VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

APLIKACE METODY HRANIČNÍCH PRVKŮ NA NĚKTERÉ PROBLÉMY TRHLINY V BLÍZKOSTI BI-MATERIÁLOVÉHO ROZHRANÍ

AN APLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO THE PROBLEM OF THE CRACK IN THE VICINITY OF THE BI-MATERIAL INTERFACE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE Bc. STANISLAV SEDLÁČEK

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Ing. TOMÁŠ PROFANT, Ph.D.

SUPERVISOR

BRNO 2012

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Stanislav Sedláček

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Aplikace metody hraničních prvků na některé problémy trhliny v blízkosti bi-materiálového rozhraní

v anglickém jazyce:

An aplication of the boundary element method to the problem of the crack in the vicinity of the bi-material interface

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Metoda hraničních prvků je jeden z mnoha numerických nástrojů nabízející řešení některých úloh mechaniky. Nejdůležitější přednost metody hraničních prvků tkví v její schopnosti interpretace výsledků bez nutnosti diskretizace celé řešené oblasti, ale pouze její hranice. Tato vlastnost je značnou výhodou zejména u singulárních úloh, kde ostatní metody (např. metoda konenčých prvků) jsou schopny dosáhnout adekvátních výsledků jen za cenu vysokého stupně diskretizace dané oblasti. Cílem uchazeče bude aplikovat metodu hraničních prvků na úlohu rovinné lomové mechaniky, testovat přesnost dosažených výsledků v závislost na typu a stupni diskretizace hranice zkoumané oblasti a srovnat dosažené výsledky s výsledky získaných metodou konečných prvků.

Cíle diplomové práce:

1. Seznámení se s teoretickými základy MHP.
2. Aplikace MHP na rovinný problém lomové mechaniky.

Seznam odborné literatury:

Valášek, M., Bauma, V., Šika, Z., Mechanika B (skripta), Praha, ČVUT, 2004
Katsikadelis, J. T., Boundary Elements: Theory and Applications
Gaul L., Kogl M., Wagner M., boundary element methods for Engineers and Scientists, 2002

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 29.11.2010

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc. Ředitel ústavu	prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c. Děkan fakulty

ABSTRAKT

U mnoha inženýrských konstrukcí lze pozorovat tvarové a jiné změny, způsobující koncentraci napětí. V blízkosti koncentrátorů napětí je zvýšená pravděpodobnost vzniku trhlin. Problémy trhlin lze v dnešní době řešit pouze s využitím odpovídajících numerických nástrojů. Metoda hraničních prvků je jeden z mnoha numerických nástrojů nabízející řešení některých úloh mechaniky a pružnosti a pevnosti. Cílem diplomové práce je formulovat metodu hraničních prvků pro rovinný problém lineární elastické pružnosti pro izotropní materiál obsahující různé typy koncentrátorů napětí.

KLÍČOVÁ SLOVA

Metoda hraničních prvků, Fundamentální řešení, Trhlina

ABSTRACT

There are many shape and other changes in the engineering constructions. These changes cause the concentration of the stress. There is a higher probability of the crack initiation in the vicinity of these stress concentrators. The problems of the crack can be solved nowadays only with help of sufficient numeric tools. The Boundary Element Method is one of the many numerical tools which offer the solution of some problems of the mechanics. The goal of this diploma thesis is to formulate boundary element method for the plane problem of the linear elasticity for izotropic material with different types of the stress concentrators.

KEYWORDS

Boundary Element Method, Fundamental solution, Crack

SEDLÁČEK, Stanislav *Aplikace metody hraničních prvků na některé problémy trhliny v blízkosti bi-materiálového rozhraní*: diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, 2012. 61 s. Vedoucí práce byl Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Aplikace metody hraničních prvků na některé problémy trhliny v blízkosti bi-materiálového rozhraní* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Tomáše Profanta, PhD. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Stanislav Sedláček

Děkuji svému školiteli doc. Ing. Tomáši Profantovi, PhD. za věnovaný čas, ochotu a rady, které mi poskytl v průběhu tvorby této diplomové práce.

Stanislav Sedláček

OBSAH

ÚVOD

U mnoha inženýrských konstrukcí lze pozorovat tvarové a jiné změny, způsobené koncentrací napětí. V blízkosti koncentrátorů napětí je zvýšená pravděpodobnost vzniku trhlin. Šířením trhliny může dojít až k lomu tělesa, proto je to nezanedbatelný aspekt, na který musíme brát zřetel při navrhování součástí. Nukleací, iniciací a šířením trhlin v materiálu se zabývá vědní disciplína - lomová mechanika. Ta popisuje napětí před čelem trhliny pomocí jednoho nebo více parametrů. Jedním z těchto parametrů je materiálová charakteristika faktor intenzity napětí K , zavedená G. R. Irwinem. Faktor intenzity napětí určuje amplitudu průběhu napětí v okolí čela trhliny. Jeho hodnota tedy zcela definuje podmínky u čela trhliny. Problémy a úlohy lomové mechaniky lze v dnešní době řešit pouze s využitím odpovídajících numerických nástrojů. Jedním z nich je např. metoda hraničních prvků.

Metoda hraničních prvků je jeden z mnoha numerických nástrojů nabízející řešení některých úloh mechaniky a pružnosti a pevnosti. Na rozdíl od metod postavených na diskretizaci celé zkoumané oblasti (např. metoda konečných prvků), je nejdůležitější předností metody hraničních prvků její schopnost interpretace výsledků pouze diskretizací její hranice. Tato vlastnost je značnou výhodou zejména u problémů popisujících napjatost v okolí koncentrátorů typu otvoru, ostrého vrubu nebo trhliny. Konvenční hraniční prvky odvozené ze znalosti Greenovy funkce pro nekonečnou oblast lze rozšířit pomocí analytických metod stojících např. na teorii komplexních potenciálů o fundamentální řešení problému poloroviny, rozhraní dvou materiálů, trhliny nebo inkluze.

Cílem předkládané práce je formulovat metodu hraničních prvků pro rovinný problém lineární elastické pružnosti pro izotropní materiál obsahující různé typy koncentrátorů napětí a následně na rovinný problém lomové mechaniky. Bude studován jak vliv diskretizace vnější hranice oblasti, tak diskretizace hranice daných koncentrátorů na přesnost řešení, příp. budou studovány možnosti jejich zavedení přímo do fundamentálního řešení, včetně vlivu rozhraní s jiným materiálem.

1 PROBLÉMOVÁ SITUACE

Tato úvodní kapitola se zabývá vytvořením systému podstatných veličin, analýzou problémové situace a formulací problému. Jde o zvážení a rozvržení postupu řešení problému, rozhodnutí o tom, co je pro řešení problému důležité a co je možné zanedbat. Více o této problematice lze nalézt v [2]. V mnoha inženýrských konstrukcích je možné pozorovat tvarové a jiné změny způsobené koncentrací napětí. V blízkosti koncentrátorů je zvýšená pravděpodobnost vzniku a šíření trhlin. Touto problematikou se zabývá vědní disciplína - lomová mechanika. Řešení problémů lomové mechaniky se neobejde bez adekvátních numerických nástrojů.

Analýza problémové situace

V [2] je řečeno, že analýza problémové situace by měla vést k vytvoření dostatečné poznatkové, názorové a zkušenostní báze pro formulaci problému. V souvislosti s touto diplomovou prací tvoří tuto bázi především zdroje literatury.

Formulace problému

Podle definice problému dle [2] je problém subjektem naformulované to podstatné z problémové situace, co vyžaduje řešení. Na základě popisu a analýzy problémové situace lze definovat problém: Využití metody hraničních prvků (MHP) při deformačně-napěťové analýze objektu obsahující koncentrátor napětí.

Formulace cílů problému

V souvislosti s formulací problému byly definovány cíle práce jako:

- Seznámení se s teoretickými základy MHP
- Aplikace metody hraničních prvků na rovinný problém lomové mechaniky

Dílčím cílem aplikace MHP na rovinný problém lomové mechaniky je aplikace MHP na rovinný problém lineární elastické pružnosti pro izotropní materiál obsahující různé typy koncentrátorů napětí

1.1 Systém podstatných veličin

Vytvářením systému podstatných veličin je vytvářena množina všeho podstatného, co souvisí s řešením problému na příslušném objektu. Systém podstatných veličin vytváří na objektu soustavu několika podmnožin. Více v [2]

Objektem je v rámci práce těleso, popř. část tělesa obsahující koncentrátor napětí.

Podmnožina S1 - geometrie a topologie objektu

Tato podmnožina obsahuje objektové veličiny charakterizující strukturu, topologii a geometrii objektu. Podstatnými veličinami jsou rozměry hranice objektu a dále poloha a tvar koncentrátoru

Podmnožina S2 - vazby objektu s okolím

Tato podmnožina obsahuje vazbové veličiny popisující podstatné vazby s okolím,na nichž probíhají interakce. V tomto případě jsou podstatné kinematické vazby popisující uložení objektu.

Podmnožina S3 - aktivace entity s okolím

V práci bude tato podmnožina omezena na silové zatížení objektu. Aktivací objektu může být deformace či vznik napjatosti.

S4 - ovlivňování objektu

Tato podmnožina obsahuje ovlivňující veličiny působící z okolí na objekt a ovlivňující na něm probíhající procesy. Vliv okolí na objekt je vytvářen pomocí vazeb.

S5 - vlastnosti objektu

Do této podmnožiny patří geometrické, strukturní, fyzikální, mechanické a jiné veličiny vyjadřující vlastnosti objektu. Z tohoto hlediska jsou podstatné materiálové konstanty izotropního, homogenního a lineárně pružného materiálu E - Youngův modul pružnosti v tahu a Poissonova konstanta ν.

S6 - procesy a stavy

Prázdná množina, neboť se zabýváme problémem na úrovni mechaniky kontinua.

S7 - projevy objektu

Při zatížení tělesa je jeho projev dán vektorem posuvu, tenzorem přetvoření a tenzorem napětí všech bodů objektu.

S8 - důsledky projevů

Důsledkem projevů může být vznik a šíření trhliny a dosažení mezního stavu lomu.

2 VÝVOJ METODY HRANIČNÍCH PRVKŮ

První zmínky o metodě hraničních prvků sahají do 19. století. George Green [3] se jako jeden z prvních zabýval metodami pro řešení problémů matematické fyziky. V roce 1828 formuloval integrální vyjádření řešení Laplaceovy rovnice pro Dirichletův a Neumannův problém zavedením tzv. Greenovy funkce. Enrico Betti [4] prezentoval v roce 1872 zobecněnou metodu pro integraci rovnic pružnosti a odvození jejich řešení v integrální formě. Toto zobecnění je v podstatě rozšíření Greenova přístupu na Navierovy rovnice pružnosti. V roce 1885 Carlo Somigliana [5] použil Bettiho reciproční teorém k odvození integrálního vyjádření řešení pro problém pružnosti, včetně výrazů pro objemové síly, hraniční posuvy a hraniční pole napětí.
Za zakladatele metody hraničních prvků však bývá často považován švédský matematik Erik Ivar Fredholm [6]. Na počátku 20. století byl prvním člověkem, který použil singulární hraniční integrální rovnice za účelem stanovení neznámých hraničních veličin v teorii potenciálů. Ve skutečnosti byla metoda vymyšlena jako matematický nástroj pro určení nezbytných okrajových podmínek pro daný problém matematické fyziky a ne pro řešení problémů. To je pochopitelné, neboť nalezení analytického řešení pro odvození singulárních integrálních rovnic bylo a stále je velkým problémem. Ve výše zmíněných metodách mají hraniční veličiny přímý fyzikální nebo geometrický význam. Z tohoto důvodu bývají označovány jako přímé metody hraničních prvků. Kromě těchto byly odvozeny i tzv. nepřímé metody, ve kterých hraniční veličiny žádný fyzikální či geometrický význam nemají. Podrobnější informace o nepřímých metodách mohou být nalezeny v pracích Shermana [7], Mikhlina [8] či Muskhelishviliho [9].
V dalších desetiletích se metoda hraničních prvků významně nevyvíjela. Rozvoj zaznamenala opět až s rozvojem počítačů na konci 50. let. Na počátku 60. let Jaswon [10] a Symm [11] použili Fredholmovy rovnice k řešení dvou- a třídimenzionálních problémů v teorii potenciálů. Dále např. Rizzo [12] a Cruse [13] aplikovali metodu na dvou- a třídimenzionální problémy pružnosti, Shippy [14] rozšířil metodu na anizotropní tělesa či Mendelson [15] studoval problémy elastoplastického krutu.
V 80. letech bylo možné najít mnoho publikací, ve kterých byla metoda hraničních prvků aplikována na širokou škálu inženýrských problémů z oblasti statiky, dynamiky, lineární pružnosti, teorie proudění, lomové mechaniky, akustiky, aerodynamiky atd.
V současnosti se metoda hraničních prvků zaměřuje na překonání nedostatků souvisejících s komplikovanými časově závislými problémy, lineárními problémy s neznámým fundamentálním řešením a také nelineárními problémy.Za nejslibnější metodu překonávající tyto nedostatky se považuje metoda DRM (Dual Reciprocity Method) [16].

2.1 MHP vs MKP

V současnosti je nejrozšířenějším numerickým nástrojem používaným k řešení problémů mechaniky pružnosti a pevnosti metoda konečných prvků (MKP). I přesto, že umožňuje řešit širší spektrum problémů, v některých oblastech může být výhodnější použití jiné numerické metody, např. metody hraničních prvků (MHP). Základní rozdíl spočívá v diskretizaci zkoumané oblasti. Dimenze použitých prvků je u MHP vždy o řád nižší než u MKP a proto je krok tvorby sítě výrazně jednodušší. Při použití MHP tedy odpadá nutnost diskretizovat celou oblast. To je pracné a časově náročné, zejména při složitější geometrii oblasti. Pokud oblast obsahuje velké gradienty napětí, je opět vhodnější použít MHP, protože i přes skutečnost, že MKP počítá přesně neznámé funkce, při určování jejich derivací je méně účinná a přesnost v oblastech velkých gradientů klesá. Potom je třeba zjemnit síť prvků a použít vhodnější diskretizaci. Z hlediska matematické implementace má však větší výhody MKP. MHP má sice nižší počet řešených algebraických rovnic než MKP, ale matice soustavy je v případě MHP obecné nesymetrická, na rozdíl od MKP, kde je matice tuhosti symetrická s pásovou strukturou. Z výše uvedených důvodů je tedy zřejmé, že obě metody mají své výhody a nevýhody. MHP je matematicky náročnější než MKP, ale tato nevýhoda je kompenzována jednodušší tvorbou sítě a nižším počtem algebraických rovnic. Srovnání výhod a nevýhod obou metod obsahuje tabulka Tab. 2.1.

MHP	MKP
+ o řád nižší dimenze úlohy	+ rozšířenost
+ diskretizace pouze hranice	+ mnoho SW produktů
+ zkrácení výpočetního času	+ snadnější řešení nelineárních problémů
- obtížnější řešení některých nelineárních úloh	+ symetrická matice tuhosti
- matematická náročnost	- diskretizace celého tělesa
- nutná znalost fundamentálního řešení	- časová náročnost
- obecně nesymetrická matice soustavy	

Tab. 2.1: Srovnání MKP a MHP

3 ROVINNÁ PRUŽNOST

Tato kapitola popisuje aplikaci metody hraničních prvků na elastostatický problém ve dvou dimenzích. V rovinné pružnosti představují dvě složky posuvu u a v neznámé hraniční veličiny. Proto výsledné hraniční integrální rovnice jsou také dvě a navíc sdružené. Následkem toho, odvození fundamentálního řešení je mnohem komplikovanější než u problémů, kde je třeba vyřešit pouze jednu hraniční integrální rovnici. V následujícím textu budou odvozeny základní vztahy obecné teorie pružnosti a bude popsána aplikace MHP na dva problémy rovinné pružnosti, rovinnou deformaci a rovinnou napjatost.

3.1 Základní veličiny a vztahy teorie pružnosti

Při popisu vztahů obecné pružnosti budeme uvažovat jisté předpoklady a omezení materiálu zkoumaného tělesa. V dalším textu budeme předpokládat, že:

- materiál tělesa je
  - izotropní
  - homogenní
  - lineárně pružný
- deformace tělesa jsou vzhledem k jeho rozměrům velmi malé

Základní veličiny obecné pružnosti jsou

- posuvy ve směrech osy x, y, z - u, v, w
- normálové a smykové napětí ve směrech osy x, y, z - $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$
- přetvoření ve směrech osy x, y, z - $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$

Stav v každém bodě tělesa je tedy definován vektorem posuvů $\bar{\mathbf{u}}$, tenzorem napětí σ_{ij} a tenzorem deformace ε_{ij}.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \qquad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Vztahy vyjadřující závislost mezi deformačními posuvy u, v, w v bodě tělesa a délkovými a úhlovými přetvořeními $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ v témže bodě tělesa se označují jako geometrické vztahy. Pro malé deformace jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \tfrac{\partial u}{\partial x}, \qquad & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \tfrac{\partial v}{\partial y}, \qquad & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \tfrac{\partial w}{\partial z}, \qquad & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Složky tenzoru napětí musí splňovat diferenciální rovnice rovnováhy. Ty mají při zahrnutí objemových sil[1] $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)^T$ tvar:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Závislost mezi deformací a napjatostí v bodě tělesa vyjadřují tzv. konstitutivní vztahy. Matematicky je možné tuto závislost vyjádřit vztahy mezi složkami tenzoru napětí a tenzoru přetvoření. Jak již bylo uvedeno dříve, omezíme se na lineárně pružný Hookeovský materiál, který je charakterizován v každém bodě takto:

- hlavní směry deformace a napjatosti jsou shodné,
- materiálové vlastnosti jsou určeny dvěma nezávislými veličinami, a to modulem pružnosti v tahu E a Poissonovou konstantou ν,
- závislost mezi souřadnicemi tenzorů napětí a přetvoření jsou lineární.

