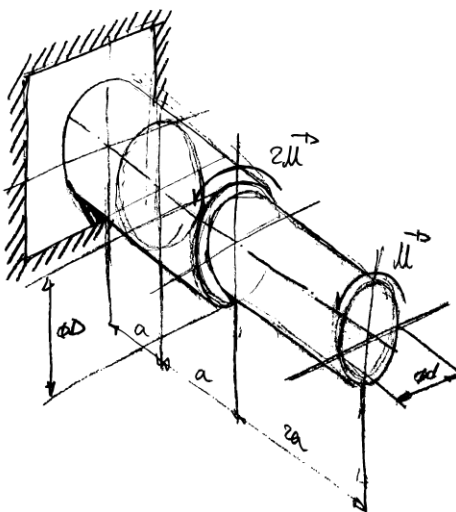


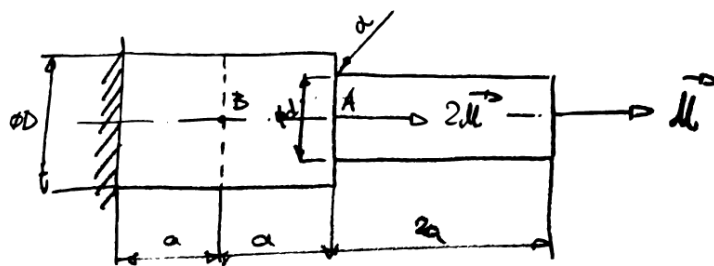
Prostý krut

Poznámka: V obrázcích jsou vektory značeny šipkou. V textu a vztazích jsou vektory značeny tučně, jejich velikost a složky jsou značeny normálně. Je to praktičtější a zcela běžná konvence.

Př. 1: U prutu podle obrázku stanovte maximální napětí, natočení volného konce, místa vrubu (bod A střednice prutu) a poloviny osazené části (bod B střednice prutu), jestliže je dáno $a = 100$ mm, $d = 20$ mm, $D = 30$ mm, $\alpha = 1.7$, $\mathcal{M} = 0.3 \times 10^6$ N $\times$ mm, $E = 2.1 \times 10^5$ MPa a $\mu = 0.3$.

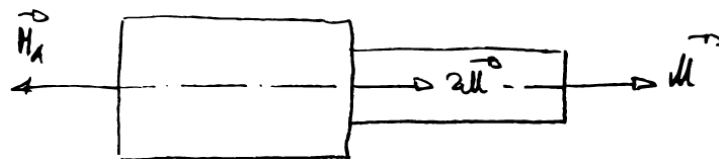


Při dodržení pravidla pravé ruky u zadaných silových dvojic $\mathcal{M}$ a $2\mathcal{M}$ se obrázek může schematicky překreslit následovně.



Úplné uvolnění a statický rozbor

Při úplném uvolnění se nahradí vazba vetknutím momentem M_A . Je dobrý zvyk tento moment zvolit směrem *ven* z plochy, tj. ve směru vnější normály k ploše příčného průřezu hřídele, jak ukazuje následující obrázek.



Z obrázku vyplývá, že množina neznámých parametrů je jednoprvková

$$NP = \{M_A\} \Rightarrow \mu = 1$$

a vzhledem k tomu, že je k dispozici pouze jediná rovnice rovnováhy

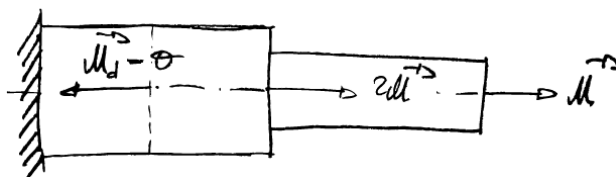
$$-M_A + 2\mathcal{M} + \mathcal{M} = 0 \Rightarrow \nu = 1,$$

je úloha staticky určitá, tj.

$$s = \mu - \nu = 0.$$

Výsledné vnitřní účinky

Statická určitost úlohy umožňuje ihned vyjádřit výsledné vnitřní účinky. Vzhledem k zadání, kde je mimo jiné nutné stanovit natočení v příčném průřezu (B) bez vnějšího zatížení, zavede se v tomto průřezu doplňkové zatížení nulovým momentem $\mathcal{M}_d = 0$. Smysl vektoru $\mathcal{M}_d$ může být zvolený libovolně, viz následující obrázek.

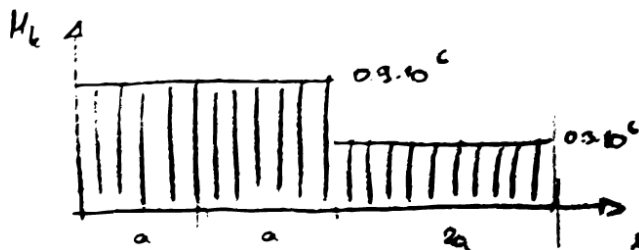


S využitím existence volného konce se výsledné vnitřní účinky budou stanovovat zprava po třech úsecích.

Úsek	Schéma	Vztah
$x_1 \in (0, 2a)$		$M_{k1} = \mathcal{M}$
$x_2 \in (0, a)$		$M_{k2} = \mathcal{M} + 2\mathcal{M}$
$x_3 \in (0, a)$		$M_{k3} = \mathcal{M} + 2\mathcal{M} - \mathcal{M}_d$

Řešení

Znalost výsledných vnitřních účinků M_{k1} , M_{k2} a M_{k3} dává řešení celé úlohy. V případě stanovení maximálního napětí je vhodné si vykreslit průběh vnitřních účinků M_{k1} , M_{k2} a M_{k3} podél střednice prutu, jak to ukazuje následující obrázek.



Dosažením $\mathcal{M} = 0.3 \times 10^6 \text{ N} \times \text{mm}$ a $\mathcal{M}_d = 0$ do výše odvozených vztahů pro výsledné vnitřní účinky se dostane po částech konstantní průběh

$$M_k = \begin{cases} 0.9 \times 10^6 \text{ N} \times \text{mm} & \text{pro } x \in (0, 200) \text{ mm}, \\ 0.3 \times 10^6 \text{ N} \times \text{mm} & \text{pro } x \in (200, 400) \text{ mm}. \end{cases}$$

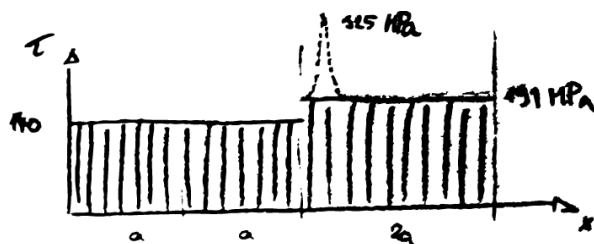
Odpovídající nominální smyková napětí τ_k^1 a $\tau_k^2 = \tau_k^3$ se vyjádří na základě vztahů

$$\tau_k^1 = \frac{M_{k1}}{W_k^1} = \frac{16\mathcal{M}}{\pi d^3} = \frac{16 \times 0.3 \times 10^6}{\pi \times 20^3} = 191 \text{ MPa},$$

$$\tau_k^2 = \frac{M_{k2}}{W_k^2} = \frac{16(\mathcal{M} + 2\mathcal{M})}{\pi D^3} = \frac{16 \times 0.9 \times 10^6}{\pi \times 30^3} = 170 \text{ MPa},$$

$$\tau_k^3 = \frac{M_{k3}}{W_k^2} = \frac{16(\mathcal{M} + 2\mathcal{M} + \mathcal{M}_d)}{\pi D^3} = \frac{16 \times 0.9 \times 10^6}{\pi \times 30^3} = 170 \text{ MPa}.$$

Rozložením těchto hodnot podél střednice prutu se dostane následující graf



po částech konstantní funkce

$$\tau_k = \begin{cases} 170 \text{ MPa} & \text{pro } x \in (0, 200) \text{ mm}, \\ 191 \text{ MPa} & \text{pro } x \in (200, 400) \text{ mm}. \end{cases}$$

V grafu je vyznačena také maximální hodnota napětí τ_{max} , která se nachází v těsné blízkosti kořene vrubu na menším z obou průměrů d a lze ji vyjádřit pomocí součinitel koncentrace napětí α následovně

$$\tau_{max} = \tau_1 \alpha = 191 \times 1.7 = 325 \text{ MPa.}$$

Pro stanovení natočení v daných bodech střednice prutu bude nutné znát modul pružnosti ve smyku G , polární momenty jednotlivých průřezů J_p^1 a J_p^2 a délky úseků l_1 , l_2 a l_3 , na kterých dochází ke změně příčných průřezů prutu nebo zatížení (shodují se s úseky, na kterých jsou předepsané výsledné vnitřní účinky), tj.

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2.1 \times 10^5}{2(1 + 0.3)} = 0.8 \times 10^5 \text{ MPa,}$$

$$J_p^1 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 20^4}{32} = 15708 \text{ mm}^4,$$

$$J_p^2 = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi \times 30^4}{32} = 79522 \text{ mm}^4,$$

$$l_1 = 200 \text{ mm,}$$

$$l_2 = 100 \text{ mm,}$$

$$l_3 = 100 \text{ mm.}$$

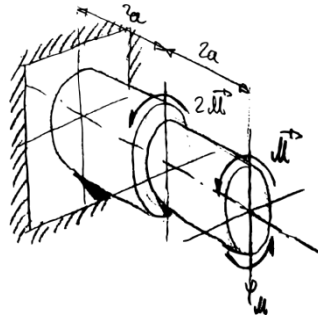
Natočení každého příčného průřezu se stanoví pomocí Castiglianovy věty. Natočení volného konce prutu $\varphi_{\mathcal{M}}$ se pak může vyjádřit následovně

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{M}} &= \frac{\partial W}{\partial \mathcal{M}} = \frac{M_{k1} l_1}{G J_p^1} \frac{\partial M_{k1}}{\partial \mathcal{M}} + \frac{M_{k2} l_2}{G J_p^2} \frac{\partial M_{k2}}{\partial \mathcal{M}} + \frac{M_{k3} l_3}{G J_p^2} \frac{\partial M_{k3}}{\partial \mathcal{M}} \\ &= \frac{\mathcal{M} l_1}{G J_p^1} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} (\mathcal{M}) + \frac{(\mathcal{M} + 2\mathcal{M}) l_2}{G J_p^2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} (\mathcal{M} + 2\mathcal{M}) \\ &\quad + \frac{(\mathcal{M} + 2\mathcal{M} + \mathcal{M}_d) l_3}{G J_p^2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} (\mathcal{M} + 2\mathcal{M} - \mathcal{M}_d) \\ &= \frac{\mathcal{M} l_1}{G J_p^1} + \frac{(\mathcal{M} + 2\mathcal{M}) l_2}{G J_p^2} + \frac{(\mathcal{M} + 2\mathcal{M} - \mathcal{M}_d) l_3}{G J_p^2} \\ &= \frac{0.3 \times 10^6 \times 200}{0.8 \times 10^5 \times 15708} + 2 \times \frac{0.9 \times 10^6 \times 100}{0.8 \times 10^5 \times 79522} = 0.08 \text{ rad,} \end{aligned}$$

kde W je potenciál prutu a $\mathcal{M}$ je velikost silové dvojice zatěžující volný konec prutu.

Poznámka: k lepšímu pochopení jsou veličiny (parametry) ve výsledných vnitřních účincích, podle kterých se derivuje, zvýrazněny červeně.

