(\mathcal{M})$.

napětí



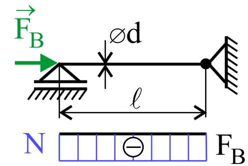
$$\tau_{\max} = \frac{|M_{k\,\max}|}{W_k} = \frac{0,71\mathcal{M}}{\frac{\pi D^3}{16}}$$

$$\tau_{\max} = \tau_K \implies \mathcal{M}^{(1)} = \frac{\tau_K \pi D^3}{16 \cdot 0,71} = 1493,4 \text{ Nm}$$

Spočítali jsme maximální silovou dvojici $\mathcal{M}$, kterou můžeme zatížit prut 1, aby v tomto prutu nebyl překročen mezní stav pružnosti.

2. **Táhla 2 a 3**

a) **mezní stav pružnosti**



Táhla jsou zatížena tlakem. Průběh napětí je po průřezu konstantní:

$$\sigma = \frac{4F_B}{\pi d^2}.$$

Podmínka mezního stavu pružnosti

$$\sigma_K = \sigma_{\max} = \frac{4F_B}{\pi d^2} = \frac{4\frac{M_B}{D}}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,65 \cdot \mathcal{M}}{\pi D d^2} \implies \mathcal{M}^{(2)} = \frac{\sigma_K \pi D d^2}{4 \cdot 0,65} = 5799,9\ \mathrm{Nm}$$

b) **mezní stav vzpěrné stability** $F_{kr} = \alpha^2 \dfrac{EJ_2}{l^2} = \pi^2 \dfrac{E\frac{\pi d^4}{64}}{l^2}$ vzpěr

Podmínka mezního stavu vzpěrné stability

$$F_B = F_{kr} = \pi^2 \frac{E\frac{\pi d^4}{64}}{l^2}$$

Působení táhel na prut 1 nahrazuje silová dvojice $M_B = F_B D$, kam dosadíme spočítanou stykovou silovou dvojici $M_B = 0,65\mathcal{M}$:

$$M_B = F_B D = \pi^2 D \frac{E\pi d^4}{64 l^2} = 0,65\mathcal{M} \implies \mathcal{M}^{(3)} = \frac{E\pi^3 d^4 D}{0,65 \cdot 64 l^2} = 1118\ \mathrm{Nm}$$

Spočítali jsme pro velikost silové dvojice $\mathcal{M}$ tři hodnoty, ale protože lineárnost nesmí být porušena v celé soustavě těles, můžeme tuto soustavu zatížit nejmenší z těchto silových dvojic, tedy $\min\left\{\mathcal{M}^{(1)}, \mathcal{M}^{(2)}, \mathcal{M}^{(3)}\right\} = 1118\,\mathrm{Nm}$.