Konstitutivní vztahy pro takový materiál v prostoru pak můžeme zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \tfrac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\varepsilon_y &= \tfrac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\
\varepsilon_z &= \tfrac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

3.2 Rovinná deformace

Rovinná deformace v lineární pružnosti představuje případ, kdy:
(a) Jedna ze tří složek posuvů, např. w podél osy z je konstantní.
(b) Další dvě složky posuvů ve směru osy x a y, u a v jsou funkcemi dvou proměnných, x a y.
Tento stav deformace nastává v nekonečně dlouhých (v praxi velmi dlouhých) prizmatických nebo válcových tělesech, jejichž osy jsou totožné s osou z a zatížení je kolmé k této ose a nezávislé na proměnné z.

[1] objemovou silou je například gravitační síla

Geometrické vztahy

Podmínky zmíněné v předcházejícím odstavci lze matematicky zapsat jako

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y), \qquad w = C,$$

kde C je libovolná konstanta. Složky tenzoru deformace lze vyjádřit jako

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \tag{3.4}$$

Konstitutivní vztahy

Konstitutivní vztahy pro rovinnou deformaci mohou být zapsány ve tvaru

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_x \\
\sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_y \\
\sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= 0 \\
\tau_{yz} &= 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

kde λ je Lamého konstanta, která se vztahuje k materiálovým charakteristikám E a ν následujícími výrazy

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \tag{3.6}$$

Přepsáním rovnic (3.5) dostaneme konstitutivní vztahy pro složky deformace

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
\sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \\
\gamma_{xz} &= 0 \\
\gamma_{yz} &= 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Dosazením výrazu σ_z z (3.7) do rovnic $(3.7)_1$ a $(3.7)_2$ obdržíme následující rovnice pro poměrná přetvoření

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\nu}{E}(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu}{E}(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Položíme-li

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}, \qquad \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}. \tag{3.9}$$

obdržíme

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{\bar{E}}{2(1+\bar{\nu})}, \qquad \lambda = \frac{\bar{\nu}\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}. \tag{3.10}$$

Složky tenzoru deformací pak mohou být zapsány jako

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{\bar{E}}(\sigma_x - \bar{\nu}\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{\bar{E}}(\sigma_y - \bar{\nu}\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\bar{\nu})}{\bar{E}}\tau_{xy} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Konstanty $\bar{E}$ a $\bar{\nu}$ se nazývají *efektivní elastické konstanty*. Jak uvidíme později, tyto konstanty nám umožní použít rovnice stejného tvaru jak pro rovinnou deformaci, tak pro rovinnou napjatost. Vztahy pro složky tenzoru napětí vyjádřené pomocí efektivních elastických konstant mají tvar

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}(\varepsilon_x - \bar{\nu}\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2}(\varepsilon_y - \bar{\nu}\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{\bar{E}}{2(1+\bar{\nu})}\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Rovnice rovnováhy

Jelikož u rovinné deformace nejsou složky napětí závislé na ose z a s přihlédnutím k rovnicím (3.5), můžeme předpokládat a priori splnění třetí rovnice (3.2). Rovnice rovnováhy (3.2) se v případě rovinné deformace redukují na

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dosazením složek napětí z (3.12) do (3.13) a užitím vztahů (3.4) vyjádříme rovnice rovnováhy pomocí složek posuvů ve tvaru

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \frac{1}{G} b_x &= 0 \\
\nabla^2 v + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{G} b_y &= 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Dosazením z (3.9) za elastickou konstantu $\bar{\nu}$ dostaneme *Navierovy rovnice rovnováhy* pro rovinnou deformaci

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \frac{1}{G} b_x &= 0 \\
\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{G} b_y &= 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Okrajové podmínky

Řešení rovnic (3.14) musí splňovat předepsané okrajové podmínky na hranici tělesa. Okrajové podmínky jsou vyjádřeny buď pomocí posuvů u a v nebo povrchového napětí t_x a t_y. Okrajové podmínky lze rozdělit do čtyř typů:

$$\begin{aligned}
u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \quad &\text{na } \Gamma_1 \\
u = \bar{u}, \quad t_y = \bar{t_y} \quad &\text{na } \Gamma_2 \\
t_x = \bar{t_x}, \quad v = \bar{v} \quad &\text{na } \Gamma_3 \\
t_x = \bar{t_x}, \quad t_y = \bar{t_y} \quad &\text{na } \Gamma_4
\end{aligned} \tag{3.16}$$

kde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ představuje hranici tělesa Ω a předepsané veličiny jsou označeny pruhem. Vztahy mezi povrchovým napětím t_x, t_y a složkami napětí σ_x, σ_y a τ_{xy} ve dvou dimenzích vyjadřují vztahy

$$\begin{aligned}
t_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_x \\
t_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y
\end{aligned} \tag{3.17}$$

kde n_x a n_y označují rozložení jednotkové normály k hranici tělesa do osy x a y. Po vyjádření složek napětí v rovnicích (3.17) pomocí konstitutivních (3.5) a geometrických (3.4) rovnic, získáme následující vztahy pro povrchové napětí

$$\begin{aligned}
t_x &= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) n_x + G\left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial x} n_y\right) + G\frac{\partial u}{\partial n} \\
t_y &= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) n_y + G\left(\frac{\partial u}{\partial y} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y\right) + G\frac{\partial v}{\partial n}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

3.3 Rovinná napjatost

Dalším speciálním případem rovinné pružnosti je stav rovinné napjatosti. Tento stav nastává v tenkostěnných konstrukcích, které jsou podrobeny rovinnému zatížení. Uvažujme těleso, jehož tloušťka h je mnohem menší ve srovnání s dalšími dvěma rozměry. Těleso může být zatíženo objemovými silami b_x, b_y nebo povrchovým napětím. Předpokládáme, že povrchové napětí působí v rovině střednicové plochy tělesa a že rozložení napětí podél tloušťky h je konstantní. V tomto případě je výsledný stav napjatosti nezávislý na proměnné z a vzhledem k zanedbatelné hodnotě h oproti zbylým rozměrům tělesa můžeme předpokládat, že

$$\sigma_z = 0, \qquad \tau_{xz} = 0, \qquad \tau_{yz} = 0, \tag{3.19}$$

podél tloušťky h a pro zbylé složky napětí platí

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \qquad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \qquad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y). \tag{3.20}$$

Z předešlých podmínek určíme konstitutivní vztahy pro rovinnou napjatost

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Rovnice rovnováhy (3.2) se stejně jako v případě rovinné deformace redukují na

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Rovnice (3.21) a (3.22) mají stejnou formu jako (3.11) a (3.14). Z tohoto důvodu, všechny rovnice pro rovinnou napjatost mohou být vyjádřeny z rovnic pro rovinnou deformaci nahrazením efektivních elastických konstant $\bar{\nu}$ a $\bar{E}$ standardními materiálovými charakteristikami ν a E. Výsledné Navierovy rovnice rovnováhy pro rovinnou napjatost tedy mají tvar

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \frac{1}{G}b_x &= 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{G}b_y &= 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Okrajové podmínky lze stejně jako v případě rovinné deformace vyjádřit pomocí složek posuvů u a v nebo pomocí povrchového napětí. Povrchové napětí pro rovinnou napjatost popisují vztahy

$$\begin{aligned} t_x &= \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial x} n_y \right) + G \frac{\partial u}{\partial n} \\ t_y &= \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_y + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) + G \frac{\partial v}{\partial n} \end{aligned} \tag{3.24}$$

kde

$$\lambda^* = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \qquad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

3.4 Bettiho věta

K vyjádření hraničních integrálních rovnic lze využít více přístupů, například metodu vážených reziduí či variační přístup. Pro úlohy rovinné pružnosti je vhodné využít Bettiho věty o vzájemnosti prací[2]. Uvažujme trojrozměrné lineární, homogenní, izotropní těleso o objemu V ohraničené povrchem S. Navíc uvažujme v tělese dva stavy napjatosti vyvolané dvěma různými objemovými silami a hraničními veličinami (posuvy a povrchové napětí). Označme složky posuvů $\mathbf{u}$, objemových sil $\mathbf{b}$ a povrchového napětí $\mathbf{t}$ jednotlivých stavů takto:

$$\begin{array}{llll} \textbf{Stav I:} & \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} & \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} & \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \\ \textbf{Stav II:} & \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix} & \mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} b_x^* \\ b_y^* \\ b_z^* \end{bmatrix} & \mathbf{t}^* = \begin{bmatrix} t_x^* \\ t_y^* \\ t_z^* \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.25}$$

Podle Bettiho věty je práce vyvolaná na posuvech ze stavu (I) a zatížením ze stavu (II) rovna práci vyvolané na posuvech ze stavu (II) a zatížením ze stavu (I). Toto lze matematicky zapsat jako

$$\int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}^* \, dV + \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* \, dS = \int_V \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{b} \, dV + \int_S \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{t} \, dS \tag{3.26}$$

nebo v rozšířeném tvaru použitím vztahů (3.25)

$$\begin{aligned} &\int_V (u b_x^* + v b_y^* + w b_z^*) \, dV + \int_S (u t_x^* + v t_y^* + w t_z^*) \, dS = \\ = &\int_V (u^* b_x + v^* b_y + w^* b_z) \, dV + \int_S (u^* t_x + v^* t_y + w^* t_z) \, dS \end{aligned} \tag{3.27}$$

Nyní aplikujme předchozí rovnici na oba zkoumané případy rovinné pružnosti:

[2]Odvození v dodatku

- **Rovinná deformace**
  V tomto případě[3] se rovnice (3.27) redukují na

$$\int_\Omega (ub_x^* + vb_y^*)\; d\Omega + \int_\Gamma (ut_x^* + vt_y^*)\; ds = \\ = \int_\Omega (u^* b_x + v^* b_y)\; d\Omega + \int_\Gamma (u^* t_x + v^* t_y)\; ds \tag{3.28}$$

- **Rovinná napjatost** U rovinné napjatosti budou mít rovnice (3.27) stejný tvar jako u rovinné deformace.

Pokud nyní nahradíme v rovnicích (3.28) složky objemových sil výrazy z (3.14) obdržíme rovnici popisující vztah mezi složkami zatížení a jimi vyvolaných posuvů na hranici Γ a uvnitř tělesa Ω pro Navierovy rovnice:

$$\int_\Omega \{[uN_x(u^*, v^*) + vN_y(u^*, v^*)] - [u^* N_x(u, v) + v^* N_y(u, v)]\}\; d\Omega = \\ = \int_\Gamma [(ut_x^* + vt_y^*) - (u^* t_x + v^* t_y)]\; ds \tag{3.29}$$

kde složky N_x a N_y jsou definovány na základě rovnic (3.14)

$$\begin{aligned} N_x(u, v) &= -G\left[\nabla^2 u + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)\right] \\ N_y(u, v) &= -G\left[\nabla^2 v + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.30}$$

Rovnice (3.30) jsou platné pro rovinnou deformaci. Pro rovinnou napjatost je třeba dosadit ν za $\bar{\nu}$ z (3.9).

[3] $b_z = b_z^* = 0, t_z = t_z^* = 0$

4 FUNDAMENTÁLNÍ ŘEŠENÍ

4.1 Klasické fundamentální řešení-osamělá síla v nekonečné rovině

Jak již bylo zmíněno dříve, při řešení problému rovinné pružnosti jsou na povrchu tělesa aplikovány okrajové podmínky dvojího typu, silové ve formě povrchových napětí t_x, t_y a deformační ve formě posuvů u, v. V každém bodě hranice známe v jednom směru (x nebo y) buď hodnotu posuvu nebo odpovídající hodnotu povrchového napětí a druhá veličina je pro nás neznámá. Abychom mohli aplikovat Bettiho větu, potřebujeme znát fundamentální řešení. Z fyzikálního pohledu vyjadřuje fundamentální řešení posuvy vyvolané jednotkovou silou v nekonečném rovinném tělese. Tato úloha je známá jako Kelvinova úloha a v dalším textu bude popsáno její využití při sestavení fundamentálního řešení.
Uvažujme osamělou sílu $\mathbf{F}(F_\xi,F_\eta)$, $|\mathbf{F}|{=}1$, působící v bodě $Q(\xi,\eta)$ v rovině. Složky F_ξ a F_η síly $\mathbf{F}$ představují rozložení síly $\mathbf{F}$ do osy x a y. Účinek síly v bodě $P(x,y)$ může být vyjádřen pomocí Diracovy delta funkce jako

$$\mathbf{b} = \delta(P-Q)\mathbf{F} \tag{4.1}$$

neboli

$$\begin{aligned} b_x &= \delta(P-Q)F_\xi \\ b_y &= \delta(P-Q)F_\eta \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dosazením z (4.2) do (3.14) získáme Navierovy rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \frac{1}{G}\delta(P-Q)F_\xi = 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{G}\delta(P-Q)F_\eta = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Fundamentální řešení je singulární řešení rovnic (4.3). Může být odvozeno vyjádřením složek posuvů pomocí Galerkinových funkcí. Položme

$$\begin{aligned} 2Gu &= \frac{2}{1+\bar{\nu}}\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \\ 2Gv &= \frac{2}{1+\bar{\nu}}\nabla^2\psi - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $\phi = \phi(x,y)$ a $\psi = \psi(x,y)$ jsou Galerkinovy funkce. Tyto funkce představují složky Galerkinova vektoru. Dosazením rovnic (4.4) do (4.3) dostaneme

$$\begin{aligned} \nabla^4\phi &= -(1+\bar{\nu})\delta(P-Q)F_\xi \\ \nabla^4\psi &= -(1+\bar{\nu})\delta(P-Q)F_\eta \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde ∇^4 je biharmonický operátor

$$\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \tag{4.6}$$

Odtud plyne, že rovnice (4.4) jsou řešením (4.3), pokud funkce ϕ a ψ vyjadřují singulární partikulární řešení rovnic (4.5). Odvození tohoto partikulárního řešení je možné nalézt např. v [1]. Výsledný tvar Galerkinových funkcí je dán vztahy

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{1+\bar{\nu}}{8\pi} F_\xi r^2 \ln r \\ \psi &= -\frac{1+\bar{\nu}}{8\pi} F_\eta r^2 \ln r \end{aligned} \tag{4.7}$$

kde

$$r = |P - Q|.$$

Dosazením singulárního partikulárního řešení (4.7) do (4.4) získáme fundamentální řešení pro Navierovy rovnice (4.3).

4.2 Fundamentální řešení-osamělá síla v blízkosti otvoru

Kromě výše popsaného klasického fundamentálního řešení, umožňuje metoda hraničních prvků implementaci singulárních řešení pružnosti na nekonečné oblasti s různými typy singularit nebo nehomogenit. Tato řešení lze efektivně odvodit použitím Muschelišviliho komplexních potenciálů pro rovinnou izotropní pružnost, ve které jsou řešení dána komplexními potenciály $\phi(z)$ a $\psi(z)$ v komplexní proměnné $z = x + \mathrm{i}y$. Kartézské vektory jsou v komplexní proměnné reprezentovány jako $u = u_x + \mathrm{i}u_y$ a $t = t_x + \mathrm{i}t_y$ pro posuv a povrchové napětí. Posuv a napětí jsou dány jako:

$$2Gu(z) = \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{4.8}$$

a

$$\sigma(z) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)}, \tag{4.9}$$

$$\tau(z) = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} + \mathrm{i}\sigma_{xy} = z\phi''(z) + \psi'(z), \tag{4.10}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku a κ je dána jako $\kappa = 3 - 4\nu$ pro rovinnou deformaci a $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ pro rovinnou napjatost, kde ν označuje Poissonovu konstantu. Pruh nad komplexní proměnnou značí její komplexní sdružení číslo a analytická funkce z s čárkou značí její derivaci vzhledem k z. Jako další příklad fundamentálního řešení si vyjádříme případ eliptického otvoru v nekonečné rovině v jehož blízkosti se nachází osamělá síla $f = f_x + \mathrm{i} f_y$. Uvažujeme bodovou sílu f v bodě ξ v oblasti s eliptickou dírou s poloosami a a c ($a \geq c$) ve směru osy x a y. Řešení Greenovy funkce lze pomocí Muschelišviliho komplexních potenciálů psát ve tvaru

$$\phi_0 = \phi_s + \phi, \qquad \psi_0 = \psi_s + \psi, \tag{4.11}$$

kde potenciály ψ_s a ϕ_s odpovídají singulární části řešení pro nekonečné homogenní těleso a ψ a ϕ odpovídají regulární části řešení. Předpokládáme nezatížený otvor, tudíž ϕ_0 a ψ_0 musí být určeny tak, že povrchové napětí na povrchu díry bude nulové. Singulární části jsou dány vztahy

$$\phi_s(z;\xi) = -\gamma \ln(z-\xi), \tag{4.12}$$

$$\psi_s(z;\xi) = -k\overline{\gamma} \ln(z-\xi) + \gamma \frac{\overline{\xi}}{z-\xi}, \tag{4.13}$$

kde $k = -\kappa$ a $\gamma = f/2\pi(\kappa+1)$. Regulární potenciály ϕ a ψ se sestrojí pomocí konformního zobrazení

$$z = R\left(w + \frac{m}{w}\right), \tag{4.14}$$

kde

$$R = \frac{1}{2}(a+c), \qquad m = \frac{a-c}{a+c}.$$

Zobrazení (4.14), které zobrazuje eliptickou díru na jednotkový kruh, umožňuje aplikovat metodu tzv. zrcadlových potenciálů. Ta spočívá v zavedení zrcadlové síly $\hat{f}$ do vhodného místa uvnitř otvoru, přičemž tato síla kompenzuje (eliminuje) povrchová napětí na hranici kruhového otvoru generovaná silou f. Podrobnější popis této metody lze nalézt např. v [9], [17]. Jestliže body w a ρ v rovině s otvorem jsou odpovídající obrazy bodů z a ξ, pak pro potenciály ϕ a ψ z (4.11) platí

$$\phi(w;\rho) = \phi_1(w;\rho)\gamma + \phi_2(w;\rho)\overline{\gamma}, \tag{4.15}$$

$$\psi(w;\rho) = \psi_1(w;\rho)\gamma + \psi_2(w;\rho)\overline{\gamma} - \frac{M^*(w)}{M'(w)}\frac{\partial}{\partial w}\phi(w;\rho), \tag{4.16}$$

kde

$$\phi_1(w;\rho) = L\left(w, \frac{m}{\rho}\right) + kL\left(w, \frac{1}{\overline{\rho}}\right), \tag{4.17}$$

$$\phi_2(w;\rho) = \frac{\rho(1+m\overline{\rho}^2) - \overline{\rho}(m+\rho^2)}{\rho\overline{\rho}(m-\overline{\rho}^2)} \frac{1}{w-1/\overline{\rho}},$$

$$\psi_1(w;\rho) = \frac{\overline{\rho}(m^3+\rho^2) - m\rho(m+\overline{\rho}^2)}{\rho\overline{\rho}(m-\rho^2)} \frac{1}{w-m/\rho}, \tag{4.18}$$

$$\psi_2(w;\rho) = kL\left(w, \frac{m}{\rho}\right) + L\left(w, \frac{1}{\overline{\rho}}\right), \tag{4.19}$$

a funkce $L(w, \tau)$ je definována jako

$$L(w, \tau) = \ln(w - \tau) - \ln w, \tag{4.20}$$

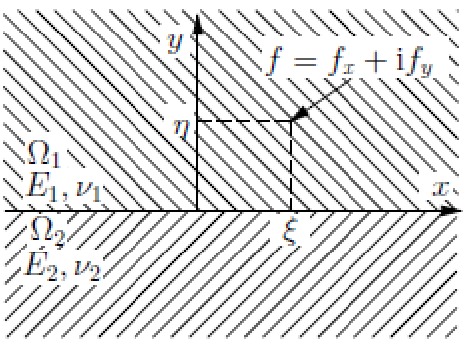
kde $\tau = m/\rho$ nebo $1/\overline{\rho}$. Funkce $M^*(w)$ je dána vztahem