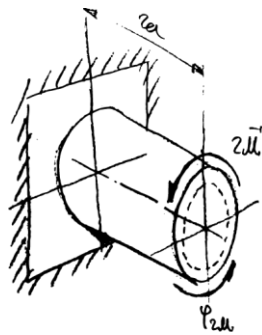
Jelikož je $\varphi_{\mathcal{M}}$ kladné, je smysl natočení příčného průřezu na volném konci shodné se smyslem zatěžující silové dvojice $\mathcal{M}$, jak ukazuje následující obrázek.



Natočení v místě vrubu φ_{2M} se vyjádří podobně

$$\begin{aligned}\varphi_{2M} &= \frac{\partial W}{\partial (2M)} = \frac{M_{k1} l_1}{GJ_p^1} \frac{\partial M_{k1}}{\partial (2M)} + \frac{M_{k2} l_2}{GJ_p^2} \frac{\partial M_{k2}}{\partial (2M)} + \frac{M_{k3} l_3}{GJ_p^2} \frac{\partial M_{k3}}{\partial (2M)} \\ &= \frac{M l_1}{GJ_p^1} \frac{\partial}{\partial (2M)} (M) + \frac{(M + 2M) l_2}{GJ_p^2} \frac{\partial}{\partial (2M)} (M + 2M) \\ &\quad + \frac{(M + 2M - M_d) l_3}{GJ_p^2} \frac{\partial}{\partial (2M)} (M + 2M - M_d) \\ &= \frac{(M + 2M) l_2}{GJ_p^2} + \frac{(M + 2M - M_d) l_3}{GJ_p^2} = 2 \times \frac{0.9 \times 10^6 \times 100}{0.8 \times 10^5 \times 79522} = 0.03 \text{ rad},\end{aligned}$$

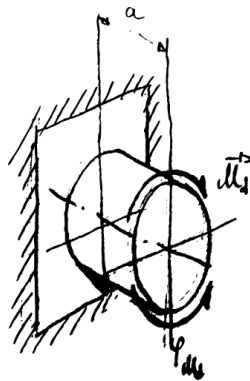
kde W je opět potenciál prutu a $2M$ je velikost vnější silové dvojice působící v místě A , tj. v místě vrubu. Natočení φ_{2M} je kladné, proto je natočení φ_{2M} shodné se smyslem silové dvojice $2M$, jak ukazuje další obrázek.



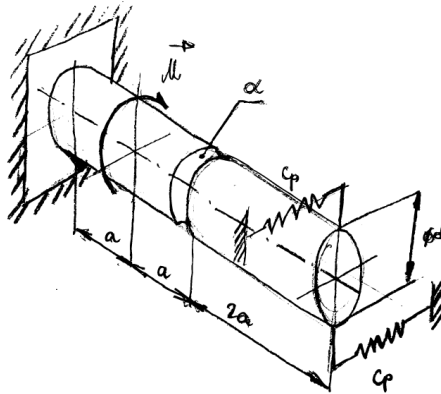
Zbývá stanovit natočení φ_{M_d} v místě B střednice prutu. Nejkomplikovanějším způsobem je použít Castiglianovu větu, tj. v místě B byla zavedena doplňková silová dvojice $M_d = 0$ jejíž nekonečně malá změna velikosti dM_d ve výrazu pro potenciál prutu W udá míru natočení příčného průřezu prutu

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{M}_d} = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{M}_d} &= \frac{M_{k1}l_1}{GJ_p^1} \frac{\partial M_{k1}}{\partial \mathcal{M}_d} + \frac{M_{k2}l_2}{GJ_p^2} \frac{\partial M_{k2}}{\partial \mathcal{M}_d} + \frac{M_{k3}l_3}{GJ_p^2} \frac{\partial M_{k3}}{\partial \mathcal{M}_d} \\
&= \frac{\mathcal{M}l_1}{GJ_p^1} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}_d}(\mathcal{M}) + \frac{(\mathcal{M} + 2\mathcal{M})l_2}{GJ_p^2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}_d}(\mathcal{M} + 2\mathcal{M}) \\
&\quad + \frac{(\mathcal{M} + 2\mathcal{M} - \mathcal{M}_d)l_3}{GJ_p^2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}_d}(\mathcal{M} + 2\mathcal{M} - \mathcal{M}_d) = - \frac{(\mathcal{M} + 2\mathcal{M} - \mathcal{M}_d)l_3}{GJ_p^2} \\
&= - \frac{0.9 \times 10^6 \times 100}{0.8 \times 10^5 \times 79522} = -0.01 \text{ rad.}
\end{aligned}$$

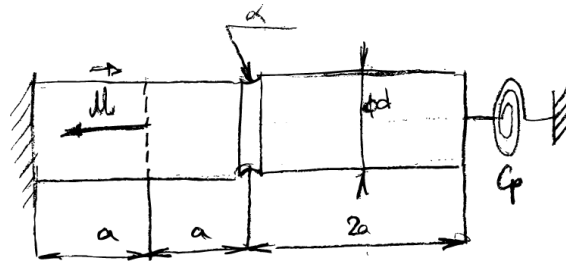
Natočení $\varphi_{\mathcal{M}_d}$ je záporné, proto má natočení $\varphi_{\mathcal{M}_d}$ opačný smysl než smysl doplňkové silové dvojice $\mathcal{M}_d$, jak ukazuje poslední obrázek tohoto příkladu.



Př. 2: U prutu podle obrázku stanovte bezpečnost k k meznímu stavu pružnosti, jestliže je dáno $a = 100 \text{ mm}$, $d = 30 \text{ mm}$, $\alpha = 1.3$, $\mathcal{M} = 0.4 \times 10^6 \text{ N} \times \text{mm}$, $c_p = 1 \times 10^{-7} \text{ N}^{-1}$, $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\mu = 0.3$ a $\sigma_k = 400 \text{ MPa}$.

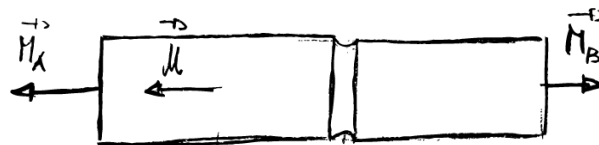


Při dodržení pravidla pravé ruky u zadané silové dvojice $\mathcal{M}$ se obrázek může schematicky překreslit následovně.



Úplné uvolnění a statický rozbor

Při úplném uvolnění se nahradí vazba vetknutím a pružná vazba vnějšími momenty M_A a M_B . Je dobrý zvyk smysl těchto momentů zvolit směrem *ven* z plochy příčného průřezu, tj. ve směru vnější normály k ploše příčného průřezu hřídele, jak ukazuje následující obrázek.



Z obrázku vyplývá, že množina neznámých parametrů je dvouprvková

$$NP = \{M_A, M_B\} \Rightarrow \mu = 2$$

a vzhledem k tomu, že je dispozici pouze jediná rovnice rovnováhy

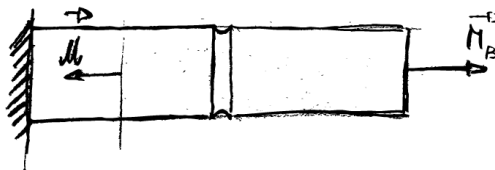
$$-M_A - \mathcal{M} + M_B = 0 \Rightarrow \nu = 1,$$

je úloha jedenkrát staticky neurčitá, tj.

$$s = \mu - \nu = 2 - 1 = 1.$$

Částečné uvolnění a deformační podmínka

Statická neurčitost vyžaduje provedení částečného uvolnění. Návodem k částečnému uvolnění je pružná vazba, která se nahradí vnějším momentem M_B , jak ukazuje následující obrázek.



Jediná nenulová složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ musí splňovat podmínku specifikovanou charakterem vazby v místě B prutu. V případě pružné vazby má deformační podmínka tvar

$$\varphi_B = -c_p M_B,$$

kde φ_B je natočení konce B prutu a c_p je poddajnost pružiny.

Výsledné vnitřní účinky

Na základě částečného uvolnění se vyjádří výsledné vnitřní účinky, ve kterých smí vystupovat pouze vnější zatížení (silová dvojice $\mathcal{M}$) a neznámý libovolně zvolený parametr daný z částečného uvolnění (vnější moment M_B). S využitím existence volného konce prutu se výsledné vnitřní účinky budou stanovovat zprava ve dvou úsecích.

Úsek	Schéma	Vztah
$x_1 \in (0, 3a)$		$M_{k1} = M_B$
$x_2 \in (0, a)$		$M_{k2} = M_B - \mathcal{M}$

Odstranění statické neurčitosti

Ve výsledných vnitřních účincích vystupuje neznámý parametr M_B , který lze vyjádřit z výše uvedené deformační podmínky

$$\varphi_B = -c_p M_B.$$

Výraz pro φ_B na levé straně předchozí rovnice se může vyjádřit pomocí Castiglianovy věty jako derivace potenciálu W prutu podle složky momentu M_B , tj.

$$\frac{\partial W}{\partial M_B} = -c_p M_B.$$

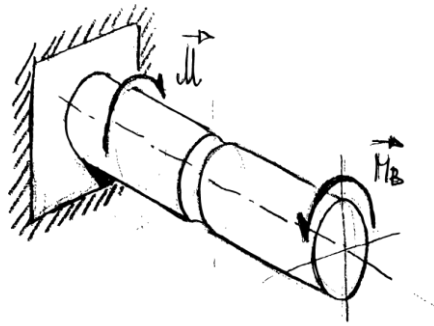
Parciální derivace na levé straně předchozího vztahu se může rozepsat následovně

$$\begin{aligned}
& \frac{M_{k1}l_1}{GJ_p} \frac{\partial M_{k1}}{\partial M_B} + \frac{M_{k2}l_2}{GJ_p} \frac{\partial M_{k2}}{\partial M_B} = -c_p M_B \\
& \Rightarrow \frac{M_B 3a}{GJ_p} \frac{\partial}{\partial M_B} M_B + \frac{(M_B - \mathcal{M})a}{GJ_p} \frac{\partial}{\partial M_B} (M_B - \mathcal{M}) = -c_p M_B \\
& \Rightarrow \frac{M_B 3a}{GJ_p} + \frac{(M_B - \mathcal{M})a}{GJ_p} = -c_p M_B.
\end{aligned}$$

Ve výše odvozené rovnici je jediná neznámá složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ a jelikož jde o rovnici lineární, může se z ní i bez problémů vyjádřit

$$M_B(4a + c_p GJ_p) = \mathcal{M}a \Rightarrow M_B = \frac{\mathcal{M}a}{4a + c_p GJ_p}.$$

Složka M_B vyšla kladná, to geometricky znamená, že smysl vnějšího momentu $\mathbf{M}_B$ v částečném uvolnění byl (náhodou) zvolen správně. Následující obrázek tento fakt ilustruje, kde je vyobrazen moment $\mathbf{M}_B$ jako reakce pružné vazby na vnější zatížení prutu silovou dvojicí $\mathcal{M}$.