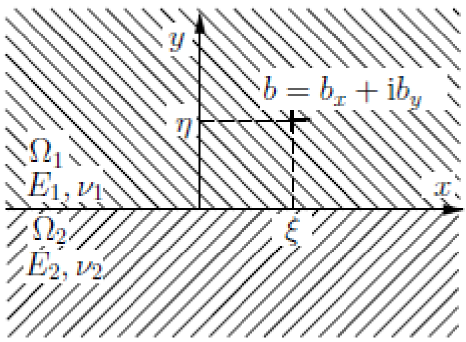
$$M^*(w) = R\left(mw - \frac{1}{w}\right). \tag{4.21}$$

Dosazením vztahů (4.15), (4.16), (4.12) a (4.13) do (4.11) lze následně vyjádřit vztahy pro posuvy a napětí pomocí (4.8) - (4.10).

4.3 Fundamentální řešení-trhlina v bimateriálu

Formalismus komplexních potenciálů dovoluje vyjádřit explicitně napjatost v materiálu obsahujícím dislokaci nebo sílu. Geometrii takového materiálu je možné uvažovat v rozsahu od nekonečné homogenní oblasti až po nekonečný trimateriál nebo materiál obsahující inkluzi. V případě dislokace nebo síly působící v bodě $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$ nad osou x v nekonečné oblasti rozdělené osou x na části s různými elastickými vlastnostmi Ω_1 a Ω_2, viz Obr.4.1, lze pomocí Muschelišviliho komplexních potenciálů sestavit níže uvedené vztahy. Pro posuvy v oblasti nad osou x, tj. pro $z = x + \mathrm{i}y \in \Omega_1$, kde $y > 0$, platí





Obr. 4.1: Síla působící v materiálu Ω_1 (a) nebo dislokace v materiálu Ω_1 (b) v blízkosti rozhraní bimateriálu

$$\mu_1\{(u_x+\mathrm{i}u_y)_1-(u_x+\mathrm{i}u_y)_{rb}\} = -\Bigg\{\kappa_1\ln(z-\zeta)-k_1\overline{\ln(z-\zeta)}+$$
$$+\kappa_1k_1\delta_1\ln(z-\overline{\zeta})\lambda_1\overline{\ln(z-\overline{\zeta})}+\delta_1\frac{(z-\overline{z})(\zeta-\overline{\zeta})}{\overline{(z-\overline{\zeta})}^2}\gamma_1\Bigg\}+$$
$$+\left\{\frac{(z-\overline{z})-(\zeta-\overline{\zeta})}{\overline{z-\zeta}}+\delta_1\left(\kappa_1\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{z-\overline{\zeta}}+k_1\frac{z-\overline{z}}{\overline{\overline{z-\overline{\zeta}}}}\right)\right\}\overline{\gamma_1}, \qquad (z\in\Omega_1), \qquad (4.22)$$

pro posuvy v oblasti pod osou x, tj. pro $z=x+\mathrm{i}y\in\Omega_1$, kde $y<0$, platí

$$\mu_2\{(u_x+\mathrm{i}u_y)_1-(u_x+\mathrm{i}u_y)_{rb}\} =$$
$$= -\left\{\kappa_2(1+\lambda_1)\ln(z-\zeta)-(1+\delta_1)k_1\overline{\ln(z-\zeta)}\right\}\gamma_1+$$
$$+\frac{(1+\lambda_1)(z-\overline{z})-(1+\delta_1)(\zeta-\overline{\zeta})}{\overline{z-\zeta}}\overline{\gamma_1}, \qquad (z\in\Omega_2) \qquad (4.23)$$

kde

$$k_1=\kappa_1, \quad \gamma_1 = \frac{f}{2\pi(\kappa_1+1)} \quad \text{pro sílu,}$$
$$k_1=1, \quad \gamma_1 = \frac{\mathrm{i}\mu_1 b}{2\pi(\kappa_1+1)} \quad \text{pro dislokaci.}$$

Pro rovinnou deformaci a napjatost platí $\kappa_i=3-4\nu_i$ a $\kappa_i=(3-\nu_i)/(1+\nu_i)$, $i=1,2$ a kde ν_1 je Poissonova konstanta materiálu Ω_1. Pro zbývající koeficienty se může psát

$$\delta_1=\frac{\alpha-\beta}{1+\beta}, \qquad \lambda_1=\frac{\alpha+\beta}{1-\beta}, \qquad (4.24)$$

kde α a β jsou tzv. Dundursovy parametry charakterizující daný bimateriál,

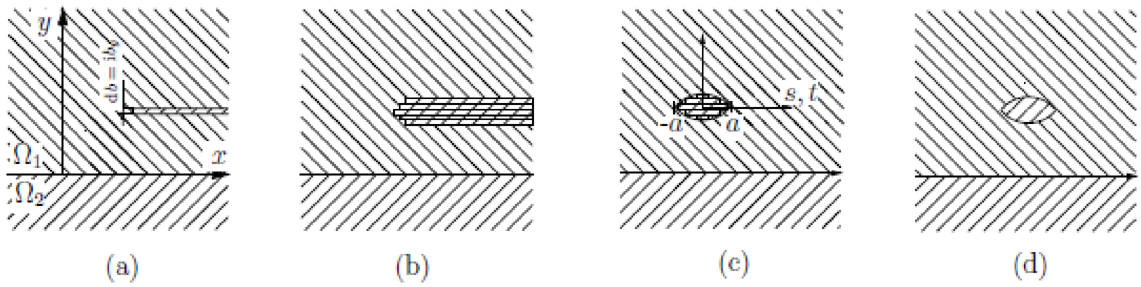
$$\alpha=\frac{\mu_2(\kappa_1+1)-\mu_1(\kappa_2+1)}{\mu_2(\kappa_1+1)+\mu_1(\kappa_2+1)}, \qquad \beta=\frac{\mu_2(\kappa_1-1)-\mu_1(\kappa_2-1)}{\mu_2(\kappa_1+1)+\mu_1(\kappa_2+1)}. \qquad (4.25)$$

Posuvy $(u_x+\mathrm{i}u_y)_{rb}$ se vztahují k posuvům tělesa jako tuhého celku. V případě aplikace dislokace $b=b_x+\mathrm{i}b_y$ jsou tyto posuvy nulové, v případě aplikace síly $f=f_x+\mathrm{i}f_y$ platí

$$(u_x+\mathrm{i}u_y)_{rb}=\mathrm{i}\frac{\lambda_1-\kappa_1^2\delta_1}{8\mu_1(\kappa_1+1)\pi^2}(f_x+\mathrm{i}f_y). \qquad (4.26)$$

Trhlina v blízkosti rozhraní se může modelovat metodou spojitě rozložených dislokací [18]. Tato metoda spočívá v zavedení tzv. dislokační hustoty $B(s)$ definované vztahem

$$B(s)=\frac{\mathrm{d}b(s)}{\mathrm{d}s}. \qquad (4.27)$$



Obr. 4.2: Schéma modelu trhliny pomocí metody spojitě rozložených dislokací. (a)-(b) Polonekonečný pás materiálu o tloušťce db je postupně vkládán do materiálu Ω_1. (c)-(d) Polonekonečné pásy tlouštěk db jsou postupně odebírány dokud nevznikne trhlina (d).

Hustota (4.27) reprezentuje spojité pole dislokací rozložené např. podél úsečky s rovnoběžně s osou x, viz Obr. 4.2. Jestliže předpokládáme trhlinu zatíženou módem I, vedou vztahy (4.22), (4.23) a Hookeův zákon na řešení integrální rovnice

$$\sigma_{yy} = \frac{2G}{\pi(\kappa+1)} \int_{-a}^{a} \frac{B(s)}{t-s} \mathrm{d}s + \int K(t,s) \mathrm{d}s, \tag{4.28}$$

kde a je poloviční délka trhliny, σ_{yy} je napětí, které generuje vnější zatížení v místě trhliny neporušeného tělesa a $K(t,s)$ je tzv. nesingulární jádro popisující interakci mezi trhlinou, rozhraním a osamělou silou. Singulární integrální rovnice (4.28) lze snadno řešit pomocí kvadraturních integračních vzorců, které umožňují její řešení implementovat do řešení hraničních integrálních rovnic MHP, viz kap. 5. Důležitou vlastností hustoty Burgersova vektoru (4.27) je možnost vyjádření faktoru intenzity napětí pomocí jeho limitní hodnoty

$$\frac{\kappa+1}{G\sqrt{2\pi}} K_I = \lim_{t \to 1^-} \sqrt{a(1-t)} B(t) \tag{4.29}$$

5 NUMERICKÁ IMPLEMENTACE

V této kapitole se budeme zabývat sestrojením hraničních integrálních rovnic využitím poznatků předchozí kapitoly. Pro vyjádření hraničních integrálních rovnic je nutné vyjádřit fundamentální řešení pro dva případy: (1) $F_\xi = 1$, $F_\eta = 0$ a (2) $F_\xi = 0$, $F_\eta = 1$. V dalším se budeme zabývat pouze klasickým fundamentální řešením, které vyjádříme pro tyto dva případy.

Posuvy vyvolané osamělou silou

(1) $F_\xi = 1$, $F_\eta = 0$

Pro získání fundamentálního řešení vyjádříme všechny potřebné derivace Galerkinových funkcí (4.7) a dosadíme do (4.4). Pro případ (1) tedy platí

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{1+\bar{\nu}}{8\pi} r^2 \ln r, \\
\psi &= 0, \\
\nabla^2 \phi &= -\frac{1+\bar{\nu}}{8\pi} (\ln r + 1), \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -\frac{1+\bar{\nu}}{8\pi} (2 \ln r + 2 r_x^2 + 1), \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= -\frac{1+\bar{\nu}}{8\pi} 2 r_x r_y,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

kde r_x a r_y vyjadřují derivaci vzdálenosti r podle x a y

$$r_x = -\frac{\xi - x}{r}, \qquad r_y = -\frac{\eta - y}{r},$$

a splňují rovnici $r_x^2 + r_y^2 = 1$. Po dosazení z (5.1) do (4.4) obdržíme

$$\begin{aligned}
U_{x\xi} &= -\frac{1}{8\pi G} \left[(3-\bar{\nu}) \ln r - (1+\bar{\nu}) r_x^2 + \frac{7-\bar{\nu}}{2} \right], \\
U_{y\xi} &= \frac{1}{8\pi G} (1+\bar{\nu}) r_x r_y,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

kde $U_{x\xi}$ a $U_{y\xi}$ vyjadřují posuvy u a v. První index označuje směr posuvu a druhý směr jednotkové síly $\mathbf{F}$.

(2) $F_\xi = 0$, $F_\eta = 1$

Analogickým postupem jako u (1) dostaneme

$$\begin{aligned}\phi &= 0,\\ \psi &= -\frac{1+\bar{\nu}}{8\pi}r^2\ln r,\\ \nabla^2\psi &= -\frac{1+\bar{\nu}}{2\pi}(\ln r+1),\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} &= -\frac{1+\bar{\nu}}{8\pi}2r_xr_y,\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= -\frac{1+\bar{\nu}}{8\pi}(2\ln r+2r_y^2+1),\end{aligned} \tag{5.3}$$

a dosazením do (4.4) obdržíme

$$\begin{aligned}U_{x\eta} &= \frac{1}{8\pi G}(1+\bar{\nu})r_xr_y,\\ U_{y\eta} &= -\frac{1}{8\pi G}\left[(3-\bar{\nu})\ln r-(1+\bar{\nu})r_y^2+\frac{7-\bar{\nu}}{2}\right].\end{aligned} \tag{5.4}$$

Rovnice (5.2) a (5.4) mohou být zapsány v maticové formě známé jako Greenův tenzor[3]

$$\mathbf{U}(P,Q)=\begin{bmatrix} U_{x\xi} & U_{x\eta}\\ U_{y\xi} & U_{y\eta}\end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Greenův tenzor je symetrický vzhledem k bodům P a Q. Při záměně těchto bodů (bod P by byl působištěm síly a bod Q zkoumaným bodem) se složky tenzoru nezmění, tzn $\mathbf{U}(P,Q)=\mathbf{U}(Q,P)$

$$\begin{bmatrix} U_{x\xi} & U_{x\eta}\\ U_{y\xi} & U_{y\eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_{\xi x} & U_{\xi y}\\ U_{\eta x} & U_{\eta y}\end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

V předchozím textu bylo odvozeno fundamentální řešení pro rovinnou úlohu pružnosti. K sestavení hraničních integrálních rovnic je třeba dále určit vliv jednotkové osamělé síly $\mathbf{F}$ na složky napětí v tělese a také na povrchové napětí.

Napětí vyvolané osamělou silou

Při vyjadřování složek napětí od osamělé síly budeme postupovat analogicky jako u sestavování fundamentálního řešení, tzn. budeme rozlišovat stejné dva případy rozložení osamělé síly v rovině.

(1) $F_\xi = 1,\ F_\eta = 0$

Složky napětí mohou být vyjádřeny z (3.5).

$$\begin{aligned}\sigma_{x\xi} &= \lambda(U_{x\xi,x}+U_{y\xi,y})+2GU_{x\xi,x},\\ \sigma_{y\xi} &= \lambda(U_{x\xi,x}+U_{y\xi,y})+2GU_{y\xi,y},\\ \tau_{xy\xi} &= G(U_{x\xi,y}+U_{y\xi,x}),\end{aligned} \tag{5.7}$$

kde $U_{x\xi,x}$ označuje derivaci posuvu $U_{x\xi}$ podle proměnné x a je tedy rovno přetvoření ε_x vyvolanému jednotkovou silou F_ξ a analogicky $U_{x\xi,y}$ odpovídá přetvoření ε_y od síly F_ξ

$$U_{x\xi,x} = \frac{\partial U_{x\xi}}{\partial x} = \varepsilon_{x\xi}, \qquad U_{y\xi,y} = \frac{\partial U_{y\xi}}{\partial y} = \varepsilon_{y\xi}.$$

(2) $F_\xi = 0$, $F_\eta = 1$

$$\begin{aligned} \sigma_{x\eta} &= \lambda(U_{x\eta,x} + U_{y\eta,y}) + 2GU_{x\eta,x}, \\ \sigma_{y\eta} &= \lambda(U_{x\eta,x} + U_{y\eta,y}) + 2GU_{y\eta,y}, \\ \tau_{xy\eta} &= G(U_{x\eta,y} + U_{y\eta,x}), \end{aligned} \tag{5.8}$$

Změníme-li značení souřadnic bodů P a Q pomocí číslovaných indexů, tzn. zavedeme-li $P(x_1, x_2)$ a $Q(\xi_1, \xi_2)$, můžeme popsat napětí pro oba předcházející případy jako

$$\sigma_{ijk} = \frac{A_1}{r}[A_2(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i - \delta_{ij}r_k) + 2r_ir_jr_k] \qquad (i, j, k = 1, 2), \tag{5.9}$$

kde index $k = 1, 2$ značí po řadě směr ξ nebo η osamělé síly a platí, že $\sigma_{11} = \sigma_x$, $\sigma_{22} = \sigma_y$, $\sigma_{12} = \tau_{xy}$ a

$$A_1 = -\frac{1 + \bar{\nu}}{4\pi}, \qquad A_2 = \frac{1 - \bar{\nu}}{1 + \bar{\nu}}.$$

Povrchové napětí vyvolané osamělou silou

K vyjádření složek povrchové napětí vyjdeme z rovnic (3.17) a opět rozlišujeme dva případy:

(1) $F_\xi = 1$, $F_\eta = 0$

$$\begin{aligned} T_{x\xi} &= \sigma_{x\xi}n_x + \tau_{xy\xi}n_y, \\ T_{y\xi} &= \tau_{xy\xi}n_x + \sigma_{y\xi}n_y, \end{aligned} \tag{5.10}$$

(2) $F_\xi = 0$, $F_\eta = 1$

$$\begin{aligned} T_{x\eta} &= \sigma_{x\eta}n_x + \tau_{xy\eta}n_y, \\ T_{y\eta} &= \tau_{xy\eta}n_x + \sigma_{y\eta}n_y. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Vyjádřením napětí z (5.9) lze vztahy pro povrchové napětí přepsat ve tvaru

$$
\begin{aligned}
T_{x\xi} &= \frac{A_1}{r}(A_2 + 2r_x^2)r_n, \\
T_{y\xi} &= \frac{A_1}{r}(2r_x r_y r_n + A_2 r_y), \\
T_{x\eta} &= \frac{A_1}{r}(2r_x r_y r_n - A_2 r_t), \\
T_{y\eta} &= \frac{A_1}{r}(A_2 + 2r_y^2)r_n, \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

kde $r_n = r_x n_x + r_y n_y$ vyjadřuje derivaci vektoru r ve směru vnější normály k hranici Γ procházející bodem $p(x,y)$ a $r_t = -r_x n_y + r_y n_x$ vyjadřuje derivaci v tečném směru.