Řešení

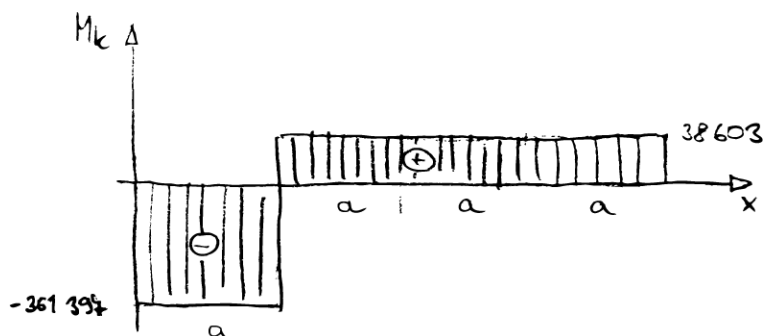
K dalším výpočtům je nutné znát hodnotu modulu pružnosti ve smyku G materiálu prutu a polární moment plochy J_p . Tedy

$$\begin{aligned}
G &= \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2.1 \times 10^5}{2(1 + 0.3)} = 0.8 \times 10^5 \text{ MPa}, \\
J_p &= \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi 30^4}{32} = 79522 \text{ mm}^4.
\end{aligned}$$

Dosazením těchto veličin do výše vyjádřeného vztahu pro M_B se dostane

$$M_B = \frac{\mathcal{M}a}{4a + c_p GJ_p} = \frac{0.4 \times 10^6 \times 100}{4 \times 100 + 10^{-7} \times 0.8 \times 10^5 \times 79522} = 38603 \text{ N} \times \text{mm}.$$

Nyní je možné vykreslit průběh vnitřních účinků M_{k1} a M_{k2} podél střednice prutu, jak to ukazuje následující obrázek.



Dosazením $\mathcal{M} = 0.4 \times 10^6 \text{ N} \times \text{mm}$ a $M_B = 38603 \text{ N} \times \text{mm}$ do výše odvozených vztahů pro výsledné vnitřní účinky se dostane po částech konstantní průběh

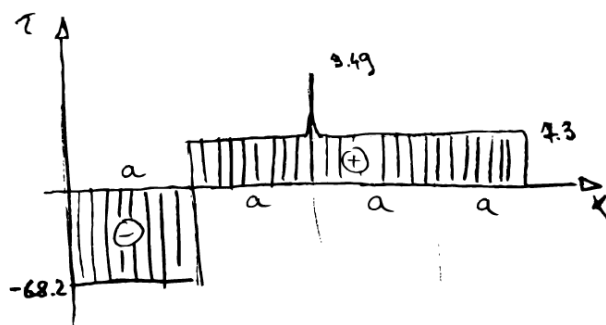
$$M_k = \begin{cases} -361797 \text{ N} \times \text{mm} & \text{pro } x \in (0, 100) \text{ mm}, \\ 38603 \text{ N} \times \text{mm} & \text{pro } x \in (100, 400) \text{ mm}. \end{cases}$$

Odpovídající nominální smyková napětí τ_k^1 a τ_k^2 se vyjádří na základě vztahů

$$\tau_k^1 = \frac{M_{k1}}{W_k} = \frac{16M_B}{\pi d^3} = \frac{16 \times 38603}{\pi \times 30^3} = 7.3 \text{ MPa},$$

$$\tau_k^2 = \frac{M_{k2}}{W_k^2} = \frac{16(M_B - \mathcal{M})}{\pi d^3} = -\frac{16 \times 361397}{\pi \times 30^3} = -68.2 \text{ MPa}.$$

Rozložením těchto hodnot podél střednice prutu se dostane následující graf



po částech konstantní funkce

$$\tau_k = \begin{cases} 7.3 \text{ MPa} & \text{pro } x \in (0, 100) \text{ mm}, \\ -68.2 \text{ MPa} & \text{pro } x \in (100, 400) \text{ mm}. \end{cases}$$

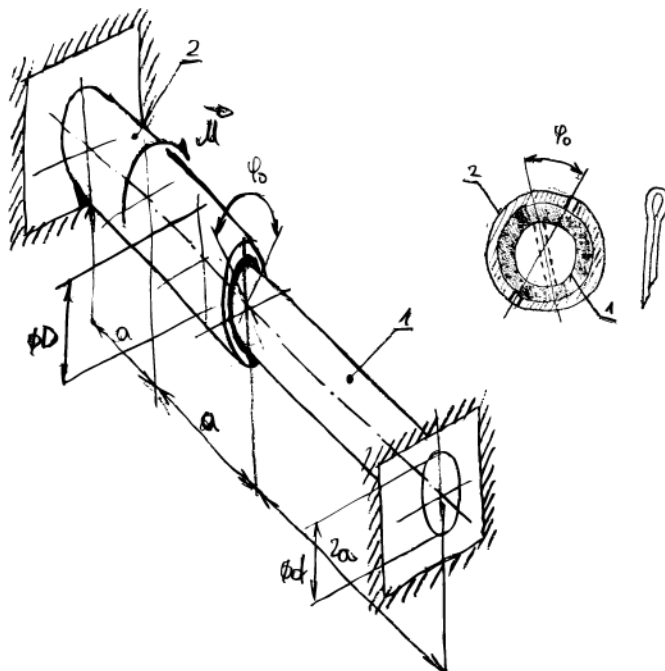
V grafu je vyznačena špička napětí způsobena přítomností vrubu v místě $x = 100 \text{ mm}$, která se vyjádří pomocí součinitele koncentrace napětí α následovně

$$\tau_\alpha = \tau_1 \alpha = 7.3 \times 1.3 = 9.49 \text{ MPa}.$$

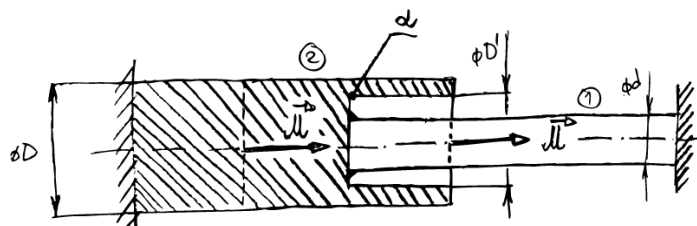
Je zřejmé, že přestože jde o vrub, není koncentrace napětí v jeho blízkosti velká natolik, aby se jednalo o napětí maximální. Maximální hodnota napětí se vyskytuje v části prutu $x \in (0, 100) \text{ mm}$. V kterémkoli místě tohoto úseku pak platí bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti

$$k = \frac{\sigma_k}{2|\tau_2|} = \frac{400}{2 \times 68.2} = 2.9.$$

Př. 3: Soustava prutů podle obrázku je tvořena dvěma pruty. Prut č. 1 je hřídel o průměru d a prut č. 2 je trubka s vnějším průměrem D a světlostí d , která je v polovině své délky zatížena vnější silovou dvojicí $\mathcal{M}$. Oba pruty jsou vyrobeny ze stejného materiálu. Průměr hřídele i otvor v trubce jsou lícovány tak, že jdou do sebe zasunout a bez tření se navzájem protáčí. Volné konce obou prutů jsou vzájemně spojeny závlačkou a opačné konce prutů jsou vetknuté. Stanovte maximální možnou výrobní vůli φ_0 vyvrtaných příčných otvorů pro závlačku v hřídeli i trubce tak, aby nebyla překročena mez kluzu materiálu obou prutů, jestliže je dáno $a = 100$ mm, $d = 30$ mm, $D = 40$ mm, $\mathcal{M} = 0.6 \times 10^6$ N × mm, $E = 2.1 \times 10^5$ MPa, $\mu = 0.3$ a $\sigma_k = 400$ MPa.

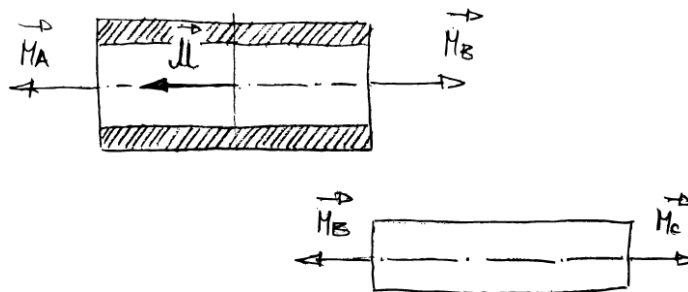


Při dodržení pravidla pravé ruky u zadané silové dvojice $\mathcal{M}$ se obrázek může schematicky překreslit následovně.



Úplné uvolnění a statický rozbor

Při úplném uvolnění se nahradí vazby vetknutím a společná vazba obou prutů vnějšími momenty M_A , M_B a M_C . Jak již bylo výše zmíněno, je dobrý zvyk smysl těchto momentů zvolit směrem *ven* z plochy příčného průřezu, tj. ve směru vnější normály k ploše příčného průřezu hřídele, jak ukazuje následující obrázek.



Z obrázku vyplývá, že množina neznámých parametrů je tříprvková

$$NP = \{M_A, M_B, M_C\} \Rightarrow \mu = 3$$

a vzhledem k tomu, že jsou dispozici pouze dvě rovnice rovnováhy, přesněji jedna rovnice pro každý z obou prutů,

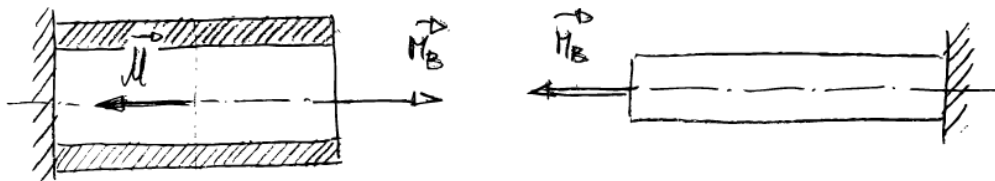
$$\left. \begin{array}{l} -M_A - \mathcal{M} + M_B = 0 \\ -M_B + M_C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nu = 2,$$

je úloha jedenkrát staticky neurčitá, tj.

$$s = \mu - \nu = 3 - 2 = 1.$$

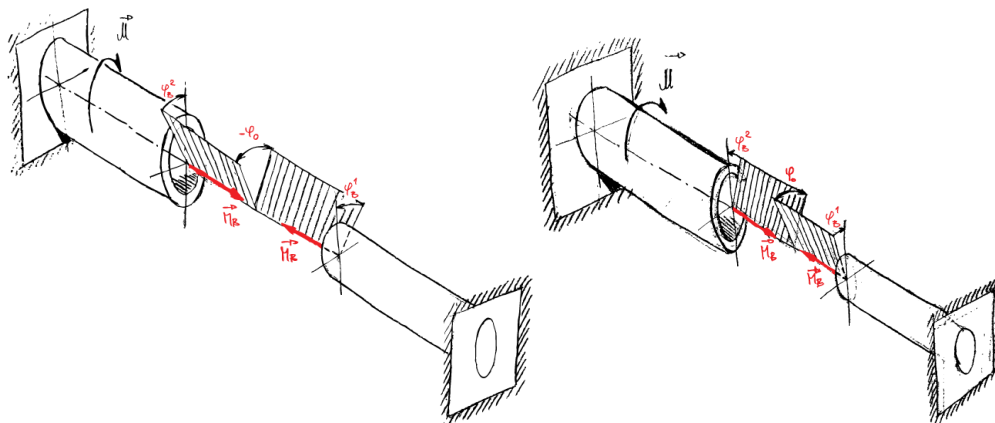
Částečné uvolnění a deformační podmínka

Statická neurčitost vyžaduje provedení částečného uvolnění. Návodem k částečnému uvolnění je pevná vazba mezi oběma pruty, kterou nahradíme vnějším momentem M_B , jak ukazuje následující obrázek.



Poznámka: Částečné uvolnění u této konfigurace prutů je možné provést v jakékoliv vazbě (je to dokonce i výhodnější, proved'te samostatně).

Jediná nenulová složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ musí splňovat podmínku specifikovanou charakterem vazby v místě B obou prutů. V tomto případě se musí řešit dva případy deformační podmínky a tedy také dvě konfigurace výrobní vůle mezi otvory v prutech pro závlačku. Obě konfigurace dají různé výsledky, jak ukazují následující obrázky.