Integrální řešení problému rovinné pružnosti

Řešení rovinného problému pružnosti vychází z (3.28). V předchozím textu byly odvozeny vztahy pro posuvy (fundamentální řešení), napětí a povrchové napětí vyvolané jednotkovou osamělou silou. Dosazením těchto vztahů do (3.28) dostaneme integrální vyjádření řešení Navierových rovnic rovinné pružnosti uvnitř tělesa Ω (3.15). Při odvození tohoto řešení budeme předpokládat, že síla $\mathbf{F}$ působící v bodě $Q(\xi,\eta)$ vyvolá v tělese stav napjatosti (II), viz (3.25).

(1) $F_\xi = 1$, $F_\eta = 0$
V tomto případě je stav napjatosti uvnitř tělesa Ω popsán jako

$$
\begin{aligned}
b_x^* &= \delta(P-Q), \qquad b_y^* = 0, \\
u^* &= U_{x\xi}(P,Q), \qquad v^* = U_{y\xi}(P,Q),
\end{aligned}
$$

a na hranici tělesa Γ platí

$$
t_x^* = T_{x\xi}(p,Q), \qquad t_y^* = T_{y\xi}(p,Q),
$$

kde $P \in \Omega$ a $p \in \Gamma$. Dosazením těchto výrazů do (3.28) a s přihlédnutím k vlastnostem Diracovy funkce[1]

$$
\int_\Omega u b_x^* \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega u(P)\delta(P-Q) \, \mathrm{d}\Omega = u(Q), \qquad (5.13)
$$

obdržíme integrální vyjádření posuvu ve směru x v bodě Q uvnitř tělesa Ω v následujícím tvaru

$$
\begin{aligned}
u(Q) &= \int_\Omega [U_{x\xi}(P,Q)b_x(P) + U_{y\xi}(P,Q)b_y(P)] \, \mathrm{d}\Omega \\
&+ \int_\Gamma [U_{x\xi}(p,Q)t_x(p) + U_{y\xi}(p,Q)t_y(p)] \, \mathrm{d}s \\
&- \int_\Gamma [T_{x\xi}(p,Q)u(p) + T_{y\xi}(p,Q)v(p)] \, \mathrm{d}s. \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

[1] dát odkaz na nějakou literaturu

Analogický postup aplikujeme na druhý případ:

(2) $F_\xi = 0$, $F_\eta = 1$
V tomto případě je stav napjatosti uvnitř tělesa Ω popsán jako

$$\begin{aligned} b_x^* &= 0, & b_y^* = \delta(P-Q), \\ u^* &= U_{x\eta}(P,Q), & v^* = U_{y\eta}(P,Q), \end{aligned}$$

a na hranici tělesa Γ platí

$$t_x^* = T_{x\eta}(p,Q), \qquad t_y^* = T_{y\eta}(p,Q),$$

Dosazením do (3.28) tentokrát obdržíme integrální vyjádření posuvu ve směru y bodu Q ve tvaru

$$\begin{aligned} v(Q) &= \int_\Omega [U_{x\eta}(P,Q)b_x(P) + U_{y\eta}(P,Q)b_y(P)] \,\mathrm{d}\Omega \\ &+ \int_\Gamma [U_{x\eta}(p,Q)t_x(p) + U_{y\eta}(p,Q)t_y(p)] \,\mathrm{d}s \\ &- \int_\Gamma [T_{x\eta}(p,Q)u(p) + T_{y\eta}(p,Q)v(p)] \,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Rovnice (5.14) a (5.15) vyjadřují řešení Navierových rovnic (3.15). Užitím vlastnosti Diracovy funkce došlo k záměně bodů P a Q, tzn. bod $Q(\xi,\eta)$ je nyní zkoumaný bod a v bodě $P(x,y)$ působí síla $\mathbf{F}$ (zdrojový bod).Vektor $\mathbf{n}$ vystupující v (5.12) vyjadřuje normálu k hranici v bodě p kde působí zatížení. Jelikož se fundamentální řešení nezmění při záměně zdrojového a zkoumaného bodu,viz (5.6), můžeme rovnice (5.14) a (5.15) přepsat a vyjádřit integrální řešení Navierových rovnic v bodě P. V dalším textu tedy bude bod $P \in \Omega$ nebo $p \in \Gamma$ představovat zkoumaný bod a bod $Q \in \Omega$ nebo $q \in \Gamma$ působiště síly. Řešení Navierových rovnic má v maticové formě tvar

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u(P) \\ v(P) \end{bmatrix} &= \int_\Omega \begin{bmatrix} U_{\xi x}(Q,P) & U_{\eta x}(Q,P) \\ U_{\xi y}(Q,P) & U_{\eta y}(Q,P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_\xi(Q) \\ b_\eta(Q) \end{bmatrix} \mathrm{d}\Omega \\ &+ \int_\Gamma \begin{bmatrix} U_{\xi x}(q,P) & U_{\eta x}(q,P) \\ U_{\xi y}(q,P) & U_{\eta y}(q,P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_\xi(q) \\ t_\eta(q) \end{bmatrix} \mathrm{d}s \\ &- \int_\Gamma \begin{bmatrix} T_{\xi x}(q,P) & T_{\eta x}(q,P) \\ T_{\xi y}(q,P) & T_{\eta y}(q,P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(q) \\ v(q) \end{bmatrix} \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Užitím (5.6) došlo k nahrazení derivací r_x a r_y za r_ξ a r_η. Složky posuvů a povrchového napětí v (5.16) mají tedy tvar

$$\begin{aligned}
U_{\xi x} &= -\frac{1}{8\pi G}\left[(3-\bar{\nu})\ln r-(1+\bar{\nu})r_\xi^2+\frac{7-\bar{\nu}}{2}\right],\\
U_{\eta x} &= U_{\eta y}=\frac{1}{8\pi G}(1+\bar{\nu})r_\xi r_\eta,\\
U_{\eta y} &= -\frac{1}{8\pi G}\left[(3-\bar{\nu})\ln r-(1+\bar{\nu})r_\eta^2+\frac{7-\bar{\nu}}{2}\right],\\
T_{\xi x} &= \frac{A_1}{r}(A_2+2r_\xi^2)r_n,\\
T_{\eta x} &= \frac{A_1}{r}(2r_\xi r_\eta r_n+A_2r_t),\\
T_{\xi y} &= \frac{A_1}{r}(2r_\xi r_\eta r_n-A_2r_t),\\
T_{\eta y} &= \frac{A_1}{r}(A_2+2r_\eta^2)r_n,
\end{aligned} \tag{5.17}$$

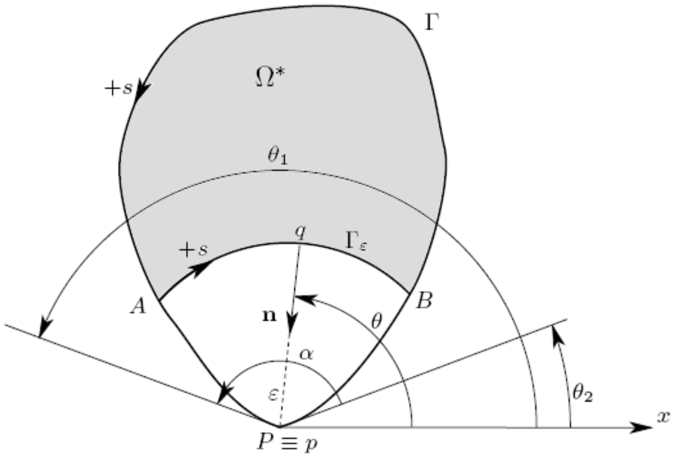
kde $r_n=r_\xi n_x+r_\eta n_y$, $r_t=-r_\xi n_y+r_\eta n_x$ a

$$A_1=-\frac{1+\bar{\nu}}{4\pi},\qquad A_2=\frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}}.$$

Hraniční integrální rovnice - vyjádření posuvů

Rovnice (5.16) vyjadřují posuvy u a v bodu $P\in\Omega$ vyvolané silou $\mathbf{F}$. Pro vyjádření posuvů na hranici tělesa Γ však (5.16) nepostačují a k vyjádření hraničních posuvů je třeba přesunout bod P na hranici Γ,tzn $P\equiv p$, a sledovat chování integrálů z (5.16). Budeme uvažovat obecný případ nehladké hranice Γ kolem tělesa Ω. Nechť bod $P\equiv p$ je rohový bod kolem kterého je opsán kruhový oblouk ε ohraničený navíc oblouky PA a PB. Dále předpokládejme oblast Ω^*, která vznikne odečtením malé kruhové výseče se středem v bodě P a poloměrem ε od oblasti Ω. Oblouk AB označme Γ_ε a součet velikostí oblouků AP a PB označme l. (Obr. 5.1). Stejně jako při určování posuvů u a v bodu P uvnitř tělesa Ω, vyjdeme při určování hraničních posuvů bodu $P\equiv p$ z rovnice (3.28), kterou aplikujeme v oblasti Ω^* na případy (1) $b_x^*=\delta(P-Q)$, $b_y^*=0$ a (2) $b_x^*=0$, $b_y^*=\delta(P-Q)$, kde $Q\in\Omega^*$ a $P\in\bar{\Omega^*}\equiv\Omega-\Omega^*$. Jelikož se bod P nachází mimo oblast Ω^*, kde $\delta(P-Q)=0$, bude integrál přes oblast Ω na levé straně rovnice (3.28) roven nule. Zavedením číslovaných indexů[2] lze

[2] $(x,y)=(x_1,x_2)$ a $(\xi,\eta)=(\xi_1,\xi_2)$



Obr. 5.1: Rozdělení oblasti Ω s po částech hladkou hranicí Γ na oblast Ω^* bez hraničního bodu $P \equiv p$

rovnice (3.28) zapsat ve tvaru

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma - l} T_{ji}(q,P)u_j(q)\ \mathrm{d}s + \int_{\Gamma_\epsilon} T_{ji}(q,P)u_j(q)\ \mathrm{d}s \\
= &\int_{\Gamma - l} U_{ji}(q,P)t_j(q)\ \mathrm{d}s + \int_{\Gamma_\epsilon} U_{ji}(q,P)t_j(q)\ \mathrm{d}s \\
+ &\int_{\Omega^*} U_{ji}(Q,P)b_j(Q)\ \mathrm{d}\Omega.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Nyní se budeme zabývat chováním integrálů v (5.18) pro $\varepsilon \to 0$. Pro tento limitní případ se hranice $\Gamma - l$ a oblast Ω^* změní na Γ a Ω. Zbývá tedy určit změnu integrálů na Γ_ε. Zkoumáním těchto integrálů pro $\varepsilon \to 0$ zjistíme[3], že obecné řešení Navierových rovnic (5.16) má tvar

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_{\xi x} & \zeta_{\eta x} \\ \zeta_{\xi y} & \zeta_{\eta y} \end{bmatrix}}_{\zeta_{ij}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \int_\Omega \begin{bmatrix} U_{\xi x} & U_{\eta x} \\ U_{\xi y} & U_{\eta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_\xi \\ b_\eta \end{bmatrix} \mathrm{d}\Omega \\
&+ \int_\Gamma \begin{bmatrix} U_{\xi x} & U_{\eta x} \\ U_{\xi y} & U_{\eta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_\xi \\ t_\eta \end{bmatrix} \mathrm{d}s \\
&- \int_\Gamma \begin{bmatrix} T_{\xi x} & T_{\eta x} \\ T_{\xi y} & T_{\eta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

kde pro matici koeficientů ζ_{ij} platí

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{pro P} \in \Omega, \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{pro P} \in \Gamma.
$$

[3]Odvození možné nalézt v [1]

Hraniční integrální rovnice - vyjádření napětí

Rovnice (5.19), pomocí kterých můžeme vypočítat posuvy zkoumaného bodu (buď uvnitř tělesa Ω nebo na jeho hranici Γ), nyní využijeme k vyjádření vztahů pro napětí ve zkoumaném bodě. Začneme s vyjádřením napětí pro bod uvnitř tělesa. Složky napětí σ_x, σ_y a τ_{xy} v bodě $P(x, y) \in \Omega$ určíme z konstitutivních vztahů (3.5). Dosazením do (3.5) přetvoření ε_x a ε_y získané derivací složek posuvů $u(P)$ a $v(P)$ podle x a y z (5.19) získáme

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \int_\Omega \{[\lambda(U_{\xi x,x} + U_{\xi y,y}) + 2GU_{\xi x,x}]b_\xi + [\lambda(U_{\eta x,x} + U_{\eta y,y}) + 2GU_{\eta x,x}]b_\eta\} \, \mathrm{d}\Omega \\ &+ \int_\Gamma \{[\lambda(U_{\xi x,x} + U_{\xi y,y}) + 2GU_{\xi x,x}]t_\xi + [\lambda(U_{\eta x,x} + U_{\eta y,y}) + 2GU_{\eta x,x}]t_\eta\} \, \mathrm{d}s \\ &- \int_\Gamma \{[\lambda(T_{\xi x,x} + T_{\xi y,y}) + 2GT_{\xi x,x}]u + [\lambda(T_{\eta x,x} + T_{\eta y,y}) + 2GT_{\eta x,x}]v\} \, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Substitucí

$$\begin{aligned} \sigma_{x\xi} &= \lambda(U_{\xi x,x} + U_{\xi y,y}) + 2GU_{\xi x,x}, \\ \sigma_{x\eta} &= \lambda(U_{\eta x,x} + U_{\eta y,y}) + 2GU_{\eta x,x}, \\ \bar{\sigma}_{x\xi} &= \lambda(T_{\xi x,x} + T_{\xi y,y}) + 2GT_{\xi x,x}, \\ \bar{\sigma}_{x\eta} &= \lambda(T_{\eta x,x} + T_{\eta y,y}) + 2GT_{\eta x,x}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

přejde (5.20) do tvaru

$$\sigma_x = \int_\Omega (\sigma_{x\xi} b_\xi + \sigma_{x\eta} b_\eta) \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma (\sigma_{x\xi} t_\xi + \sigma_{x\eta} t_\eta) \, \mathrm{d}s - \int_\Gamma (\bar{\sigma}_{x\xi} u + \bar{\sigma}_{x\eta} v) \, \mathrm{d}s. \tag{5.22}$$

Veličiny $\sigma_{x\xi}$ a $\sigma_{x\eta}$ definované už dříve v (5.7) a (5.8) vyjadřují napětí σ_x v bodě $(x, y) \in \Omega$ vyvolané jednotkovou osamělou silou působící v bodě (ξ, η) ve směru x a y. Obdobně $\bar{\sigma}_{x\xi}$ a $\bar{\sigma}_{x\eta}$ vyjadřují napětí σ_x v bodě $(x, y) \in \Omega$ vyvolané jednotkovým posunutím bodu (ξ, η) ve směru x a y. Analogicky lze vyjádřit

$$\sigma_y = \int_\Omega (\sigma_{y\xi} b_\xi + \sigma_{y\eta} b_\eta) \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma (\sigma_{y\xi} t_\xi + \sigma_{y\eta} t_\eta) \, \mathrm{d}s - \int_\Gamma (\bar{\sigma}_{y\xi} u + \bar{\sigma}_{y\eta} v) \, \mathrm{d}s, \tag{5.23}$$

$$\tau_{xy} = \int_\Omega (\tau_{xy\xi} b_\xi + \tau_{xy\eta} b_\eta) \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma (\tau_{xy\xi} t_\xi + \tau_{xy\eta} t_\eta) \, \mathrm{d}s - \int_\Gamma (\bar{\tau}_{xy\xi} u + \bar{\tau}_{xy\eta} v) \, \mathrm{d}s, \tag{5.24}$$

kde

$$
\begin{aligned}
\sigma_{y\xi} &= \lambda(U_{\xi x,x} + U_{\xi y,y}) + 2GU_{\xi x,y},\\
\sigma_{y\eta} &= \lambda(U_{\eta x,x} + U_{\eta y,y}) + 2GU_{\eta x,y},\\
\bar{\sigma}_{x\xi} &= \lambda(T_{\xi x,x} + T_{\xi y,y}) + 2GT_{\xi y,y},\\
\bar{\sigma}_{x\eta} &= \lambda(T_{\eta x,x} + T_{\eta y,y}) + 2GT_{\eta y,y},\\
\tau_{xy\xi} &= G(U_{\xi x,y} + U_{\xi y,x}),\\
\tau_{xy\eta} &= G(U_{\eta x,y} + U_{\eta y,x}),\\
\bar{\tau}_{xy\xi} &= G(T_{\xi x,y} + T_{\xi y,x}),\\
\bar{\tau}_{xy\eta} &= G(T_{\eta x,y} + T_{\eta y,x}),
\end{aligned}
$$

K vyjádření napětí hraničního bodu p opět vyjdeme z konstitutivních vztahů (3.5). Detailní odvození je možné nalézt v [1]. Výsledné vztahy mají tvar

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda(u_x + v_y) + 2Gu_x,\\
\sigma_y &= \lambda(u_x + v_y) + 2Gu_y,\\
\tau_{xy} &= \lambda(u_y + v_x),
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

kde $u_x \dots v_y$ vyjadřují příslušné derivace posuvů z (5.19).

Po vyjádření všech členů vystupujících v hraničních integrálních rovnicích můžeme přistoupit k implementaci metody hraničních prvků na rovnici (5.19), tj. na obecné řešení Navierových rovnic rovinné pružnosti. Základem této implementace je diskretizace hranice Γ na konečný počet úseček (prvků) a výpočet neznámých hraničních hodnot na těchto prvcích. Na prvcích (elementech) rozlišujeme *uzlové body*, ve kterých předepisujeme okrajové podmínky a ve kterých určujeme neznámé hraniční veličiny a *koncové (extrémní) body*. V dalším textu se budeme zabývat tzv. konstantními prvky obsahující jeden uzlový bod, který se nachází nejčastěji uprostřed prvku mezi dvěma koncovými body. Hodnota veličiny v uzlovém bodě tohoto prvku je stejná po celé délce prvku. Více o diskretizaci složitějších prvků lze nalézt v [1]. Nejdříve se budeme zabývat výpočtem neznámých hraničních veličin pro daný rovinný problém, pomocí kterých můžeme následně vypočítat zkoumané veličiny (posuvy a napětí) uvnitř tělesa.

Výpočet neznámých hraničních veličin

Mějme rozdělenou hranici Γ na N konstantních prvků. Zavedením značení $\{u\}^i = (u^i, v^i)^T$ a $\{t\}^i = (t^i_x, t^i_y)^T$ pro posuvy a povrchové napětí v i-tém uzlu a za předpokladu hladké hranice v uzlovém bodě mají rovnice (5.19) tvar

$$
\frac{1}{2}\{u\}^i + \sum_{j=1}^{n} [\hat{H}]^{ij}\{u\}^j = \sum_{j=1}^{n} [G]^{ij}\{t\}^j + \{F\}^i, \tag{5.26}
$$

kde

$$[G]^{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_j} U_{\xi x}(q,p_i)\ \mathrm{d}s_q & \int_{\Gamma_j} U_{\eta x}(q,p_i)\ \mathrm{d}s_q \\ \int_{\Gamma_j} U_{\xi y}(q,p_i)\ \mathrm{d}s_q & \int_{\Gamma_j} U_{\eta y}(q,p_i)\ \mathrm{d}s_q \end{bmatrix}, \tag{5.27}$$

$$[\hat{H}]^{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_j} T_{\xi x}(q,p_i)\ \mathrm{d}s_q & \int_{\Gamma_j} T_{\eta x}(q,p_i)\ \mathrm{d}s_q \\ \int_{\Gamma_j} T_{\xi y}(q,p_i)\ \mathrm{d}s_q & \int_{\Gamma_j} T_{\eta y}(q,p_i)\ \mathrm{d}s_q \end{bmatrix}, \tag{5.28}$$

$$\{F\}^{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} U_{\xi x}(Q,p_i)b_\xi(Q) + U_{\eta x}(Q,p_i)b_\eta(Q)\ \mathrm{d}\Omega_Q \\ \int_{\Omega} U_{\xi y}(Q,p_i)b_\xi(Q) + U_{\eta y}(Q,p_i)b_\eta(Q)\ \mathrm{d}\Omega_Q \end{bmatrix}, \tag{5.29}$$

kde $p_i, q \in \Gamma$ a $Q \in \Omega$. Bod p_i zůstává neměnný (referenční bod), zatímco bod q se mění přes j-tý prvek (integrační bod). V každém prvku máme dvě neznámé veličiny (posuvy či povrchové napětí). Celkový počet neznámých a tedy i rovnic (5.26) je $2N$. Pokud máme smíšené okrajové podmínky, tzn. na hranici jsou zadány jak posuvy tak i povrchové napětí, vystupují neznámé veličiny v (5.26) na obou stranách rovnic. Je tedy třeba oddělit neznámé veličiny od známých.
Rovnice (5.26) nejprve vyjádříme v maticové formě

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} + \{F\}, \tag{5.30}$$

kde

$$[H] = [\hat{H}] + \frac{1}{2}[I],$$

Řád matic $[H]$ a $[G]$ je $2N \times 2N$ a vektory $\{u\}$, $\{t\}$ a $\{F\}$ obsahují $2N$ veličin. Složky (5.30) jsou definovány jako

$$[G]^{ij} = \begin{bmatrix} [G]^{11} & [G]^{12} & \cdots & [G]^{1N} \\ [G]^{21} & [G]^{22} & \cdots & [G]^{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [G]^{N1} & [G]^{N2} & \cdots & [G]^{NN} \end{bmatrix},$$

$$[H]^{ij} = \begin{bmatrix} [H]^{11} & [H]^{12} & \cdots & [H]^{1N} \\ [H]^{21} & [H]^{22} & \cdots & [H]^{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [H]^{N1} & [H]^{N2} & \cdots & [H]^{NN} \end{bmatrix},$$

$$\{u\} = \begin{bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^2 \\ \vdots \\ \{u\}^N \end{bmatrix}, \qquad \{t\} = \begin{bmatrix} \{t\}^1 \\ \{t\}^2 \\ \vdots \\ \{t\}^N \end{bmatrix}, \qquad \{F\} = \begin{bmatrix} \{F\}^1 \\ \{F\}^2 \\ \vdots \\ \{F\}^N \end{bmatrix}.$$

$2N$ rovnic (5.30) obsahují celkem $4N$ hraničních hodnot, $2N$ posuvů a $2N$ hodnot povrchových napětí. $2N$ hodnot daných okrajovými podmínkami je známých, zbylé neznámé hodnoty určíme z upravením (5.30) na tvar

$$[A]\{X\} = \{R\} + \{F\}, \tag{5.31}$$

kde $[A]$ je čtvercová matice koeficientů řádu $2N$, $\{X\}$ je vektor $2N$ neznámých hodnot a $\{R\}$ je vektor obsahující součty sloupců matic [G] a [H] vynásobené odpovídajícími známými hraničními veličinami.

Výpočet posuvů uvnitř tělesa

Po vyřešení rovnic (5.31) jsou známy všechny hraniční hodnoty. Následkem toho, posuvy $\{u\}^i$ v bodě $P_i(x, y)$ uvnitř tělesa Ω mohou být vypočteny z (5.16), která po diskretizaci přejde na tvar

$$\{u\}^i = \sum_{j=1}^{n} [G]^{ij}\{t\}^j - \sum_{j=1}^{n} [\hat{H}]^{ij}\{u\}^j + \{F\}^i. \tag{5.32}$$

Matice $[G]^{ij}$, $[\hat{H}]^{ij}$ a vektor $\{F\}^i$ lze sestavit nahrazením $P \in \Omega$ za $p_i \in \Gamma$ v (5.27), (5.28) a (5.29).

Výpočet napětí uvnitř tělesa

Výpočet napětí v bodě $P_i(x, y)$ uvnitř oblasti Ω vychází z rovnic (5.22), (5.23) a (5.24), které po diskretizaci mají tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^i = \sum_{j=1}^{N} [\sigma]^{ij}\{t\}^j - \sum_{j=1}^{N} [\bar{\sigma}]^{ij}\{u\}^j + \{S\}^i,$$

kde matice $[\sigma]^{ij}$, $[\bar{\sigma}]^{ij}$ a vektor $\{S\}^i$ jsou určeny následovně

$$\begin{aligned}
[\sigma]^{ij} &= \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_j} \sigma_{x\xi}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q & \int_{\Gamma_j} \sigma_{x\eta}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q \\ \int_{\Gamma_j} \sigma_{y\xi}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q & \int_{\Gamma_j} \sigma_{y\eta}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q \\ \int_{\Gamma_j} \tau_{xy\xi}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q & \int_{\Gamma_j} \tau_{xy\eta}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q \end{bmatrix}, \\
[\bar{\sigma}]^{ij} &= \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_j} \bar{\sigma}_{x\xi}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q & \int_{\Gamma_j} \bar{\sigma}_{x\eta}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q \\ \int_{\Gamma_j} \bar{\sigma}_{y\xi}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q & \int_{\Gamma_j} \bar{\sigma}_{y\eta}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q \\ \int_{\Gamma_j} \bar{\tau}_{xy\xi}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q & \int_{\Gamma_j} \bar{\tau}_{xy\eta}(q, P_i)\,\mathrm{d}s_q \end{bmatrix}, \\
\{S\}^{ij} &= \begin{bmatrix} \int_{\Omega}[\sigma_\xi(Q, P_i)b_\xi(Q) + \sigma_\eta(Q, P_i)b_\eta(Q)]\,\mathrm{d}\Omega \\ \int_{\Omega}[\sigma_\xi(Q, P_i)b_\xi(Q) + \sigma_\eta(Q, P_i)b_\eta(Q)]\,\mathrm{d}\Omega \\ \int_{\Omega}[\tau_{xy\xi}(Q, P_i)b_\xi(Q) + \tau_{xy\eta}(Q, P_i)b_\eta(Q)]\,\mathrm{d}\Omega \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Program pro řešení problémů rovinné pružnosti

K praktickým výpočtům rovinných problémů budeme využívat počítačový program ELBECON[4] vytvořený v jazyce FORTRAN. Omezením při použití programu je zanedbání objemových sil ve výpočtech a diskretizace hranice konstantními prvky.

Popis programu

Program se skládá z hlavního programu a z deseti navazujících podprogramů. Hlavní program definuje počet hraničních prvků N, počet uzavřených hranic NB a počet vnitřních bodů IN. Dále otevírá složku INPUTFILE, která obsahuje informace o modelu geometrie a vazeb a složku OUTPUTFILE, do které jsou zapisovány výsledky výpočtu. Složka INPUTFILE obsahuje všechna vstupní data potřebná pro výpočet, tzn. materiálové charakteristiky E a ν, souřadnice hraničních a vnitřních bodů, okrajové podmínky v uzlových bodech, počet prvků na jednotlivých hranicích[5] a typ rovinné úlohy (rovinná deformace či napjatost.) Následující seznam popisuje postupné spouštění podprogramů a průběh výpočtu:

INPUT	Načítá data z INPUTFILE.
GMATICE	Vytváří matici $[G]$ definovanou rovnicí (5.27).
HMATICE	Vytváří matici $[H]$ definovanou rovnicemi (5.28) a (5.31).
ABMATICE	Upravuje matice $[H]$ a $[G]$ na základě okrajových podmínek.
VYPOCET	Řeší systém lineárních rovnic $[A]\{X\} = \{R\}$.
REORDEREL	Upravuje hraniční veličiny a tvar matic $\{u\}$, $\{v\}$, $\{t_x\}$ a $\{t_y\}$.
UVIN	Počítá složky posuvů u a v ve vnitřních bodech tělesa.
NAPETIHRAN	Počítá napětí σ_x, σ_y a τ_{xy} v hraničních uzlech.
NAPETIIN	Počítá napětí σ_x, σ_y a τ_{xy} ve vnitřních bodech tělesa.
OUTPUT	Zapisuje výsledky do složky OUTPUTFILE.

[4]Detailní popis programu lze nalézt v [1]

[5]počet hranic určuje počet otvorů v materiálu

6 APLIKACE METODY HRANIČNÍCH PRVKŮ

Cílem této kapitoly je sestavení výpočtových modelů pro aplikaci metody hraničních prvků na úlohy rovinné pružnosti s různými typy koncentrátorů napětí. Zkoumanými objekty, na kterých budou výpočtové modely vytvářeny představují součásti s danými koncentrátory napětí. Bude ukázán vliv diskretizace hranice oblasti i diskretizace hranice jednotlivých koncentrátorů na přesnost řešení. Následně budou porovnány výsledky získané analytickým přístupem, metodou hraničních prvků a metodou konečných prvků. V následujících příkladech je pro řešení metodou konečných prvků použit výpočtový software ANSYS a ANSYS Workbench. Výsledky metodou hraničních prvků byly získány použitím programu ELBECON popsaného v předcházející kapitole.

6.1 Kruhový otvor

V prvním příkladu bude koncentrátorem napětí malý kruhový otvor. Objektem je v tomto případě součást čtvercového tvaru obsahující ve svém středu tento kruhový otvor. Tato jednoduchá úloha byla zvolena z důvodu snadného ověření funkčnosti programu pro výpočet MHP. Bude ukázán vliv zjemňování sítě hraničních prvků na hodnotu maximálního napětí a výsledné hodnoty budou porovnány s analytickými výsledky a výsledky získanými MKP.

Zadání

Proveďte napěťovou analýzu u součásti zatížené dle Obr. 6.1 vyrobené z ocelového plechu. Zadané parametry:

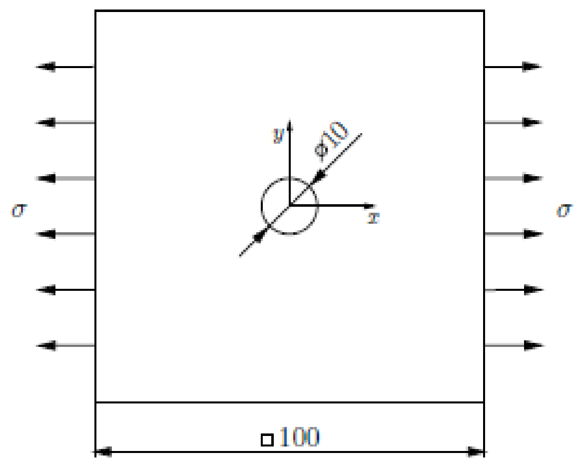
- modul pružnosti v tahu E=2,1·10^5 MPa
- Poissonova konstanta $\nu = 0,3$
- tahové napětí σ=1 MPa

Model geometrie

Uvažujme případ rovinné napjatosti. Geometrie objektu je dána délkou hrany čtvercové součásti a průměrem kruhového otvoru. Rozměry tělesa jsou zobrazeny na Obr. 6.1.

Model aktivace

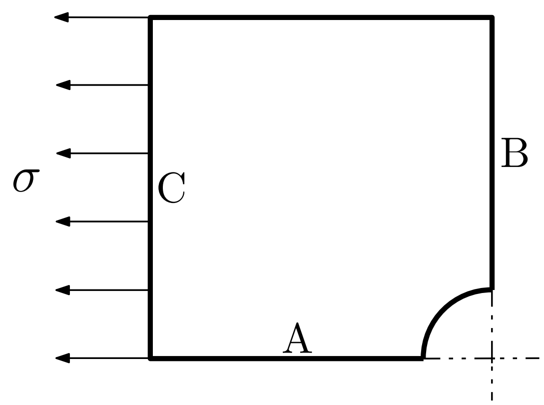
Objekt je aktivován silovým zatížením, vytvářejícím na povrchu tělesa tahové napětí σ, viz Obr. 6.1.



Obr. 6.1: Rozměry zadané součásti

Model okrajových podmínek

Úloha je symetrická podle osy x a y a bude proto řešena pouze čtvrtina součásti. Tato redukce je výhodná z důvodu menšího počtu rovnic a také z důvodu zamezení pohybu tělesa v prostoru. Na Obr. 6.2 jsou označeny části hranice, na kterých budou předepsány okrajové podmínky. Úsečky A a B označují místa s geometrickými okrajovými podmínkami zamezující posuvu v ose y (úsečka A) a posuvu v ose x (úsečka B). Na části hranice C je předepsána silová podmínka.



Obr. 6.2: Čtvrtina součásti s označením míst pro okrajové podmínky

Model vlastností struktury

Uvažujeme homogenní, lineárně pružný, izotropní materiál definovaný dvěma materiálovými charakteristikami E a ν.

Model chování

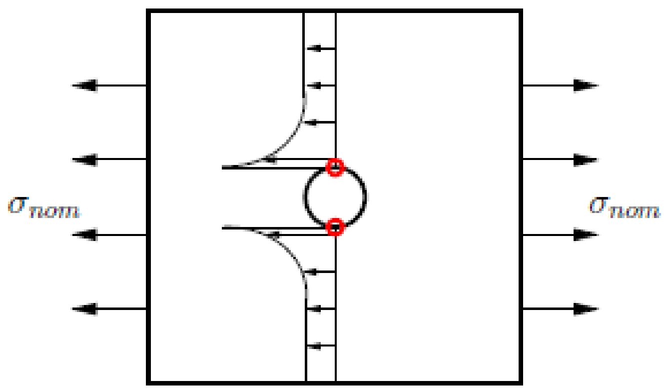
V [2] je uvedeno, že projevy zatíženého tělesa jsou v každém jeho bodě dány vektorem posuvu, tenzorem přetvoření a tenzorem napětí a model chování bude obsahovat ty veličiny z modelu projevů, které jsou podstatné z hlediska řešeného problému. Dle tohoto členění je podstatný pouze tenzor napětí. V případě rovinné napjatosti lze redukovat podstatné složky tenzoru napětí pouze na složky σ_x, σ_y a τ_{xy}

Analytický přístup

Hodnotu maximálního napětí v součásti očekáváme v blízkosti kruhového otvoru. Schématické rozložení napětí v součásti je na obr. 6.3. Pro výpočet maximálního napětí použijeme vzorec [19]

$$\sigma_{max} = \alpha \cdot \sigma_{nom}, \tag{6.1}$$

kde α je tvarový součinitel koncentrace napětí. Pro kruhový otvor, jehož velikost je zanedbatelná oproti ostatním rozměrům součásti je α rovna 3 [20]. Maximální napětí v součásti má tedy podle analytického přístupu hodnotu 3 MPa.