Obrázky ukazují, že v závislosti na smyslu momentu $\mathbf{M}_B$ a konfigurace otvorů pro závlačku na konci obou prutů se musí zvolit znaménko (smysl, orientace) úhlu φ_0 . Deformační podmínka pro oba případy se může předepsat následovně, horní indexy značí číslo prutu,

$$\varphi_B^1 + \varphi_B^2 = \pm \varphi_0,$$

kde φ_B^1 a φ_B^2 je natočení vyvrtaných otvorů pro závlačku na konci (v místě B) prutu č. 1 a č. 2, jejichž orientace je vyznačena na obrázcích výše.

Výsledné vnitřní účinky

Na základě částečného uvolnění se vyjádří výsledné vnitřní účinky u obou prutů, ve kterých smí vystupovat pouze vnější zatížení (silová dvojice $\mathcal{M}$) a neznámý a libovolně zvolený parametr daný z částečného uvolnění (vnější moment $\mathbf{M}_B$). S využitím existence volného konce prutů se výsledné vnitřní účinky budou stanovovat zleva v případě prutu č. 1 a zprava v případě prutu č. 2 ve dvou úsecích. Dolní indexy i u souřadnice x_i^j a složek momentů M_{ki}^j jako obvykle značí číslo úseku prutu, horní indexy j značí číslo prutu.

Úsek	Schéma	Vztah
Prut č. 1, $x_1^1 \in (0, 2a)$		$M_{k1}^1 = M_B$
Prut č. 2, $x_1^2 \in (0, a)$		$M_{k1}^2 = M_B$
Prut č. 2, $x_2^2 \in (0, a)$		$M_{k2}^2 = M_B - \mathcal{M}$

Odstranění statické neurčitosti

Ve výsledných vnitřních účincích vystupuje neznámý parametr M_B , který lze vyjádřit z výše uvedených deformační podmíněk

$$\varphi_B^1 + \varphi_B^2 = \pm \varphi_0.$$

Výrazy pro φ_B^1 a φ_B^2 na levé straně předchozí rovnice se mohou vyjádřit pomocí Castiglianovy věty jako derivace potenciálu W^1 prutu č. 1 a potenciálu W^2 prutu č. 2 podle složky momentu M_B , tj.

$$\frac{\partial W^1}{\partial M_B} + \frac{\partial W^2}{\partial M_B} = \pm \varphi_0,$$

kde opět horní indexy j u potenciálů W^j opět značí číslo prutu. Parciální derivace na levé straně se může rozepsat následovně

$$\begin{aligned} & \frac{M_{k1}^1 l_1^1}{GJ_p^1} \frac{\partial M_{k1}^1}{\partial M_B} + \frac{M_{k1}^2 l_1^2}{GJ_p^2} \frac{\partial M_{k1}^2}{\partial M_B} + \frac{M_{k2}^2 l_2^2}{GJ_p^2} \frac{\partial M_{k2}^2}{\partial M_B} = \pm \varphi_0 \\ \Rightarrow & \frac{M_B 2a}{GJ_p^1} \frac{\partial}{\partial M_B} M_B + \frac{M_B a}{GJ_p^2} \frac{\partial}{\partial M_B} M_B + \frac{(M_B - \mathcal{M})a}{GJ_p^2} \frac{\partial}{\partial M_B} (M_B - \mathcal{M}) = \pm \varphi_0 \\ \Rightarrow & \frac{M_B 2a}{GJ_p^1} + \frac{M_B a}{GJ_p^2} + \frac{(M_B - \mathcal{M})a}{GJ_p^2} = \pm \varphi_0, \end{aligned}$$

kde l_i^j je délka úseku i prutu č. j a J_p^k je polární moment příčného průřezu k . Ve výše odvozené rovnici je jediná neznámá složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ a jelikož jde o rovnici lineární, může se z ní i bez problémů vyjádřit

$$2M_B a \left(\frac{1}{J_p^1} + \frac{1}{J_p^2} \right) = \pm \varphi_0 G + \frac{\mathcal{M}a}{J_p^2} \Rightarrow M_B = \frac{\pm \varphi_0 G J_p^1 J_p^2 + \mathcal{M}a J_p^1}{2a(J_p^1 + J_p^2)}.$$

Řešení

Nejdříve se dosadí složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ do výsledných vnitřních účinků, které budou mít pro jednotlivé úseky prutů tvar

$$M_{k1}^1 = M_B = \frac{\pm \varphi_0 G J_p^1 J_p^2 + \mathcal{M}a J_p^1}{2a(J_p^1 + J_p^2)},$$

$$M_{k1}^2 = M_B = \frac{\pm \varphi_0 G J_p^1 J_p^2 + \mathcal{M}a J_p^1}{2a(J_p^1 + J_p^2)},$$

$$M_{k2}^2 = M_B - \mathcal{M} = \frac{\pm \varphi_0 G J_p^1 J_p^2 - \mathcal{M}a J_p^1 - \mathcal{M}2a J_p^2}{2a(J_p^1 + J_p^2)}.$$

Odpovídající maximální smyková napětí v příčných průřezích jednotlivých úseků prutů se stanoví na základě vztahů

$$\begin{aligned}\tau_1^1 &= \frac{M_{k1}^1}{W_k^1} = \frac{M_B}{W_k^1} = \frac{\pm \varphi_0 G J_p^1 J_p^2 + \mathcal{M} a J_p^1}{2a(J_p^1 + J_p^2)W_k^1}, \\ \tau_1^2 &= \frac{M_{k1}^2}{W_k^2} = \frac{M_B}{W_k^2} = \frac{\pm \varphi_0 G J_p^1 J_p^2 + \mathcal{M} a J_p^1}{2a(J_p^1 + J_p^2)W_k^2}, \\ \tau_2^2 &= \frac{M_{k2}^2}{W_k^2} = \frac{M_B - \mathcal{M}}{W_k^2} = \frac{\pm \varphi_0 G J_p^1 J_p^2 - \mathcal{M} a J_p^1 - \mathcal{M} 2a J_p^2}{2a(J_p^1 + J_p^2)W_k^2},\end{aligned}$$

kde W_k^j je modul průřezu v krutu příčného průřezu j . Tato napětí nesmí překročit mez kluzu σ_k odkud se dostanou podmínky, kterým musí úhel φ_0 vyhovovat, tedy

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_k}{2} &\geq \left| \frac{\pm \varphi_0 G J_p^1 J_p^2 + \mathcal{M} a J_p^1}{2a(J_p^1 + J_p^2)W_k^1} \right|, \\ \frac{\sigma_k}{2} &\geq \left| \frac{\pm \varphi_0 G J_p^1 J_p^2 + \mathcal{M} a J_p^1}{2a(J_p^1 + J_p^2)W_k^2} \right|, \\ \frac{\sigma_k}{2} &\geq \left| \frac{\pm \varphi_0 G J_p^1 J_p^2 - \mathcal{M} a J_p^1 - \mathcal{M} 2a J_p^2}{2a(J_p^1 + J_p^2)W_k^2} \right|.\end{aligned}$$

V dalším budou nutná numerická vyjádření modulu pružnosti ve smyku G , polárních momentů plochy J_p^1, J_p^2 a modulů průřezů v krutu W_k^1 a W_k^2

$$\begin{aligned}G &= \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2.1 \times 10^5}{2(1 + 0.3)} = 0.8 \times 10^5 \text{ MPa}, \\ J_p^1 &= \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi 30^4}{32} = 79522 \text{ mm}^4, \\ J_p^2 &= \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi(40^4 - 30^4)}{32} = 171806 \text{ mm}^4, \\ W_k^1 &= \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \times 30^3}{16} = 5301 \text{ mm}^3, \\ W_k^2 &= \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi(40^4 - 30^4)}{16 \times 40} = 8590 \text{ mm}^3.\end{aligned}$$

Nejdříve se tyto hodnoty dosadí do podmínek pro konfiguraci prutů odpovídající vůli $+\varphi_0$, tedy

$$\sigma_k \geq \frac{\varphi_0 G J_p^1 J_p^2 + \mathcal{M} a J_p^1}{a(J_p^1 + J_p^2) W_k^1} \Rightarrow 400 \geq \frac{\varphi_0 \times 0.8 \times 10^5 \times 79522 \times 171806 + 0.6 \times 10^6 \times 100 \times 79522}{100 \times (79522 + 171806) \times 5301}$$

$$\Rightarrow 400 \geq 8203\varphi_0 + 35.8 \Rightarrow \varphi_0 \leq 0.04 \text{ rad},$$

$$\sigma_k \geq \frac{\varphi_0 G J_p^1 J_p^2 + \mathcal{M} a J_p^1}{a(J_p^1 + J_p^2) W_k^2} \Rightarrow 400 \geq \frac{\varphi_0 \times 0.8 \times 10^5 \times 79522 \times 171806 + 0.6 \times 10^6 \times 100 \times 79522}{100 \times (79522 + 171806) \times 8590}$$

$$\Rightarrow 400 \geq 5063\varphi_0 + 22.1 \Rightarrow \varphi_0 \leq 0.07 \text{ rad},$$

$$\sigma_k \geq \left| \frac{\varphi_0 G J_p^1 J_p^2 - \mathcal{M} a J_p^1 - \mathcal{M} 2a J_p^2}{a(J_p^1 + J_p^2) W_k^2} \right| \Rightarrow 400 \geq \frac{|\varphi_0 \times 0.8 \times 10^5 \times 79522 \times 171806 - 2.5 \times 10^{13}|}{100 \times (79522 + 171806) \times 8590}$$

$$\Rightarrow 400 \geq |5063\varphi_0 - 117.6| \Rightarrow \varphi_0 \leq 0.1 \text{ rad}.$$

Jde vidět, že při této konfiguraci je maximální dovolená vůle $\varphi_0 = 0.04 \text{ rad} = 2.3^\circ$. Pro konfiguraci prutů odpovídající vůli $-\varphi_0$ platí

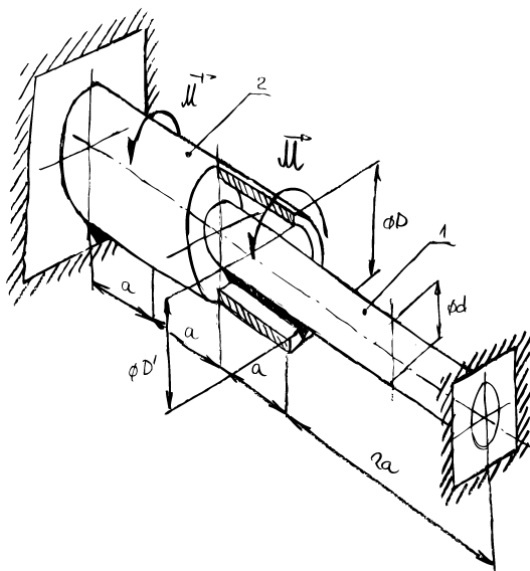
$$\sigma_k \geq \frac{|-\varphi_0 G J_p^1 J_p^2 + \mathcal{M} a J_p^1|}{a(J_p^1 + J_p^2) W_k^1} \Rightarrow 400 \geq |-8203\varphi_0 + 35.8| \Rightarrow \varphi_0 \leq 0.05 \text{ rad},$$

$$\sigma_k \geq \frac{|-\varphi_0 G J_p^1 J_p^2 + \mathcal{M} a J_p^1|}{a(J_p^1 + J_p^2) W_k^2} \Rightarrow 400 \geq |-5063\varphi_0 + 22.1| \Rightarrow \varphi_0 \leq 0.08 \text{ rad},$$

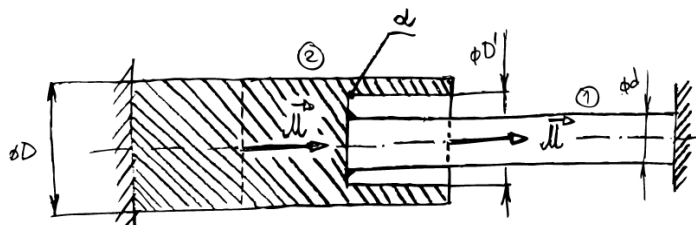
$$\sigma_k \geq \frac{|-\varphi_0 G J_p^1 J_p^2 - \mathcal{M} a J_p^1 - \mathcal{M} 2a J_p^2|}{a(J_p^1 + J_p^2) W_k^2} \Rightarrow 400 \geq 5063\varphi_0 + 117.6 \Rightarrow \varphi_0 \leq 0.06 \text{ rad}.$$

Při této konfiguraci je maximální dovolená vůle $\varphi_0 = 0.05 \text{ rad} = 2.8^\circ$.

Př. 4: Soustava prutů podle obrázku je tvořena dvěma pruty. Prut č. 1 je hřídel o průměru d a prut č. 2 je z jedné třetiny délky trubka se světlostí D' a ze zbývajících částí je tvořen hřídelem s vnějším průměrem D . Do trubkové části prutu č. 2 je vsazen volný konec prutu č. 1 a pevně bez vůle přichycen. Prut č. 1 je bez vnějšího zatížení a prut č. 2 je zatížen párem silových dvojic M . Oba pruty jsou vyrobeny ze stejného materiálu. Stanovte maximální možnou hodnotu velikosti vnějších silových dvojic M tak, aby nebyl překročen mezní stav pružnosti vzhledem k míře bezpečnosti k . Je dáno $a = 100$ mm, $d = 30$ mm, $D = 50$ mm, $D' = 40$ mm, $\sigma_k = 400$ MPa a $k = 1.6$. V kořeni vývrtu na volném konci prutu č. 2 uvažujte součinitel koncentrace napětí $\alpha = 1.4$.



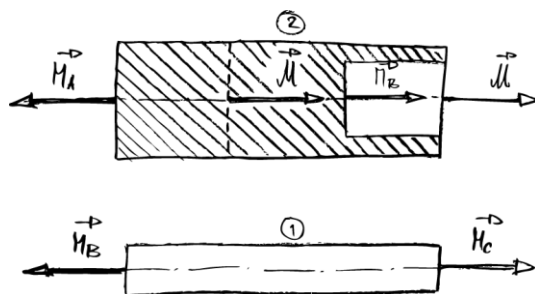
Při dodržení pravidla pravé ruky u zadaných silových dvojic M se obrázek může schematicky překreslit následovně.



Poznámka: Je třeba upozornit na problematické umístění vnější silové dvojice M na volném konci prutu č. 2 tak, jak je uvedeno ve schématu výše. Vnější silová dvojice M působí samozřejmě podle zadání na trubkovité části hřídele č. 2, ale na základě platnosti prutových předpokladů se může přenést na střednici prutu č. 2. Naneštěstí se tímto jeví jako vnější zatížení prutu č. 1, což není samozřejmě pravda a je nutné tento fakt dodatečně zdůraznit.

Úplné uvolnění a statický rozbor

Při úplném uvolnění se nahradí vazby vetknutím a společná vazba obou prutů vnějšími momenty M_A , M_B a M_C . Jak již bylo několikrát zmíněno, je dobrý zvyk smysl těchto momentů zvolit směrem ven z plochy příčného průřezu, tj. ve směru vnější normály k ploše příčného průřezu hřídele, jak ukazuje následující obrázek.



Z obrázku vyplývá, že množina neznámých parametrů je tříprvková

$$NP = \{M_A, M_B, M_C\} \Rightarrow \mu = 3$$

a vzhledem k tomu, že jsou dispozici pouze dvě rovnice rovnováhy, tj. jedna rovnice rovnováhy pro každý prut,

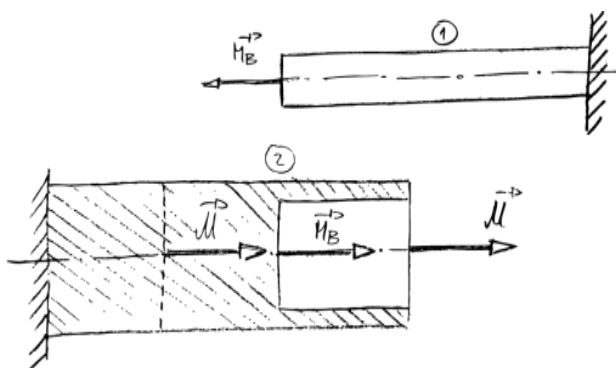
$$\left. \begin{aligned} -M_A + 2M + M_B &= 0 \\ -M_B + M_C &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nu = 2,$$

je úloha jedenkrát staticky neurčitá, tj.

$$s = \mu - \nu = 3 - 2 = 1.$$

Částečné uvolnění a deformační podmínka

Statická neurčitost vyžaduje provedení částečného uvolnění. Návodem k částečnému uvolnění je pevná vazba mezi oběma pruty, kterou nahradíme vnějším momentem M_B , jak ukazuje následující obrázek.



Poznámka: Částečné uvolnění u této konfigurace prutů je opět možné provést v jakékoli vazbě.

Jediná nenulová složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ musí splňovat podmínku specifikovanou charakterem vazby v místě B obou prutů. Tato podmínka vede na homogenní deformační podmínku

$$\varphi_B^1 + \varphi_B^2 = 0,$$

kde φ_B^1 a φ_B^2 je natočení prutu č. 1 a č. 2 v místě B . Číslo prutu $j = 1, 2$ je v horním indexu natočení φ_B^j .

Výsledné vnitřní účinky

Na základě částečného uvolnění se vyjádří výsledné vnitřní účinky u obou prutů, ve kterých smí vystupovat pouze vnější zatížení (pár silových dvojic $\mathcal{M}$) a neznámý a libovolně zvolený parametr daný z částečného uvolnění (vnější moment M_B). S využitím existence volného konce prutů se výsledné vnitřní účinky budou stanovovat zleva v případě prutu č. 1 a zprava v případě prutu č. 2 ve třech úsecích. Je však nutné mít na paměti, že se oba pruty navzájem překrývají a přes celkovou délku soustavy $l = 5a$ je délka obou prutů $l_1 = l_2 = 3a$. Dolní indexy i u souřadnice x_i^j a složek momentů M_{ki}^j jako obvykle značí číslo úseku prutu, horní indexy j značí číslo prutu.

Úsek	Schéma	Vztah
Prut č. 1, $x_1^1 \in (0, 3a)$		$M_{k1}^1 = M_B$
Prut č. 2, $x_1^2 \in (0, a)$		$M_{k1}^2 = \mathcal{M}$
Prut č. 2, $x_2^2 \in (0, a)$		$M_{k2}^2 = \mathcal{M} + M_B$
Prut č. 2, $x_3^2 \in (0, a)$		$M_{k3}^2 = 2\mathcal{M} + M_B$

Odstranění statické neurčitosti

Ve výsledných vnitřních účincích vystupuje neznámý parametr M_B , který lze vyjádřit z výše uvedené deformační podmínky

$$\varphi_B^1 + \varphi_B^2 = 0.$$

Výrazy pro φ_B^1 a φ_B^2 na levé straně předchozí rovnice se mohou vyjádřit pomocí Castiglianovy věty jako derivace potenciálu W^1 prutu č. 1 a potenciálu W^2 prutu č. 2 podle složky momentu M_B , tj.

$$\frac{\partial W^1}{\partial M_B} + \frac{\partial W^2}{\partial M_B} = 0,$$

kde horní indexy j u potenciálů W^j opět značí číslo prutu. Parciální derivace na levé straně se může rozepsat následovně

$$\frac{M_{k1}^1 l_1^1}{GJ_p^1} \frac{\partial M_{k1}^1}{\partial M_B} + \frac{M_{k1}^2 l_1^2}{GJ_p^2} \frac{\partial M_{k1}^2}{\partial M_B} + \frac{M_{k2}^2 l_2^2}{GJ_p^3} \frac{\partial M_{k2}^2}{\partial M_B} + \frac{M_{k2}^2 l_3^2}{GJ_p^3} \frac{\partial M_{k3}^2}{\partial M_B} = 0$$

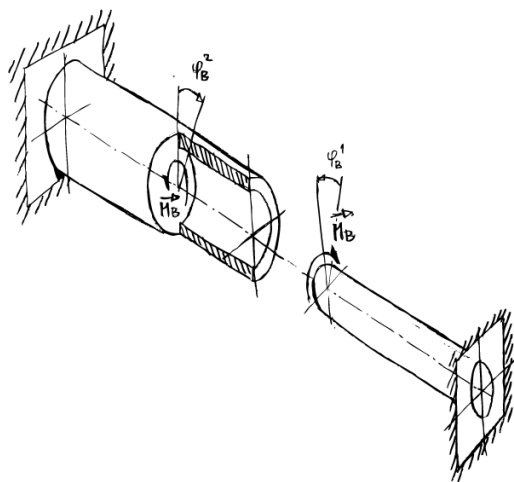
$$\Rightarrow \frac{M_B 3a}{GJ_p^1} \frac{\partial}{\partial M_B} M_B + \frac{\mathcal{M} a}{GJ_p^2} \frac{\partial}{\partial M_B} \mathcal{M}_k + \frac{(\mathcal{M} + M_B)a}{GJ_p^3} \frac{\partial}{\partial M_B} (\mathcal{M} + M_B) + \frac{(2\mathcal{M} + M_B)a}{GJ_p^3} \frac{\partial}{\partial M_B} (2\mathcal{M} + M_B) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{M_B 3a}{GJ_p^1} + \frac{(\mathcal{M} + M_B)a}{GJ_p^3} + \frac{(2\mathcal{M} + M_B)a}{GJ_p^3} = 0,$$

kde l_i^j je délka úseku i prutu č. j a J_p^k je polární moment příčného průřezu k . Ve výše odvozené rovnici je jediná neznámá složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ a jelikož jde o rovnici lineární, může se z ní i bez problémů vyjádřit

$$M_B \left(\frac{3}{J_p^1} + \frac{2}{J_p^3} \right) = -\frac{3\mathcal{M}}{J_p^3} \Rightarrow M_B = -\frac{3\mathcal{M}J_p^1}{2J_p^1 + 3J_p^3}.$$

Složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ je záporná, tzn. že smysl momentu $\mathbf{M}_B$ byl zvolen špatně a úhel $|\varphi_B^1| = |\varphi_B^2|$ má ve skutečnosti opačnou orientaci než je smysl momentu $\mathbf{M}_B$, jak ukazuje následující obrázek.