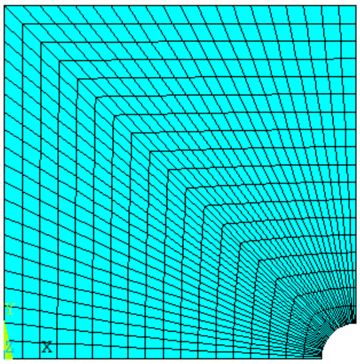
Obr. 6.3: Rozložení napětí v průřezu tělesa s kruhovým otvorem s vyznačením kritických míst s maximální hodnotou napětí

Metoda konečných prvků

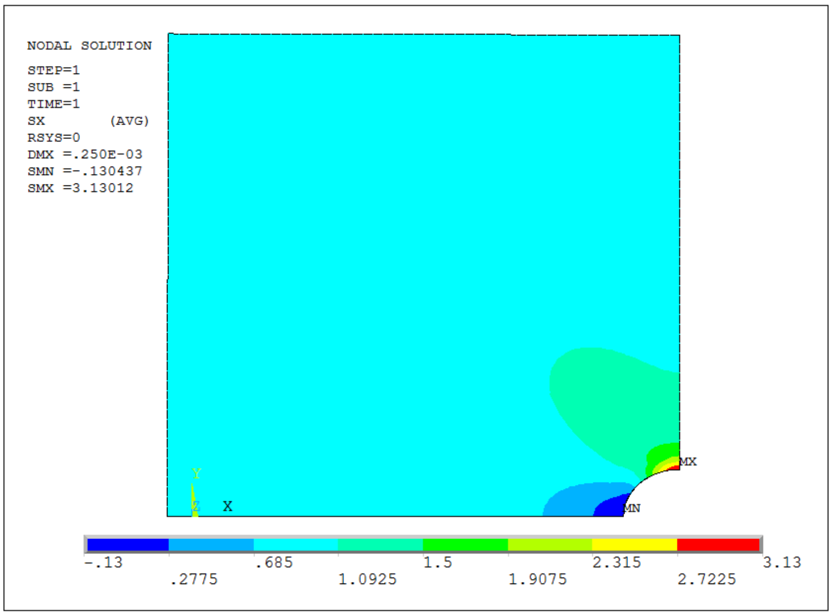
Při popisu výpočtu metodou konečných prvků využijeme provedenou analýzu úlohy spojenou s vytvořením dílčích modelů. Tímto rozčleněním výpočtového modelu jsme strukturovaně popsali důležitá vstupní data nutná pro výpočet.

Postup výpočtu

V programu ANSYS nejdříve definujeme model materiálu zadáním konstant E a ν a následně vytvoříme model geometrie dle Obr. 6.1. Na tomto modelu vytvoříme síť konečných prvků. Pro řešení této jednoduché rovinné úlohy byl zvolen čtyřuzlový prvek PLANE182. Dále předepíšeme okrajové podmínky na jednotlivé části hranice dle Obr. 6.2 a spustíme výpočet. Provedeme 3 výpočty, velikost prvku budeme snižovat postupně z 5 mm v prvním výpočtu na 2,5 mm a následně na 1 mm. Síť konečných prvků pro délku prvku 2,5 mm je vidět na Obr. 6.4. Rozložení maximálního napětí (v tomto případě maximální napětí představuje normálové napětí σ_x) je vidět na Obr. 6.5.



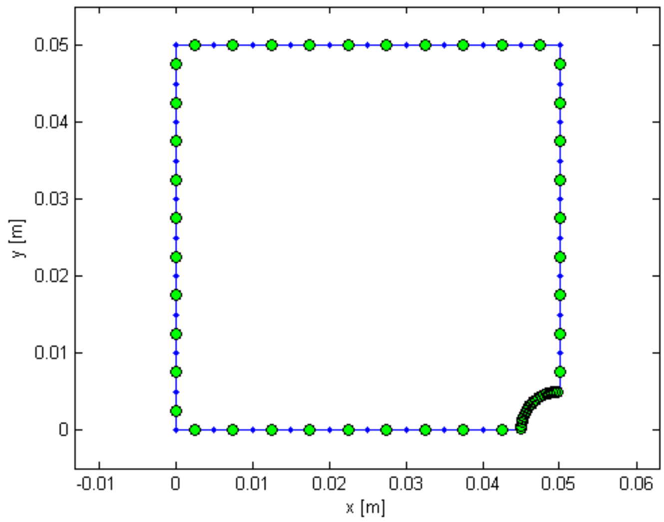
Obr. 6.4: Síť konečných prvků s délkou hrany 2,5 mm



Obr. 6.5: Vykreslení napětí σ_x

Metoda hraničních prvků

Postup pro výpočet metodou hraničních prvků je podobný předcházejícímu postupu u MKP. Prvním krokem je definice materiálu a vytvoření modelu geometrie. Typ prvku v tomto případě nevolíme, neboť jak bylo zmíněno dříve, metoda hraničních prvků popisována a aplikována v této práci využívá diskretizaci hranice konstantními prvky. Vstupní data zapisujeme do textového souboru INPUTFILE, ze kterého budou poté načtena programem ELBECON. Model materiálu je popsán materiálovými charakteristikami E a ν. V případě MHP není nutné vytvářet model geometrie (myšleno křivky, plochy a objemy) jako u MKP, ale rovnou vytváříme síť hraničních prvků definováním souřadnic extrémních bodů konstantních prvků podél hranice tělesa. Uzlové body, ve kterých jsou vypočítávány hodnoty napětí se nachází uprostřed extrémních bodů. Rozmístění extrémních a uzlových bodů je na Obr. 6.6, kde extrémní body jsou označeny modře a uzlové body zeleně. Po vytvoření sítě hra-



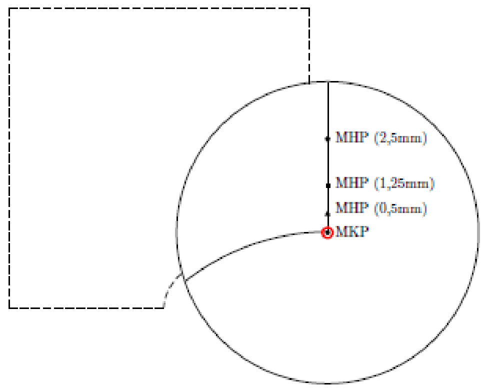
Obr. 6.6: Síť hraničních (konstantních) prvků s velikostí prvku 5 mm (extrémní body označeny modře, uzlové body zeleně)

ničních prvků předepíšeme geometrické a silové okrajové podmínky do jednotlivých uzlů podle Obr. 6.2 a provedeme výpočet. Vyřešením úlohy metodou hraničních prvků získáme hodnoty napětí a deformace v daných uzlových bodech na hranici součásti. Pokud nás zajímá i rozložení napětí či deformace uvnitř tělesa, musíme před provedením výpočtu zadat souřadnice vnitřních bodů, ve kterých se mají veličiny vypočítat. Stejně jako v případě MKP provedeme tři výpočty pro tři různé velikosti prvků, přičemž jejich velikost je stejná jako u MKP. Maximální hodnoty napětí σ_x pro různé hustoty sítě jsou vypsány v tabulce, Tab. 6.1. Poloha bodů, ve kterých bylo naměřeno maximální napětí σ_x u jednotlivých výpočtů je zobrazena

	$\sigma_{x,max}$[MPa]		Počet prvků	
Velikost prvku	MHP	MKP	MHP	MKP
5 mm	1,756	2,509	58	180
2,5 mm	2,126	2,925	116	720
1 mm	2,575	3,130	290	4500

Tab. 6.1: Maximální hodnoty napětí σ_x při různé hustotě sítě prvků

na Obr. 6.7. Uzlové body, ve kterých bylo naměřeno maximální napětí se nachází v



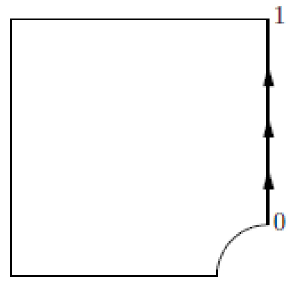
Obr. 6.7: Poloha bodů s maximálním napětím pro jednotlivé výpočty s červeně označeným kritickým bodem součásti (Číslo v závorce značí vzdálenost od kritického bodu)

blízkosti kritického bodu znázorněného na Obr. 6.3. V případě MKP je uzlový bod totožný s kritickým bodem, v případě MHP se uzlový bod ke kritickému bodu blíží při zjemňování sítě. Je to dáno použitím konstantního hraničního prvku, při kterém se v kritickém bodě nachází vždy extrémní bod konstantního prvku. Tomuto trendu odpovídají i hodnoty napětí pro MHP v tabulce 6.1, které jsou při stejné velikosti prvků menší než hodnoty napětí u MKP. Pro ilustraci je v tabulce, Tab. 6.2, ukázán vliv zjemnění sítě hraničních prvků (a tedy přibližování uzlových bodů kritickému) na hodnotu maximálního napětí σ_x a je zde také porovnán počet prvků použitých při jednotlivých výpočtech. Posledním výstupem této úlohy bude vykreslení napětí

Velikost prvku	$\sigma_{x,max}$[MPa]	Počet prvků
0,5 mm	2,809	580
0,2 mm	3,009	1400

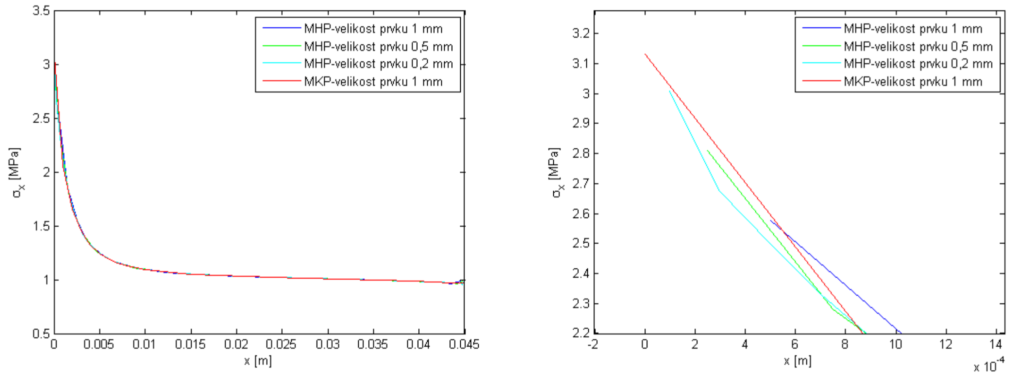
Tab. 6.2: Maximální hodnoty napětí σ_x při zhušťování sítě hraničních prvků

σ_x po cestě podél vertikální osy symetrie, jak je znázorněno na Obr. 6.8. Porovnání



Obr. 6.8: Cesta vykreslení napětí σ_x v součásti

hodnot napětí σ_x získaných výpočtem MHP a MKP uvnitř materiálu je k vidění na Obr 6.9.



Obr. 6.9: Rozložení napětí σ_x podél vertikální osy symetrie s detailem na okolí kruhového otvoru

Diskuze výsledků

V příkladu 1 se výsledky získané oběma numerickými metodami při zjemňování jejich sítě přibližovaly k analytickému výsledku. Při stejné velikosti hraničních a konečných prvků dosahovaly konečné prvky přesnějších výsledků. Pro obdržení adekvátních výsledků hraničními prvky muselo dojít ke zjemnění jejich sítě. Po zjemnění sice narostl počet hraničních prvků, avšak jejich celkový počet byl stále menší než počet konečných prvků. Výsledky také poukázaly na nedokonalost konstantních hraničních prvků spočívající v poloze uzlového bodu uprostřed prvku. Tato nevýhoda musí být kompenzována zjemněním sítě v blízkosti koncentrátorů napětí.

6.2 Eliptický otvor

V tomto příkladu je koncentrátorem napětí otvor tvaru elipsy. Zkoumaným objektem je opět celá součást obsahující eliptický otvor ve svém středu.

Zadání

Proveďte deformačně-napěťovou analýzu u součásti čtvercového tvaru se středovým eliptickým otvorem zatíženou dle Obr. 6.10.Porovnejte napětí a deformace vypočtené metodou konečných a hraničních prvků. Součást je vyrobena z ocelového plechu. Zadané parametry

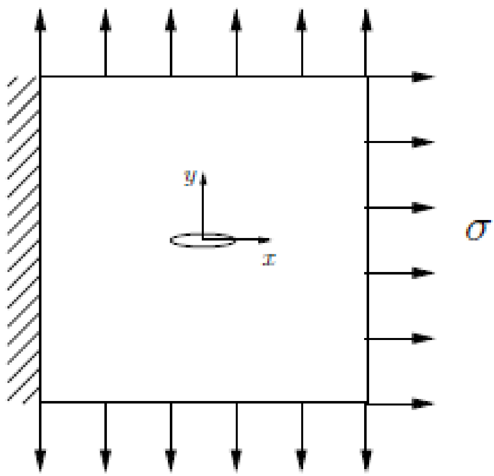
- modul pružnosti v tahu E=2,1·10^5 MPa
- Poissonova konstanta $\nu = 0,3$
- tahové napětí σ=9 MPa
- rozměry součásti: délka hrany L=1000mm, hlavní poloosa elipsy a=100mm, vedlejší poloosa elipsy c=10mm

Model geometrie

Uvažujme opět případ rovinné napjatosti. Podstatnými geometrickými veličinami jsou délka hrany čtvercové součásti a dále rozměry elipsy. Všechna data charakterizující geometrii součásti jsou v zadání úlohy.

Model vazeb

Objekt je vázán na levé straně vetknutím k okolnímu prostředí, viz Obr. 6.10.



Obr. 6.10: Zadaná součást se znázorněním okrajových podmínek

Model aktivace

Na objekt působí silové zatížení, vyvolávající na třech částech hranice tělesa tahové napětí σ, viz Obr. 6.10.

Model okrajových podmínek

Úloha je symetrická podél osy x a je možné řešení redukovat na analýzu pouze poloviny součásti. Součást však bude analyzována jako celek za účelem ověření funkčnosti programu ELBECON pro řešení systémů s více hranicemi. Na levé části hranice předepíšeme geometrickou podmínku zabraňující posuvům v ose x i y. Na zbylých třech částech hranice předepíšeme silovou podmínku dle Obr. 6.10.

Model vlastností struktury

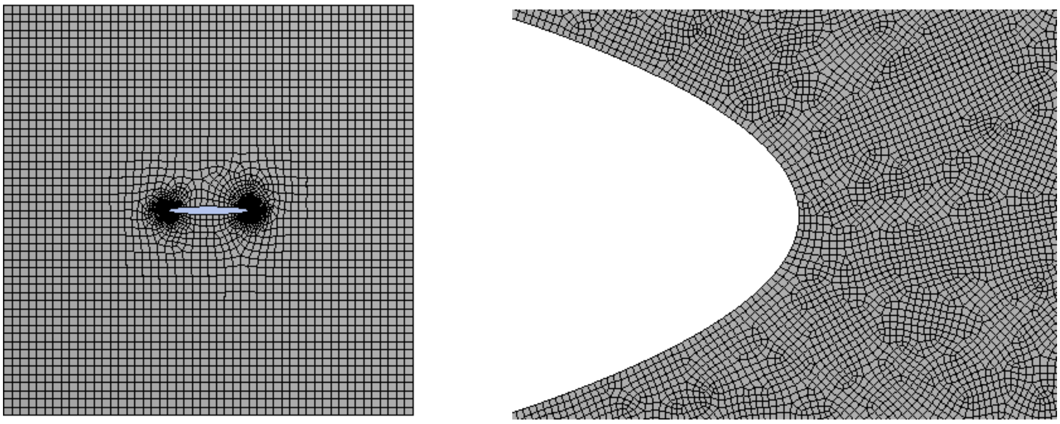
Předpokládáme homogenní, lineárně pružný, izotropní materiál. Podstatnými vlastnostmi jsou materiálové charakteristiky E a ν definované v zadání.

Model chování

Podstatnými vlastnostmi jednotlivých bodů zatíženého objektu jsou vektor posuvu, tenzor přetvoření a tenzor napětí.