Řešení

Nejdříve se dosadí složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ do výsledných vnitřních účinků, které budou mít pro jednotlivé úseky prutů tvar

$$M_1^1 = M_B = -\frac{3\mathcal{M}J_p^1}{2J_p^1 + 3J_p^3},$$

$$M_1^2 = \mathcal{M},$$

$$M_2^2 = \mathcal{M} + M_B = \frac{\mathcal{M}(-J_p^1 + 3J_p^3)}{2J_p^1 + 3J_p^3},$$

$$M_3^2 = 2\mathcal{M} + M_B = \frac{\mathcal{M}(J_p^1 + 6J_p^3)}{2J_p^1 + 3J_p^3}.$$

Odpovídající maximální smyková napětí v příčných průřezech jednotlivých úseků prutů se stanoví na základě vztahů

$$\tau_1^1 = \frac{M_1^1}{W_k^1} = \frac{3\mathcal{M}J_p^1}{(2J_p^1 + 3J_p^3)W_k^1},$$

$$\tau_1^2 = \alpha \frac{M_1^2}{W_k^2} = \alpha \frac{\mathcal{M}}{W_k^2},$$

$$\tau_2^2 = \frac{M_2^2}{W_k^3} = \frac{\mathcal{M}(-J_p^1 + 3J_p^3)}{(2J_p^1 + 3J_p^3)W_k^3},$$

$$\tau_3^2 = \frac{M_3^2}{W_k^3} = \frac{\mathcal{M}(J_p^1 + 6J_p^3)}{(2J_p^1 + 3J_p^3)W_k^3}.$$

Horní index j u napětí τ_i^j značí číslo prutu a dolní index i značí číslo úseku. Horní index j u modulů průřezu v krutu W_k^j značí číslo příčného průřezu. V dalším budou nutná numerická vyjádření polárních momentů plochy J_p^1, J_p^2 a J_p^3 a modulů průřezů v krutu W_k^1, W_k^2, W_k^3 a W_k^4

$$J_p^1 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi 30^4}{32} = 79522 \text{ mm}^4,$$

$$J_p^2 = \frac{\pi(D^4 - D'^4)}{32} = \frac{\pi(50^4 - 40^4)}{32} = 362265 \text{ mm}^4,$$

$$J_p^3 = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi 50^4}{32} = 613592 \text{ mm}^4,$$

$$W_k^1 = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \times 30^3}{16} = 5301 \text{ mm}^3,$$

$$W_k^2 = \frac{2J_p^2}{D'} = \frac{\pi(D^4 - D'^4)}{16D'} = \frac{\pi(50^4 - 40^4)}{16 \times 40} = 18113 \text{ mm}^3,$$

$$W_k^3 = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi 50^3}{16} = 24544 \text{ mm}^3.$$

Výše vyjádřené výrazy se dosadí zpět do vztahů pro maximální smyková napětí

$$\tau_1^1 = \frac{3 \times \mathcal{M} \times 79522}{(2 \times 79522 + 3 \times 613592) \times 5301} = 2.3 \times 10^{-5} \times \mathcal{M},$$

$$\tau_1^2 = 1.4 \times \frac{\mathcal{M}}{18113} = 7.7 \times 10^{-5} \times \mathcal{M},$$

$$\tau_2^2 = \frac{\mathcal{M} \times (-79522 + 3 \times 613592)}{(2 \times 79522 + 3 \times 613592) \times 24544} = 3.6 \times 10^{-5} \times \mathcal{M},$$

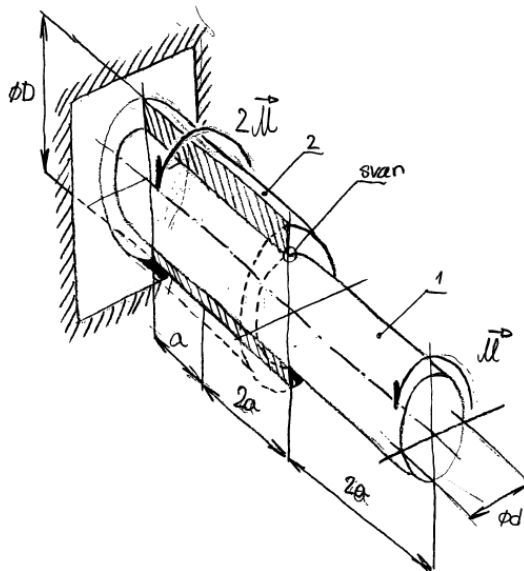
$$\tau_3^2 = \frac{\mathcal{M} \times (79522 + 6 \times 613592)}{(2 \times 79522 + 3 \times 613592) \times 24544} = 7.7 \times 10^{-5} \times \mathcal{M}.$$

Z předchozích vztahů jde vidět, že ať se zvolí velikost vnější silové dvojice $\mathcal{M}$ jakkoli, největší napětí v prutu bude v místě vnitřního vrubu nebo v úseku č. 3 prutu č. 2. Tedy z podmínky mezního stavu pružnosti se dostane hodnota velikosti $\mathcal{M}$ silové dvojice **$\mathcal{M}$** následovně

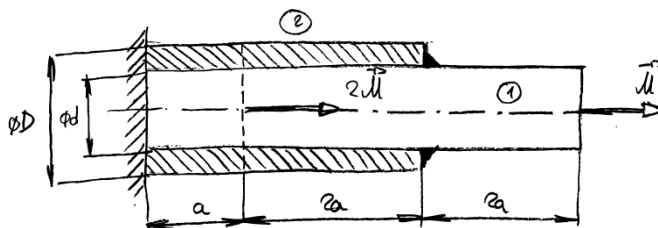
$$k = \frac{\sigma_k}{2\tau_1^2} = \frac{\sigma_k}{2\tau_3^2} = \frac{\sigma_k}{2 \times 7.7 \times 10^{-5} \times \mathcal{M}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \frac{\sigma_k}{2 \times 7.7 \times 10^{-5} \times k} = \frac{400}{2 \times 7.7 \times 10^{-5} \times 1.6} = 1623377 \text{ N} \times \text{mm}.$$

Př. 5: Soustava prutů podle obrázku je tvořena dvěma pruty. Prut č. 1 je hřídel o průměru d a prut č. 2 je trubka světlosti d a s vnějším průměrem D . Do prutu č. 2 je vsazen prut č. 1 a pevně přichycen k volnému konci prutu č. 2. Oba pruty jsou společně vetknuty a jsou navzájem lícovány tak, že je mezi hřídelem a otvorem trubky vůle, kterou zanedbáváme. Prut č. 1 je zatížen na volném konci silovou dvojicí $\mathcal{M}$, prut č. 2 je ve vzdálenosti a od vetknutého konce zatížen silovou dvojicí $2\mathcal{M}$. Oba pruty jsou vyrobeny ze stejného materiálu. Stanovte minimální průměr hřídele a světlost trubky d tak, aby nebyl překročen mezní stav pružnosti vzhledem k míře bezpečnosti k a za předpokladu, že $D = 1.3 \times d$. Je dáno $a = 100$ mm, $\mathcal{M} = 1.5 \times 10^6$ N × mm, $\sigma_k = 350$ MPa a $k = 1.9$.



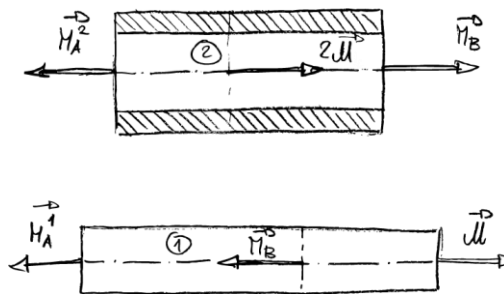
Při dodržení pravidla pravé ruky u zadaných silových dvojic $\mathcal{M}$ se obrázek může schematicky překreslit následovně.



Poznámka: Umístění vnější silové dvojice $2\mathcal{M}$ na prutu č. 2 tak, jak je uvedeno ve schématu výše, se na základě platnosti prutových předpokladů může přenést na střednici prutu č. 2. Naneštěstí se tímto jeví také jako vnější zatížení prutu č. 1, což není samozřejmě pravda a je nutné tento fakt dodatečně zdůraznit.

Úplné uvolnění a statický rozbor

Při úplném uvolnění se nahradí vazby vetknutím a společná vazba obou prutů vnějšími momenty M_A^1 , M_A^2 a M_B . Jak již bylo několikrát zmíněno, je dobrý zvyk smysl těchto momentů zvolit směrem ven z plochy příčného průřezu, tj. ve směru vnější normály k ploše příčného průřezu hřídele, jak ukazuje následující obrázek. V případě momentu M_B jde jeho smysl ve směru vnější normály stanovit pouze u prutu č. 2. U prutu č. 1 se následně odvodí jako jeho reakce.



Z obrázku vyplývá, že množina neznámých parametrů je tříprvková

$$NP = \{M_A^1, M_A^2, M_B\} \Rightarrow \mu = 3$$

a vzhledem k tomu, že jsou dispozici pouze dvě rovnice rovnováhy, tj. jedna rovnice rovnováhy pro každý prut,

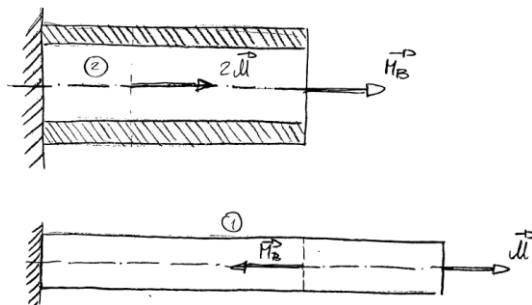
$$\left. \begin{aligned} -M_A^2 + 2M + M_B &= 0 \\ -M_A^1 - M_B + M &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nu = 2,$$

je úloha jedenkrát staticky neurčitá, tj.

$$s = \mu - \nu = 3 - 2 = 1.$$

Částečné uvolnění a deformační podmínka

Statická neurčitost vyžaduje provedení částečného uvolnění. Návodem k částečnému uvolnění je pevná vazba mezi oběma pruty, kterou nahradíme vnějším momentem M_B , jak ukazuje následující obrázek.



Jediná nenulová složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ musí splňovat podmínku specifikovanou charakterem vazby v místě B obou prutů. Tato podmínka vede na homogenní deformační podmínku

$$\varphi_B^1 + \varphi_B^2 = 0,$$

kde φ_B^1 a φ_B^2 je natočení prutu č. 1 a č. 2 v místě B . Číslo prutu $j = 1, 2$ je v horním indexu natočení φ_B^j .

Výsledné vnitřní účinky

Na základě částečného uvolnění se vyjádří výsledné vnitřní účinky u obou prutů, ve kterých smí vystupovat pouze vnější zatížení (pár silových dvojic $\mathcal{M}$ a $2\mathcal{M}$) a neznámý a libovolně zvolený

parametr daný z částečného uvolnění (vnější moment M_B). S využitím existence volného konce prutů se výsledné vnitřní účinky budou stanovovat zprava. Je však nutné mít na paměti, že se oba pruty navzájem překrývají a přes celkovou délku soustavy $l_1 = 5a$ je délka $l_2 = 3a$. Dolní indexy i u souřadnice x_i^j a složek momentů M_{ki}^j jako obvykle značí číslo úseku prutu, horní indexy j značí číslo prutu.

Úsek	Schéma	Vztah
Prut č. 1, $x_1^1 \in (0, 2a)$		$M_{k1}^1 = \mathcal{M}$
Prut č. 1, $x_2^1 \in (0, 3a)$		$M_{k2}^1 = \mathcal{M} - M_B$
Prut č. 2, $x_1^2 \in (0, 2a)$		$M_{k1}^2 = M_B$
Prut č. 2, $x_2^2 \in (0, a)$		$M_{k2}^2 = M_B + 2\mathcal{M}$

Odstranění statické neurčitosti

Ve výsledných vnitřních účincích vystupuje neznámý parametr M_B , který lze vyjádřit z výše uvedené deformační podmínky

$$\varphi_B^1 + \varphi_B^2 = 0.$$

Výrazy pro φ_B^1 a φ_B^2 na levé straně předchozí rovnice se mohou vyjádřit pomocí Castiglianovy věty jako derivace potenciálu W^1 prutu č. 1 a potenciálu W^2 prutu č. 2 podle složky momentu M_B , tj.

$$\frac{\partial W^1}{\partial M_B} + \frac{\partial W^2}{\partial M_B} = 0,$$

kde horní indexy j u potenciálů W^j opět značí číslo prutu. Parciální derivace na levé straně se může rozepsat následovně

$$\frac{M_{k1}^1 l_1^1}{GJ_p^1} \frac{\partial M_{k1}^1}{\partial M_B} + \frac{M_{k2}^1 l_2^1}{GJ_p^1} \frac{\partial M_{k2}^1}{\partial M_B} + \frac{M_{k1}^2 l_1^2}{GJ_p^2} \frac{\partial M_{k1}^2}{\partial M_B} + \frac{M_{k2}^2 l_2^2}{GJ_p^2} \frac{\partial M_{k2}^2}{\partial M_B} = 0$$

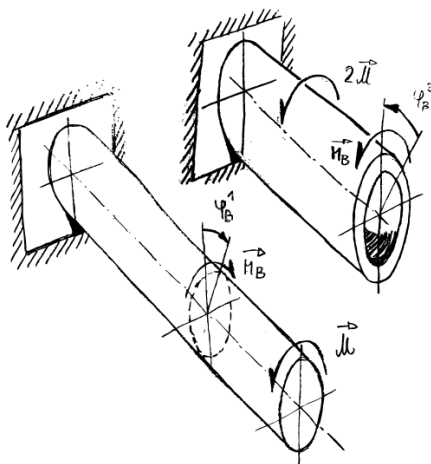
$$\Rightarrow \frac{\mathcal{M}2a}{GJ_p^1} \frac{\partial}{\partial M_B} \mathcal{M}_k + \frac{(\mathcal{M} - M_B)3a}{GJ_p^1} \frac{\partial}{\partial M_B} (\mathcal{M} - M_B) + \frac{M_B 2a}{GJ_p^2} \frac{\partial}{\partial M_B} M_B + \frac{(M_B + 2\mathcal{M})a}{GJ_p^2} \frac{\partial}{\partial M_B} (M_B + 2\mathcal{M}) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{(\mathcal{M} - M_B)3a}{GJ_p^1} + \frac{M_B 2a}{GJ_p^2} + \frac{(M_B + 2\mathcal{M})a}{GJ_p^2} = 0,$$

kde l_i^j je délka úseku i prutu č. j a J_p^k je polární moment příčného průřezu k . Ve výše odvozené rovnici je jediná neznámá složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ a jelikož jde o rovnici lineární, může se z ní i bez problémů vyjádřit

$$M_B \left(\frac{3}{J_p^1} + \frac{2}{J_p^2} + \frac{1}{J_p^2} \right) = \mathcal{M} \left(\frac{3}{J_p^1} - \frac{2}{J_p^2} \right) \Rightarrow M_B = \mathcal{M} \frac{3J_p^2 - 2J_p^1}{3(J_p^2 + J_p^1)}.$$

Jak bude uvedeno níže, $J_p^1 < J_p^2$, proto je složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ kladná, tzn. že smysl momentu $\mathbf{M}_B$ a orientace úhlu $|\varphi_B^1| = |\varphi_B^2|$ jsou shodné, jak ukazuje následující obrázek (srovnejte s předchozím příkladem).



Řešení

Nejdříve se dosadí složka M_B momentu $\mathbf{M}_B$ do výsledných vnitřních účinků, které budou mít pro jednotlivé úseky prutů tvar

$$M_{k1}^1 = \mathcal{M},$$

$$M_{k2}^1 = \mathcal{M} - M_B = \mathcal{M} \frac{5J_p^1}{3(J_p^2 + J_p^1)},$$

$$M_{k1}^2 = M_B = \mathcal{M} \frac{3J_p^2 - 2J_p^1}{3(J_p^2 + J_p^1)},$$

$$M_{k2}^2 = M_B + 2\mathcal{M} = \mathcal{M} \frac{9J_p^2 + 4J_p^1}{3(J_p^2 + J_p^1)}.$$

Odpovídající maximální smyková napětí v příčných průřezích jednotlivých úseků prutů se stanoví na základě vztahů

$$\begin{aligned}\tau_1^1 &= \frac{M_{k1}^1}{W_k^1} = \frac{\mathcal{M}}{W_k^1}, \\ \tau_2^1 &= \frac{M_{k2}^1}{W_k^1} = \frac{5J_p^1 \mathcal{M}}{3(J_p^2 + J_p^1)W_k^1}, \\ \tau_1^2 &= \frac{M_{k1}^2}{W_k^2} = \frac{(3J_p^2 - 2J_p^1)\mathcal{M}}{3(J_p^2 + J_p^1)W_k^2}, \\ \tau_2^2 &= \frac{M_{k2}^2}{W_k^2} = \frac{(9J_p^2 + 4J_p^1)\mathcal{M}}{3(J_p^2 + J_p^1)W_k^2}.\end{aligned}$$

Horní index j u napětí τ_i^j značí číslo prutu a dolní index i značí číslo úseku. Horní index j u modulu průřezu v krutu W_k^j značí číslo příčného průřezu. V dalším budou nutná numerická vyjádření polárních momentů plochy J_p^1 , a J_p^2 a modulů průřezů v krutu W_k^1 a W_k^2 .

$$\begin{aligned}J_p^1 &= \frac{\pi d^4}{32} = 9.8 \times 10^{-2} \times d^4, \\ J_p^2 &= \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi[(1.3 \times d)^4 - d^4]}{32} = 1.8 \times 10^{-1} \times d^4, \\ W_k^1 &= \frac{\pi d^3}{16} = 2.0 \times d^3, \\ W_k^2 &= \frac{2J_p^2}{1.3d} = \frac{2 \times 1.8 \times 10^{-1} \times d^4}{1.3} = 2.8 \times 10^{-1} \times d^3.\end{aligned}$$

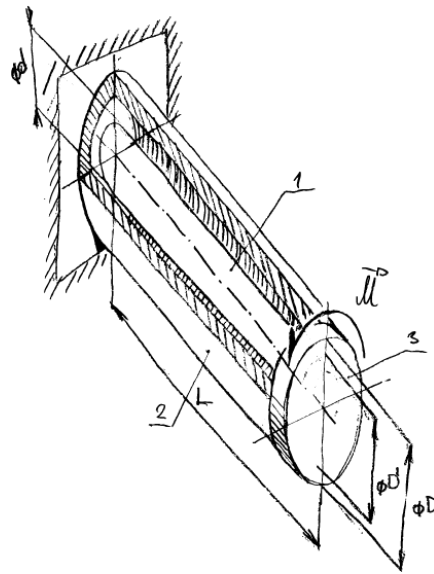
Výše vyjádřené výrazy a zadaná hodnota $\mathcal{M} = 1.5 \times 10^6 \text{ N} \times \text{mm}$ se dosadí zpět do vztahů pro maximální smyková napětí

$$\begin{aligned}\tau_1^1 &= \frac{1.5 \times 10^6}{2.0 \times d^3} = \frac{7.5 \times 10^5}{d^3}, \\ \tau_2^1 &= \frac{5 \times 9.8 \times 10^{-2} \times 1.5 \times 10^6 \times d^4}{3 \times (1.8 \times 10^{-1} \times d^4 + 9.8 \times 10^{-2} \times d^4) \times 2 \times d^3} = \frac{4.4 \times 10^5}{d^3}, \\ \tau_1^2 &= \frac{(3 \times 1.8 \times 10^{-1} \times d^4 - 2 \times 9.8 \times 10^{-2} \times d^4) \times 1.5 \times 10^6 \times d^4}{3 \times (1.8 \times 10^{-1} \times d^4 + 9.8 \times 10^{-2} \times d^4) \times 2.8 \times 10^{-1} \times d^3} = \frac{2.2 \times 10^6}{d^3}, \\ \tau_2^2 &= \frac{(9 \times 1.8 \times 10^{-1} \times d^4 + 4 \times 9.8 \times 10^{-2} \times d^4) \times 1.5 \times 10^6 \times d^4}{3 \times (1.8 \times 10^{-1} \times d^4 + 9.8 \times 10^{-2} \times d^4) \times 2.8 \times 10^{-1} \times d^3} = \frac{12.9 \times 10^6}{d^3}.\end{aligned}$$

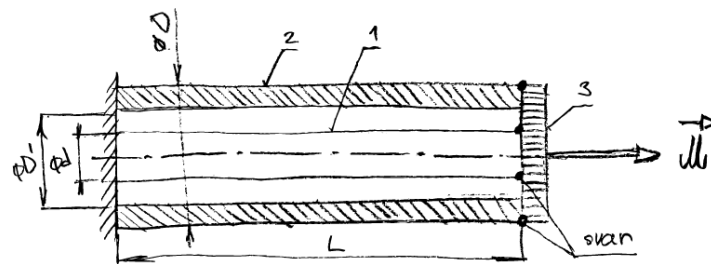
Z předchozích vztahů jde vidět, že ať se zvolí velikost průměru d jakkoli, největší napětí v prutu bude v úseku č. 2 prutu č. 2. Z podmínky mezního stavu pružnosti se dostane hodnota d následovně

$$k = \frac{\sigma_k}{2\tau_2^2} = \frac{\sigma_k \times d^3}{2 \times 12.9 \times 10^6}$$
$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{k \times 2 \times 12.9 \times 10^6}{\sigma_k}} = \sqrt[3]{\frac{1.9 \times 2 \times 12.9 \times 10^6}{350}} = 51.9 \text{ mm.}$$

Př. 6: Soustava prutů podle obrázku je tvořena dvěma pruty. Prut č. 1 je ocelový hřídel o průměru d , který je vsazen do měděné trubky (prut č. 2) světlosti D' a vnějším průměru D . Oba pruty jsou na jednom konci vetknuté a na druhém konci jsou pevně spojeny s kruhovým „víkem“. Víko je zatíženo silovou dvojicí $\mathcal{M}$ a uvažuje se jako neprutová součást č. 3 soustavy. Stanovte bezpečnost k vzhledem k meznímu stavu pružnosti, jestliže je dáno $d = 20$ mm, $D = 50$ mm, $D' = 40$ mm, $L = 400$ mm, $\mathcal{M} = 7.5 \times 10^5$ N × mm, $\sigma_k^1 = 350$ MPa, $E_1 = 2.1 \times 10^5$ MPa, $\mu_1 = 0.3$, $\sigma_k^2 = 80$ MPa, $E_2 = 1.3 \times 10^5$ MPa, $\mu_2 = 0.35$.



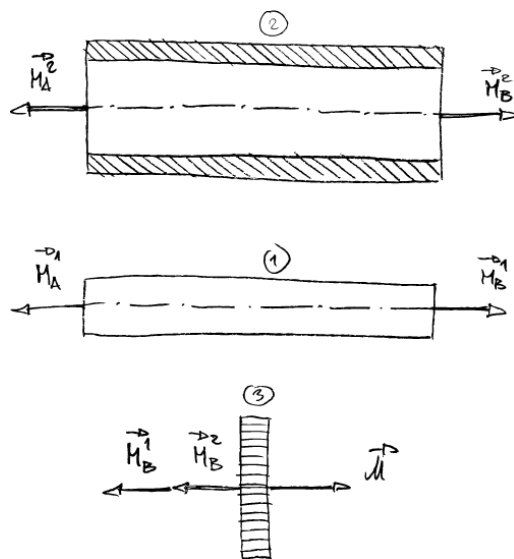
Při dodržení pravidla pravé ruky u silové dvojice $\mathcal{M}$ se obrázek může schematicky překreslit následovně.



Poznámka: Těleso č. 3 se uvažuje jako neprutové, proto jsou jeho rozměry nepodstatné.

Úplné uvolnění a statický rozbor

Při úplném uvolnění se nahradí vazby vetknutím a společná vazba obou prutů a víka vnějšími momenty $\mathbf{M}_A^1$, $\mathbf{M}_A^2$, $\mathbf{M}_B^1$ a $\mathbf{M}_B^2$. Jak již bylo několikrát zmíněno, je dobrý zvyk smysl těchto momentů zvolit směrem *ven* z plochy příčného průřezu, tj. ve směru vnější normály k ploše příčného průřezu hřídele, příp. trubky a víka, jak ukazuje následující obrázek.