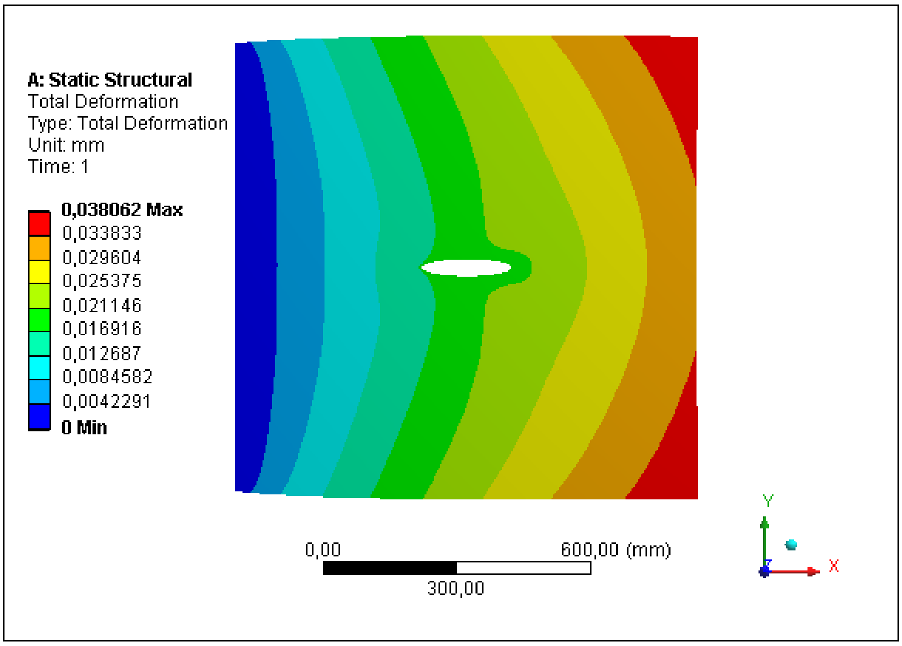
Metoda konečných prvků

Prvním krokem analýzy je definice materiálu a vytvoření modelu geometrie. Protože jsme se rozhodli zanedbat symetrii při řešení této úlohy, je model geometrie dán obrázkem Obr. 6.10. Následuje vytvoření sítě konečných prvků. Kvůli eliptickému otvoru nelze vytvořit mapovaná síť, proto nebudeme porovnávat vliv zvyšování počtu prvků na výsledné hodnoty napětí u MKP, ale budeme zkoumat pouze vliv diskretizace u MHP. Síť konečných prvků je vidět na Obr. 6.11. Nejedná se o prvotní konfiguraci sítě. Postupným zjemňováním konečnoprvkové sítě v okolí koncentrátoru bylo dosahováno různé hodnoty maximálního napětí v blízkosti eliptického otvoru. Při takovém zjemnění, kdy změna hodnoty maximálního napětí nepřesáhla 2%, byla úprava sítě přerušena. Jelikož jde o úlohu rovinné pružnosti s nepravidelnou sítí, byl použit prvek typu PLANE 183. Po vytvoření sítě konečných prvků zadáme okrajové podmínky a provedeme výpočet. Chování součásti podrobené tahovému zatížení σ je znázorněno na obrázcích 6.12 a 6.13, které popisují deformaci součásti a rozložení dominantního napětí σ_y v součásti. Maximální hodnota napětí je podle očekávání v blízkosti koncentrátoru napětí v místě největšího zakřivení otvoru, jak je vidět na

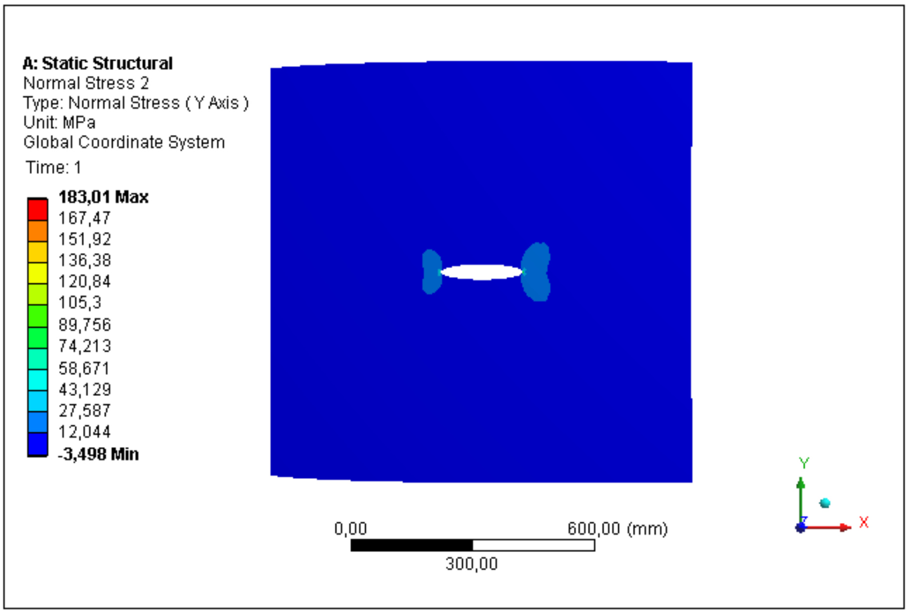


Obr. 6.11: Síť konečných prvků v součásti a v blízkosti eliptického otvoru

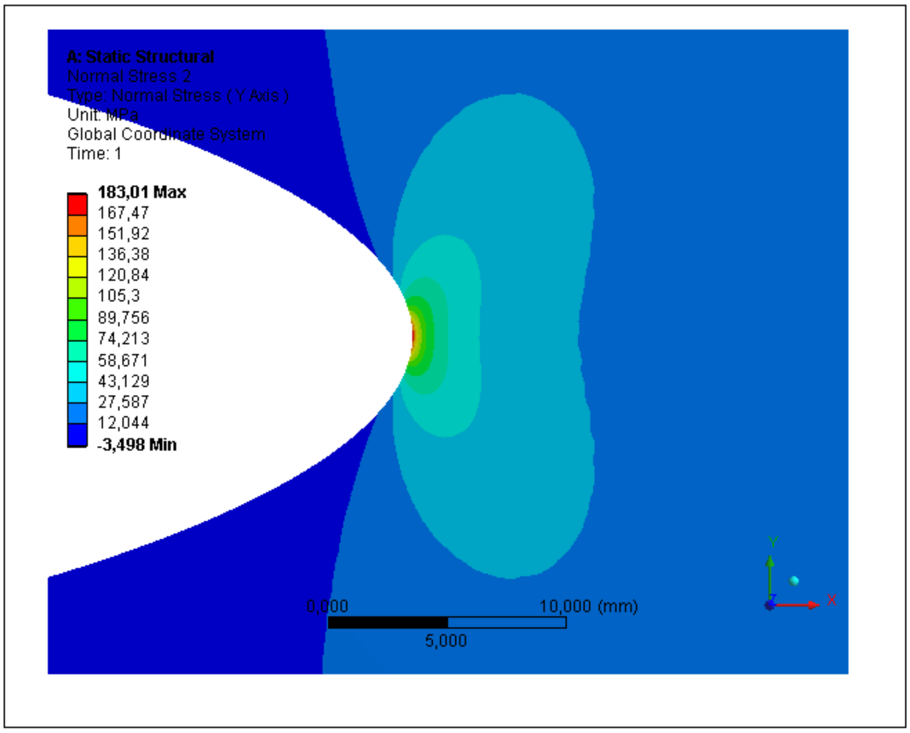
Obr. 6.13 a detailu eliptického otvoru, které je na Obr. 6.14.



Obr. 6.12: Výsledná deformace součásti po zatížení



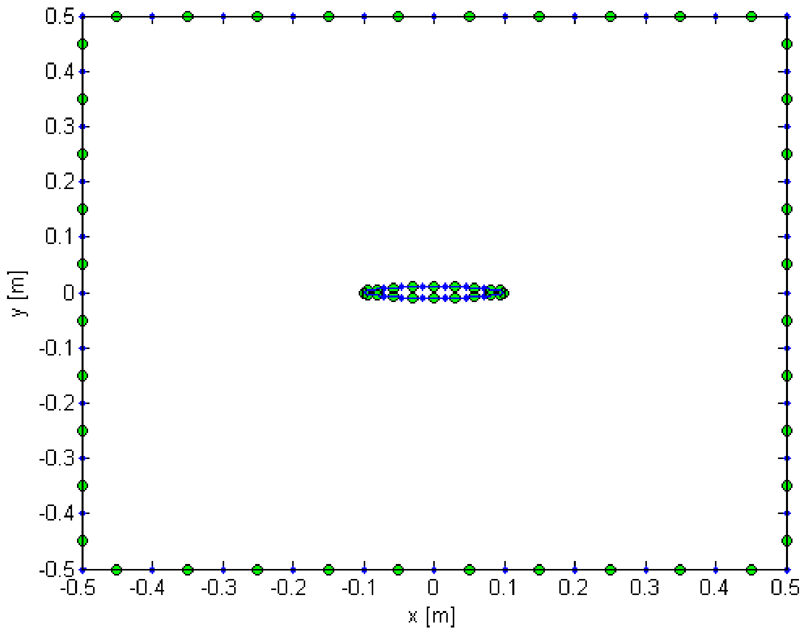
Obr. 6.13: Rozložení napětí σ_y v součásti



Obr. 6.14: Rozložení napětí σ_y v blízkosti eliptického otvoru

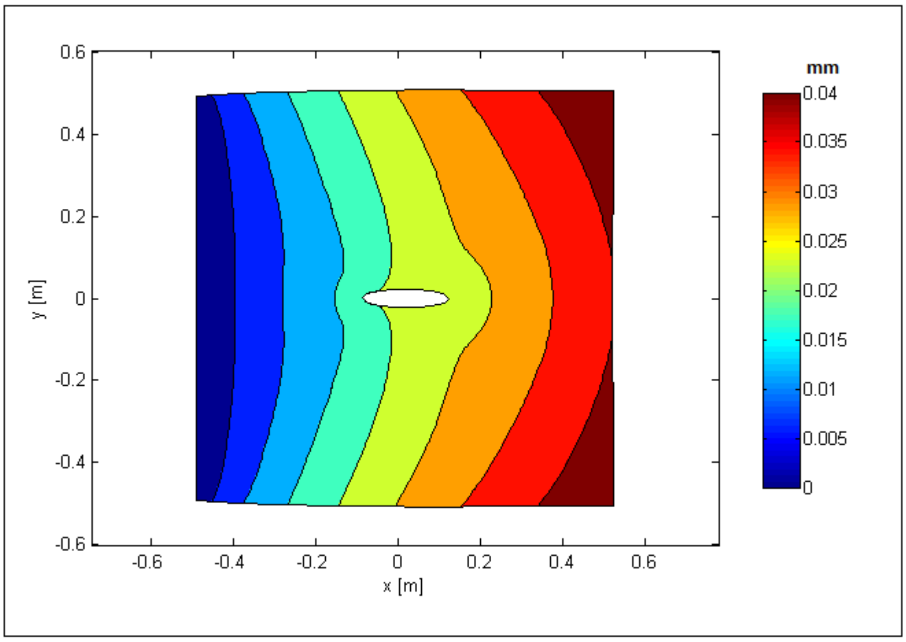
Metoda hraničních prvků

Opět nejdříve nadefinujeme model materiálu. Začneme tedy definicí materiálových charakteristik E a ν. Poté určíme souřadnice extrémních bodů hraničních prvků. Extrémní body by měly být voleny tak, aby v oblasti největší křivosti elipsy jejich počet narostl. Toho docílíme definováním souřadnic extrémních bodů na elipse pomocí konstantního přírůstku úhlu $\Delta\theta$, kde $\Delta\theta = 2\pi/n$ a n je počet hraničních prvků na elipse. Dále do uzlů hraničních prvků předepíšeme okrajové podmínky dle Obr. 6.10. Nakonec zadáme souřadnice vnitřních bodů, ve kterých nás zajímají hodnoty napětí a deformace a provedeme výpočet. Schéma sítě hraničních prvků je zobrazeno na Obr. 6.15. Vzhledem k diskretizaci hranice konstantními prvky, je třeba zadat dostatečné množství extrémních bodů na eliptickém otvoru, abychom dosáhli dostatečně jemné sítě v blízkosti největšího zakřivení elipsy.



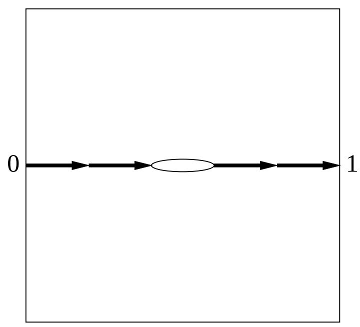
Obr. 6.15: Síť hraničních (konstantních) prvků (extrémní body označeny modře, uzlové body zeleně)

Program ELBECON umožňuje pouze výpočet napětí a deformací v konkrétních vnitřních bodech součásti. Pro grafické vyjádření zkoumaných veličin uvnitř součásti je třeba data upravit v jiném matematickém softwaru. Rozmístěním vnitřních bodů uvnitř celé oblasti a jejich úpravou v programu MATLAB lze získat grafický výstup rozložení napětí či deformace v součásti, jak ukazují Obr. 6.16 a 6.18. Na Obr. 6.19 je pro větší přehlednost ukázán detail rozložení napětí v blízkosti eliptického otvoru, kde je hodnota napětí σ_y maximální.

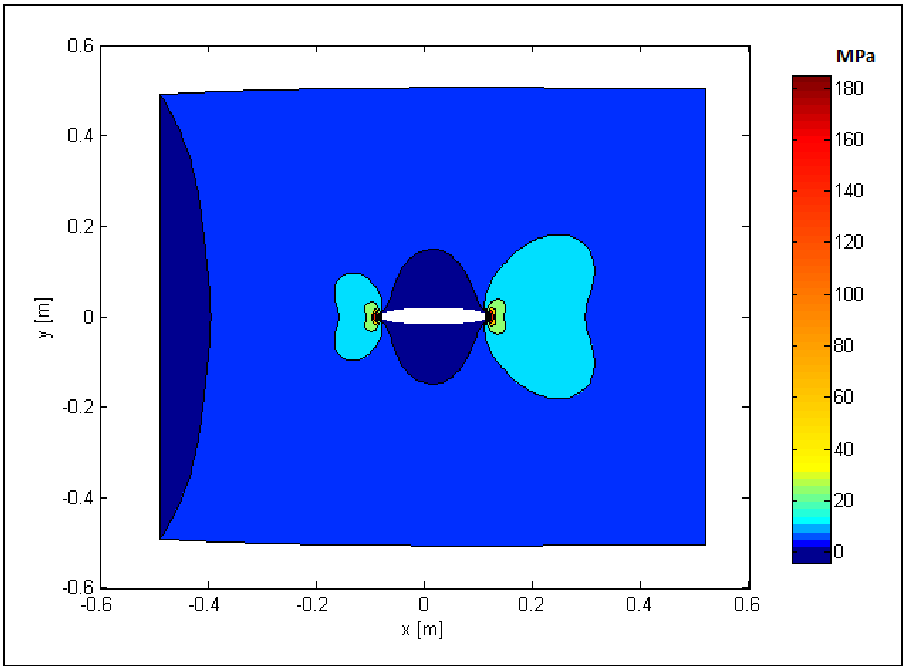


Obr. 6.16: Výsledná deformace součásti po zatížení

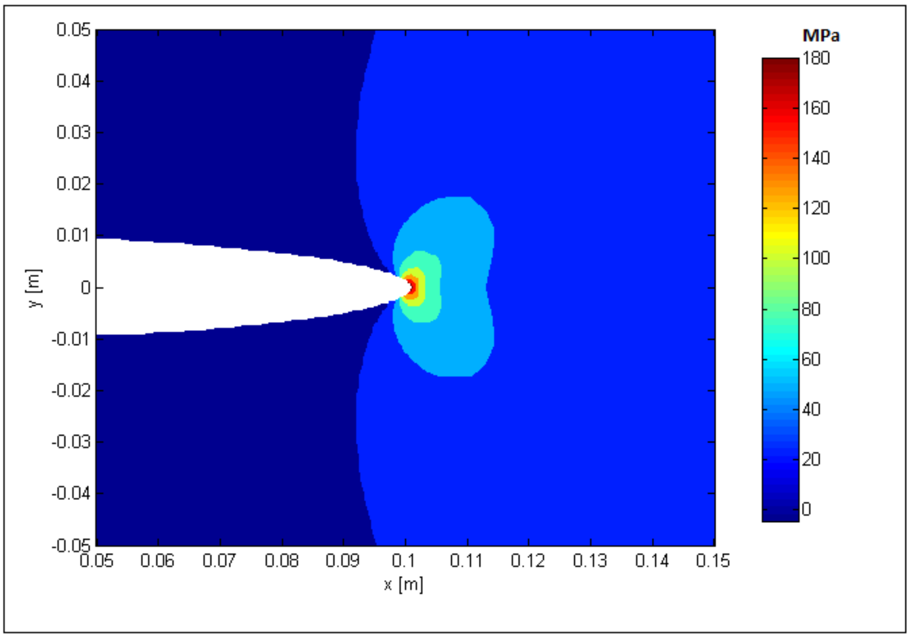
Nyní se podívejme na vliv hustoty sítě hraničních prvků na rozložení napětí v součásti. V příkladu s kruhovým otvorem se zjemňovala síť rovnoměrně po celé hranici součásti. V tomto případě byl na vnější hranici ponechán stejný počet hraničních prvků (400 prvků rovnoměrně rozdělených na všechny 4 části hranice) pro všechny výpočty. Počet prvků na eliptickém otvoru se měnil z minimální hodnoty 100 prvků až na 1500 prvků. Výsledky jednotlivých výpočtů jsou vidět na Obr. 6.20 a 6.21, které popisují hodnoty napětí σ_x a σ_y po cestě podél osy x, viz Obr 6.17.



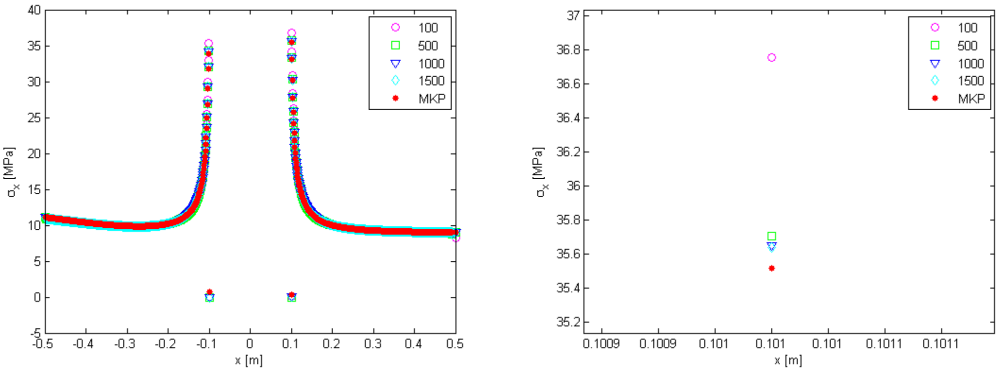
Obr. 6.17: Cesta vykreslení napětí σ_x a σ_y v součásti



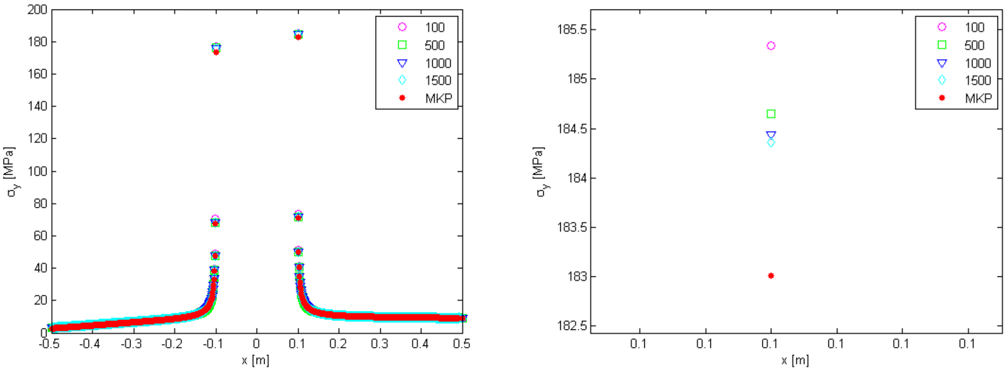
Obr. 6.18: Rozložení napětí σ_y uvnitř součásti



Obr. 6.19: Rozložení napětí σ_y v blízkosti eliptického otvoru.



Obr. 6.20: Rozložení napětí σ_x podél osy x procházející hlavními poloosami eliptického otvoru s detailem bodu v blízkosti hranice otvoru. Legenda značí počet hraničních prvků na eliptickém otvoru



Obr. 6.21: Rozložení napětí σ_y podél osy x procházející hlavními poloosami eliptického otvoru s detailem bodu na hranici otvoru. Legenda značí počet hraničních prvků na eliptickém otvoru

Diskuze výsledků

Jak lze pozorovat z výsledků rozložení napětí a deformace uvnitř součásti a také z grafů, které vykreslují napětí σ_x a σ_y podél osy x, výsledky získané metodou hraničních prvků jsou velmi blízké výsledkům získaným metodou konečných prvků. V tomto případě byla nevýhoda v podobě diskretizace konstantními prvky kompenzována zjemněním sítě hraničních prvků v blízkosti největšího zakřivení eliptického otvoru.

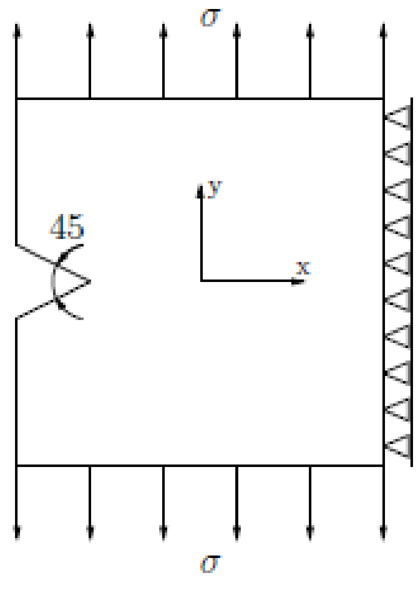
6.3 Vrub v homogenním materiálu

Objektem je v tomto případě součást obsahující vrub.

Zadání

Proveďte napěťovou analýzu u tělesa obsahující symetrický vrub a zatíženého dle Obr. 6.22 . Zadané parametry:

- modul pružnosti v tahu E=2,1·10^5 MPa
- Poissonova konstanta $\nu = 0,3$
- tahové napětí σ=1 MPa
- rozměry součásti: délka hrany L=100mm, délka vrubu l=10mm, úhel rozevření vrubu α=45°



Obr. 6.22: Zadaná součást se znázorněním okrajových podmínek

Model geometrie

Opět uvažujeme rovinný model, konkrétně případ rovinné napjatosti. Geometrie objektu je dána délkou hrany čtvercového tělesa v němž se nachází vrub, dále délkou vrubu a úhlem rozevření.

Model vazeb

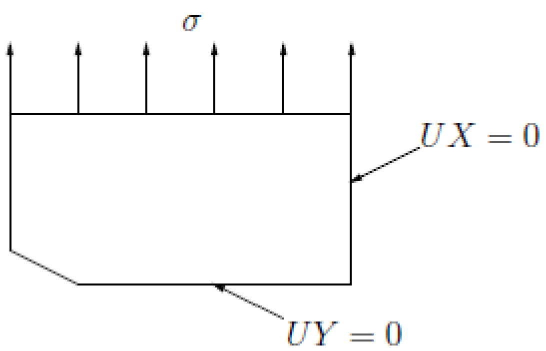
Objekt je vázán vpravo k okolí obecnou vazbou, viz Obr. 6.22.

Model aktivace

Objekt je aktivován okolím silovým zatížením, viz Obr 6.22, které na povrchu objektu vyvolává tahové napětí σ.

Model okrajových podmínek

Součást je symetrická podle osy x, proto budeme řešit pouze její horní polovinu. Model okrajových podmínek pro redukovanou část je zobrazen na Obr. 6.23. Na součásti předepíšeme dvě geometrické okrajové podmínky, kterými zabráníme pohybu tělesa jako celku a jednu silovou okrajovou podmínku.



Obr. 6.23: Model okrajových podmínek

Model vlastností struktury

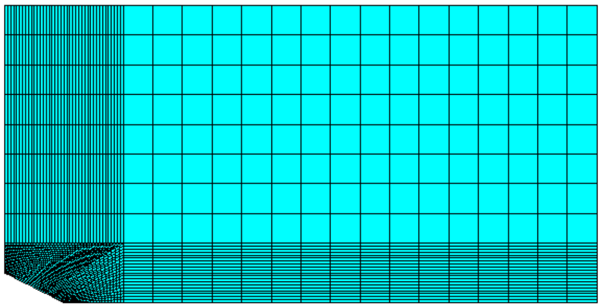
Předpokládáme homogenní, lineárně pružný, izotropní materiál definovaný dvěma materiálovými charakteristikami E a ν, jejichž hodnoty jsou definovány v zadání.

Model projevů

Jelikož nás zajímá pouze rozložení napětí v součásti, bude podstatným projevem u zatíženého objektu vznik napjatosti.

Metoda konečných prvků

Vytvořením dílčích modelů v předcházejících odstavcích máme připravena všechna vstupní data nutná pro výpočet. Po definování materiálu součásti a vytvoření modelu geometrie přistoupíme k tvorbě konečnoprvkové sítě. Vzhledem k rovinnému typu úlohy byl zvolen osmiuzlový prvek PLANE183. K docílení mapované sítě konečných prvků byla plocha analyzované součásti rozložena na 4 podoblasti. Tato úprava také umožní zjemnění konečnoprvkové sítě v blízkosti vrubu. Výsledná síť konečných prvků je na Obr. 6.24. Po vytvoření sítě zadáme okrajové podmínky dle Obr. 6.23 a provedeme výpočet.

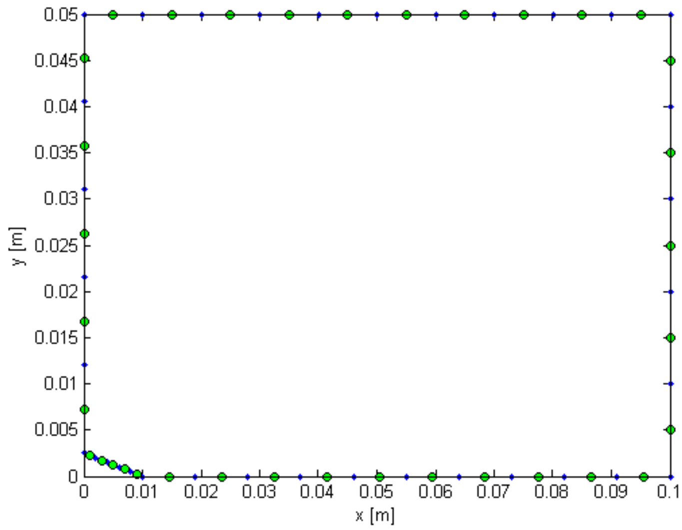


Obr. 6.24: Síť konečných prvků

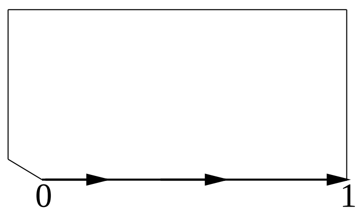
Metoda hraničních prvků

Postupujeme stejně jako v předcházejících dvou úlohách. Nejdříve nadefinujeme model materiálu pomocí materiálových konstant E a ν. Dále na modelu geometrie zadáme souřadnice extrémních bodů hraničních prvků podél hranice těles, čímž vytvoříme na součásti síť hraničních prvků. Síť hraničních prvků je schematicky znázorněna na Obr. 6.25. Pro výpočty bude síť značně zjemněna. Do uzlových bodů konstantních prvků předepíšeme okrajové podmínky dle Obr. 6.23 a provedeme výpočet. Jak je vidět v Tab. 6.3, která obsahuje vypočtené hodnoty maximálního napětí σ_y, výsledky získané metodou konečných a hraničních prvků se značně liší, a to i při zjemnění sítě.

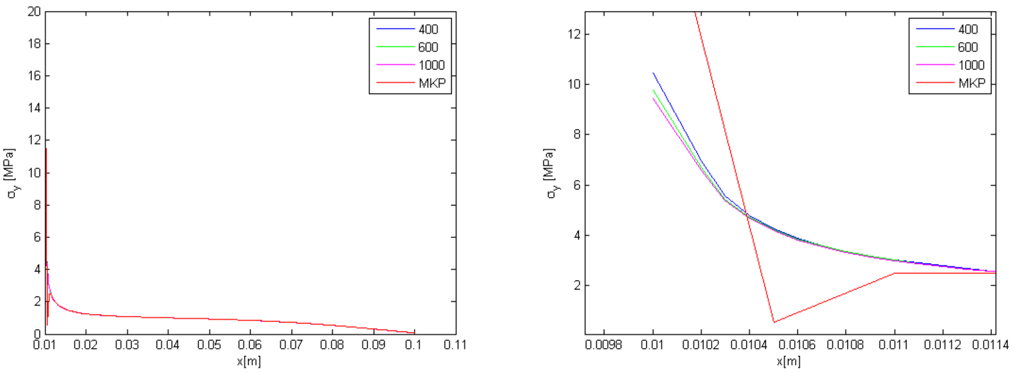
Při vykreslení napětí σ_y po cestě znázorněné na Obr. 6.26 zjistíme, že tyto odchylky vypočtených hodnot napětí jsou lokálního charakteru v blízkosti vrubu. Vykreslení napětí σ_y po cestě je na Obr. 6.27.



Obr. 6.25: Schéma sítě hraničních prvků (Extrémní body konstantních prvků označeny modře, uzlové body zeleně)



Obr. 6.26: Cesta vykreslení napětí σ_y uvnitř součásti



Obr. 6.27: Rozložení dominantního napětí σ_y podél osy symetrie(Legenda označuje počet hraničních prvků na hranici součásti)

Numerická metoda	$\sigma_{y,max}$ [MPa]
MKP	19.50
MHP 400 hp	10.44
MHP 600 hp	9.76
MHP 1000 hp	9.43

Tab. 6.3: Maximální hodnoty napětí σ_y v součásti s vrubem

Diskuze výsledků

V tomto příkladu se hodnoty maximálního napětí σ_y vypočtené oběma numerickými metodami výrazně lišily. Porovnáním hodnot napětí uvnitř součásti bylo zjištěno, že hodnoty napětí σ_y se liší v těsné blízkosti vrubu (<1,5mm). Takto odlišné výsledky mohly být způsobeny nevhodně zvoleným hraničním prvkem pro koncentrátor napětí typu vrub, ale i nevhodně zvoleným fundamentálním řešením pro tento typ úlohy.

ZÁVĚR

Cílem práce bylo formulovat metodu hraničních prvků pro rovinný problém lomové mechaniky. Dílčím cílem k aplikaci MHP na rovinný problém lomové mechaniky byla formulace MHP pro rovinný problém lineární elastické pružnosti pro izotropní materiál obsahující různé typy koncentrátorů napětí a studovat vliv diskretizace hranice oblasti a daných koncentrátorů na přesnost řešení. Úvodní kapitoly se věnují teorii metody hraničních prvků.
V druhé kapitole byla popsána základní struktura metody hraničních prvků, její vývoj, klady a zápory a srovnání s nejrozšířenějším numerickým nástrojem v oblasti řešení problémů mechaniky, pružnosti a pevnosti, metodou konečných prvků.
Třetí kapitola obsahuje základní vztahy rovinné pružnosti. Konkrétně jsou analyzovány stavy rovinné deformace a rovinné napjatosti. Jde o matematickou teorii potřebnou pro aplikaci metody hraničních prvků na rovinný problém pružnosti.
Nutnou podmínkou aplikace metody hraničních prvků je znalost fundamentálního řešení. Jeho sestavením a využitím se zabývala kapitola čtyři. V této sekci bylo popsáno sestavení jak klasického fundamentálního řešení pro osamělou sílu v nekonečné rovině, tak i sestavení fundamentálního řešení pro osamělou sílu v blízkosti otvoru a využití fundamentálního řešení pro popis posuvů a napjatosti v blízkosti trhliny v bi-materiálu.
Kapitola pět se zabývala sestrojením hraničním integrálních rovnic využitím poznatků předchozích dvou kapitol. Po sestrojení těchto rovnic byla popsána numerická implementace metody hraničních prvků spočívající v diskretizaci hranice zkoumaného tělesa na konečný počet prvků.
V poslední kapitole byly vytvořeny tři výpočtové modely pro výpočet napětí v součásti obsahující koncentrátor napětí typu kruhový otvor, eliptický otvor a vrub. Výpočet metodou konečných prvků proběhl ve výpočtovém softwaru ANSYS a ANSYS Workbench. Výsledky metodou hraničních prvků byly získány použitím počítačové programu ELBECON, který využíval fundamentálního řešení odvozeného pro osamělou sílu v nekonečné rovině.

LITERATURA

[1] KATSIKADELIS, J.T. *Boundary elements:Theory and applications.* Elsevier, 2003.

[2] JANÍČEK, P. *Systémové pojetí vybraných oboru pro techniky : Hledání souvislostí.*Brno : Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2007.

[3] GREEN, G. *An Essay on the Application on Mathematical Analysis to the Theories of Electricity amd Magmetism.* Nothingham, 1828.

[4] BETTI, E. *Theoria dell' Elasticita, Il Nuovo Cimento, Ser. 2, pp.7-10.*. 1972.

[5] SOMIGLIANA, C. *Sopra 1' Equilibrio di' un Corpo Elastico Isotropo,Il Nuovo Comento, Set. 3, pp. 17-20.* 1885.

[6] FREDHOLM, I. *Sur une Classe d' Equations Fonctionelles, Acta Mathematica, Vol.27, pp.365-390.* 1903.

[7] SHERMAN, D.I. *On the Solution of the Plane Static Problem of the Theory of Elasticity for Displacements Given on the Boundary, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol.27, pp.911-913, Vol.28, pp.25-28.* 1940.

[8] MIKHLIN, S.G. *Integral Equations.* Pergamon Press, London, 1957.

[9] MUSKHELISHVILI, N.I., *Some Basic Problems of the Theory of Elasticity,.* Noordhoff, Holland, 1963.

[10] JASWON, M.A. *Integral Equation Methods in Potential Theory I, Proeeedings of the Royal Society, Ser. A, Vol.275, pp.23-32.* 1963.

[11] SYMM, G.T. *Integral Equation Methods in Potential Theory II, Proceedings of the Royal Society, Ser. A, Vol.275, pp.33-46.* 1963.

[12] RIZZO, F.J. *An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics, Quarterly of Applied Mathematics, Vol.25, pp.83-95.* 1967.

[13] CRUSE, T. *Numerical Solutions in Three-Dimensional Elastostatics, International Journal of Solids and Structures, Vol.5, pp. 1259-1274.* 1969.

[14] RIZZO, F.J., SHIPPY, D. *A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies, Journal of Composite Materials, Vol.4, pp.36-61.* 1970.

[15] MENDELSON, A. *Solution of the Elastoplastic Torsion Problem by Boundary Integral Method, NASA, TN D- 7418.* 1973.

[16] GAUL, L., KÖGL, M. *Boundary element methods for engineers and scientists.* Springer, 2003.

[17] DENDA, M., KOSAKA, I. *Dislocation and point-force-based approach to the special Green's Function BEM for elliptic hole and crack problems in two dimensions, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.40, pp. 2857-2889.* 1997.

[18] HILLS, D.A., KELLY, P.A., DAI, D.N., KORSUNSKY, A.M. *Solution of crack problems - the distributed dislocation technique, Kluwer Academic Publishers, Netherlands* . 1996.

[19] JANÍČEK P., VRBKA J., ONDRÁČEK E. *Mechanika těles : pružnost a pevnost I, 2.vyd, 287s.* Brno : Vysoké učení technické v Brně, 1992

[20] *http://artax.karlin.mff.cuni.cz/ sidlof/vyuka/LA1/Materialykprednaskam(cesky)/6 lekce Koncentratory 071104 AnP.pdf*

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

E [Pa] Modul pružnosti v tahu

ν [$-$] Poissonova konstanta

u, v, w [m] Složky vektoru posuvu

σ_{ij}, τ_{ij} [Pa] Složky tenzoru napětí ε_{ij}

$\varepsilon_{ij}\,\gamma_{ij}$[$-$] Složky tenzoru přetvoření

λ [Pa] Lameho konstanta

t_x, t_y [Pa] Složky povrchového napětí

F_i [N] Složky osamělé síly

Ω Oblast zkoumaného tělesa

Γ Hranice zkoumaného tělesa

α, β Dundursovy parametry

B Dislokační hustota

K [$MPam^{\frac{1}{2}}$] Faktor intenzity napětí