Z obrázku vyplývá, že množina neznámých parametrů je čtyř prvková

$$NP = \{M_A^1, M_A^2, M_B^1, M_B^2\} \Rightarrow \mu = 4$$

a vzhledem k tomu, že jsou dispozici pouze tři rovnice rovnováhy, tj. dvě rovnice rovnováhy pro oba pruty a jedna rovnice rovnováhy pro víko,

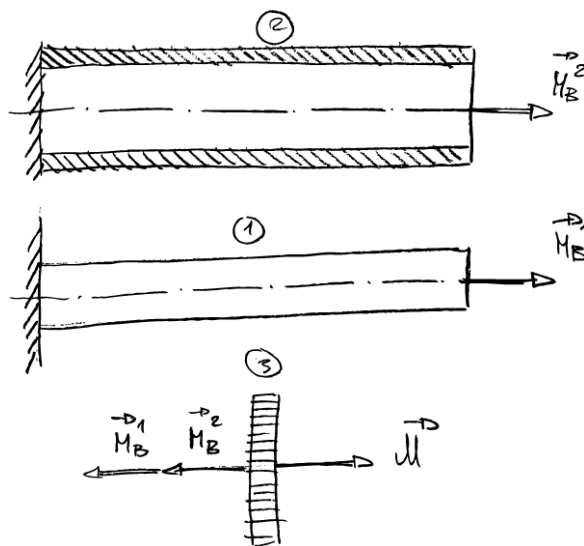
$$\left. \begin{aligned} -M_A^2 + M_B^2 &= 0 \\ -M_A^1 + M_B^1 &= 0 \\ -M_B^1 - M_B^2 + \mathcal{M} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nu = 3,$$

je úloha jedenkrát staticky neurčitá, tj.

$$s = \mu - \nu = 4 - 3 = 1.$$

Částečné uvolnění a deformační podmínka

Statická neurčitost vyžaduje provedení částečného uvolnění. Návodem k částečnému uvolnění je pevná vazba zajištěná neprutovým tělesem č. 3, kterou nahradíme vnějšími momenty M_B^1 a M_B^2 , jak ukazuje následující obrázek.



Přestože jsou v obrázku dvě neznámé nenulové složky M_B^1 a M_B^2 obou momentů $\mathbf{M}_B^1$ i $\mathbf{M}_B^2$, jsou tyto navzájem svázané statickou rovnováhou víka. Jinými slovy, mezi oběma složkami M_B^1 a M_B^2 je lineární závislost, která redukuje počet deformačních podmínek na jednu

$$\varphi_B^1 + \varphi_B^2 = 0,$$

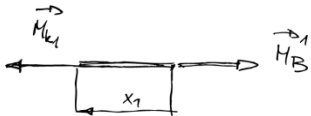
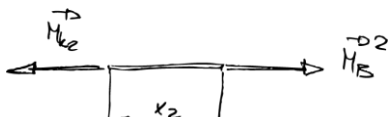
kde φ_B^1 a φ_B^2 je natočení prutu č. 1 a č. 2 v místě B . Číslo prutu $j = 1, 2$ je v horním indexu natočení φ_B^j .

Výsledné vnitřní účinky

Na základě částečného uvolnění se vyjádří výsledné vnitřní účinky u obou prutů, ve kterých smí vystupovat pouze vnější zatížení (silová dvojice $\mathcal{M}$) a neznámý a libovolně zvolený parametr daný z částečného uvolnění (vnější moment $\mathbf{M}_B^1$ nebo $\mathbf{M}_B^2$). S využitím existence volného konce u obou prutů se výsledné vnitřní účinky budou stanovovat zprava. Volba mezi složkou M_B^1 nebo M_B^2 je libovolná a jejich vzájemná závislost se stanoví ze statické rovnováhy neprutového tělesa č. 3. V případě volby M_B^1 jako neznámého parametru se dostane.

$$-M_B^1 - M_B^2 + \mathcal{M} = 0 \Rightarrow M_B^2 = -M_B^1 + \mathcal{M}.$$

Odtud plyne

Úsek	Schéma	Vztah
Prut č. 1, $x_1 \in (0, L)$		$M_{k1} = M_B^1$
Prut č. 2, $x_2 \in (0, L)$		$M_{k2} = M_B^2 = -M_B^1 + \mathcal{M}$

Odstranění statické neurčitosti

Ve výsledných vnitřních účincích vystupuje neznámý parametr M_B^1 , který lze vyjádřit z výše uvedené deformační podmínky

$$\varphi_B^1 + \varphi_B^2 = 0.$$

Výrazy pro φ_B^1 a φ_B^2 na levé straně předchozí rovnice se mohou vyjádřit pomocí Castiglianovy věty jako derivace potenciálu W_1 prutu č. 1 a potenciálu W_2 prutu č. 2 podle složky momentu M_B^1 , tj.

$$\frac{\partial W_1}{\partial M_B^1} + \frac{\partial W_2}{\partial M_B^2} \frac{\partial M_B^2}{\partial M_B^1} = 0,$$

Parciální derivace na levé straně se může rozepsat následovně

$$\begin{aligned} & \frac{M_{k1} l_1}{G_1 J_p^1} \frac{\partial M_{k1}}{\partial M_B^1} + \frac{M_{k2} l_2}{G_2 J_p^2} \frac{\partial M_{k2}}{\partial M_B^2} \frac{\partial M_B^2}{\partial M_B^1} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{M_B^1 L}{G_1 J_p^1} \frac{\partial}{\partial M_B^1} M_B^1 + \frac{(-M_B^1 + \mathcal{M}) L}{G_2 J_p^2} \frac{\partial}{\partial M_B^2} M_B^2 \frac{\partial}{\partial M_B^1} (-M_B^1 + \mathcal{M}) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{M_B^1 L}{G_1 J_p^1} - \frac{(-M_B^1 + \mathcal{M}) L}{G_2 J_p^2} = 0, \end{aligned}$$

kde l_j je délka prutu č. j a J_p^j je polární moment příčného průřezu prutu j . Ve výše odvozené rovnici je jediná neznámá složka M_B^1 momentu $\mathbf{M}_B^1$ a jelikož jde o rovnici lineární, může se z ní i bez problémů vyjádřit

$$M_B^1 \left(\frac{1}{G_1 J_p^1} + \frac{1}{G_2 J_p^2} \right) = \frac{\mathcal{M}}{G_2 J_p^2} \Rightarrow M_B^1 = \frac{\mathcal{M} G_1 J_p^1}{G_2 J_p^2 + G_1 J_p^1}.$$

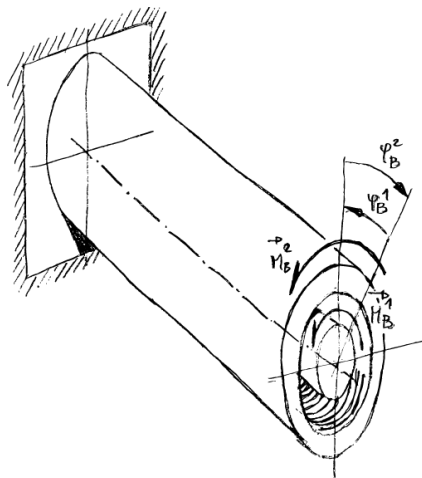
Dosazením M_B^1 do vztahu pro M_B^2 se dostane

$$M_B^2 = -M_B^1 + \mathcal{M} = \frac{-\mathcal{M} G_1 J_p^1 + \mathcal{M} (G_2 J_p^2 + G_1 J_p^1)}{G_2 J_p^2 + G_1 J_p^1} = \frac{\mathcal{M} G_2 J_p^2}{G_2 J_p^2 + G_1 J_p^1}$$

Jak je vidět, že obě složky momentů $\mathbf{M}_B^1$ i $\mathbf{M}_B^2$ jsou kladné a jejich smysl v částečném uvolnění byl zvolen správně. Kromě toho to znamená, že smysl natočení úhlu φ_B^1 a smysl momentu M_B^1 se shodují. Avšak z druhého výrazu v deformační podmínce plyne

$$\varphi_B^2 = \frac{\partial W_2}{\partial M_B^2} \frac{\partial M_B^2}{\partial M_B^1} = -\frac{\partial W_2}{\partial M_B^1}.$$

Tento výsledek mimo jiné znamená, že natočení úhlu φ_B^2 a smysl momentu $\mathbf{M}_B^2$ jsou nesouhlasné, jak ukazuje následující obrázek.



Řešení

Odpovídající maximální smyková napětí v příčných průřezích jednotlivých úseků prutů se stanoví na základě vztahů

$$\tau_1 = \frac{M_{k1}}{W_k^1} = \frac{M_B^1}{W_k^1} = \frac{\mathcal{M} G_1 J_p^1}{(G_2 J_p^2 + G_1 J_p^1) W_k^1},$$

$$\tau_2 = \frac{M_{k2}}{W_k^2} = \frac{M_B^2}{W_k^2} = \frac{\mathcal{M} G_2 J_p^2}{(G_2 J_p^2 + G_1 J_p^1) W_k^2}.$$

Horní index j u W_k^j značí číslo příčného průřezu. V dalším budou nutná numerická vyjádření polárních momentů plochy J_p^1 , J_p^2 , modulů průřezů v krutu W_k^1 a W_k^2 a modulů pružnosti ve smyku G_1 a G_2 ,

$$J_p^1 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi 20^4}{32} = 15708 \text{ mm}^4,$$

$$J_p^2 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi(50^4 - 40^4)}{32} = 362265 \text{ mm}^4,$$

$$W_k^1 = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi 20^3}{16} = 1571 \text{ mm}^3,$$

$$W_k^2 = \frac{2J_p^2}{D} = \frac{2 \times 362265}{50} = 14491 \text{ mm}^4,$$

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1 + \mu_1)} = \frac{2.1 \times 10^5}{2 \times (1 + 0.3)} = 8.1 \times 10^4 \text{ MPa},$$

$$G_2 = \frac{E_2}{2(1 + \mu_2)} = \frac{1.3 \times 10^5}{2(1 + 0.35)} = 4.8 \times 10^4 \text{ MPa}.$$

Výše vyjádřené výrazy a zadaná hodnota $\mathcal{M} = 7.5 \times 10^5 \text{ N} \times \text{mm}$ se dosadí zpět do vztahů pro maximální smyková napětí

$$\tau_1 = \frac{7.5 \times 10^5 \times 8.1 \times 10^4 \times 15708}{(4.8 \times 10^4 \times 362265 + 8.1 \times 10^4 \times 15708) \times 1571} = 32.6 \text{ MPa},$$

$$\tau_2 = \frac{7.5 \times 10^5 \times 4.8 \times 10^4 \times 362265}{(4.8 \times 10^4 \times 362265 + 8.1 \times 10^4 \times 15708) \times 14491} = 48.2 \text{ MPa}.$$

.

Odpovídající bezpečnosti vzhledem meznímu stavu pružnosti jsou

$$k_1 = \frac{\sigma_k^1}{2\tau_1} = \frac{350}{2 \times 32.6} = 5.4,$$

$$k_2 = \frac{\sigma_k^2}{2\tau_2} = \frac{80}{2 \times 48.2} = 0.8.$$

Celková bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti je $k = \min\{k_1, k_2\} = 0.8$. Tato bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti je nedostatečná a je nutné změnit geometrii, materiál nebo zatížení prutové soustavy.