

6. Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v PP je nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa, které splňuje jisté geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady (prutové předpoklady).

6. Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v PP je nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa, které splňuje jisté geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady (**prutové předpoklady**).

Vždy budou existovat **odchyly** reálného tělesa od teoretického modelu - vliv na přesnost řešení napjatosti a deformace.

6. Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v PP je nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa, které splňuje jisté geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady (**prutové předpoklady**).

Vždy budou existovat **odchyly** reálného tělesa od teoretického modelu - vliv na přesnost řešení napjatosti a deformace.

Je nutno se zabývat vlivem odchylek a formulovat podmínky použitelnosti výpočtového modelu.

6. Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v PP je nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa, které splňuje jisté geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady (**prutové předpoklady**).

Vždy budou existovat **odchylky** reálného tělesa od teoretického modelu - vliv na přesnost řešení napjatosti a deformace.

Je nutno se zabývat vlivem odchylek a formulovat podmínky použitelnosti výpočtového modelu.

Odchylky

- **podstatné** - prut **není** použitelným výpočtovým modelem,

6. Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v PP je nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa, které splňuje jisté geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady (**prutové předpoklady**).

Vždy budou existovat **odchylky** reálného tělesa od teoretického modelu - vliv na přesnost řešení napjatosti a deformace.

Je nutno se zabývat vlivem odchylek a formulovat podmínky použitelnosti výpočtového modelu.

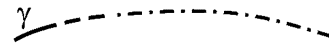
Odchylky

- **podstatné** - prut **není** použitelným výpočtovým modelem,
- **nepodstatné** - prut **je** použitelným výpočtovým modelem.

6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

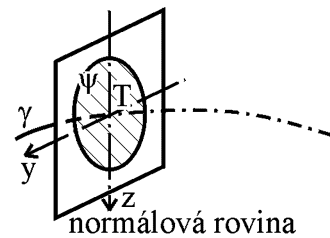
- střednice γ ,



6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

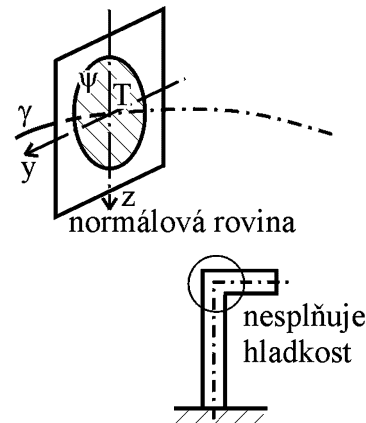
- střednice γ ,
v každém bodě γ příčný průřez ψ .



6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

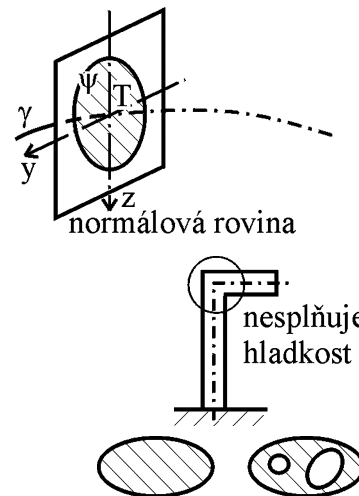
- střednice γ ,
v každém bodě γ příčný průřez ψ
- γ – spojitá a hladká křivka konečné délky



6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

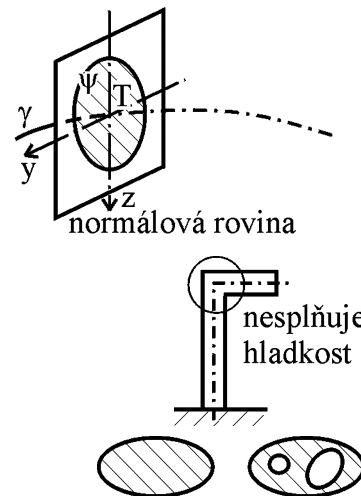
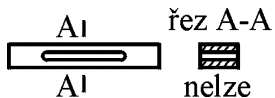
- střednice γ ,
v každém bodě γ příčný průřez ψ
- γ – spojitá a hladká křivka konečné délky
- ψ – jednoduše nebo vícenásobně souvislá oblast (obrys, charakteristiky ψ)



6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

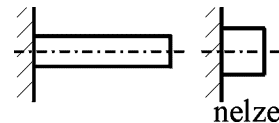
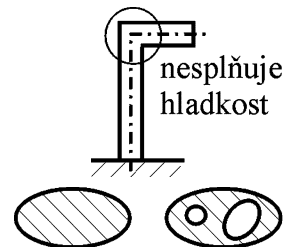
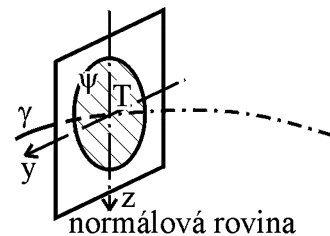
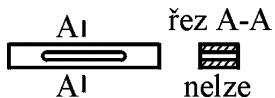
- střednice γ ,
v každém bodě γ příčný průřez ψ
- γ – spojitá a hladká křivka konečné délky
- ψ – jednoduše nebo vícenásobně souvislá oblast (obrys, charakteristiky ψ)



6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

- střednice γ ,
v každém bodě γ příčný průřez ψ
- γ – spojitá a hladká křivka konečné délky
- ψ – jednoduše nebo vícenásobně souvislá oblast
(obrys, charakteristiky ψ)
- délka střednice $\gg$ než největší rozměr ψ



b) předpoklady vazbové a zatěžovací

b) předpoklady vazbové a zatěžovací

- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení γ

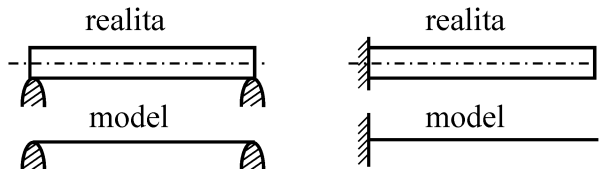
b) předpoklady vazbové a zatěžovací

- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení γ



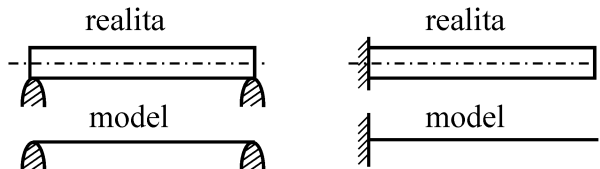
b) předpoklady vazbové a zatěžovací

- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení γ

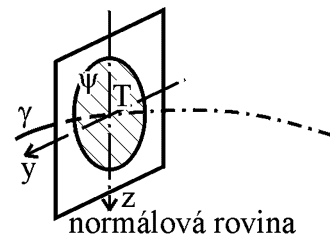


b) předpoklady vazbové a zatěžovací

- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení γ

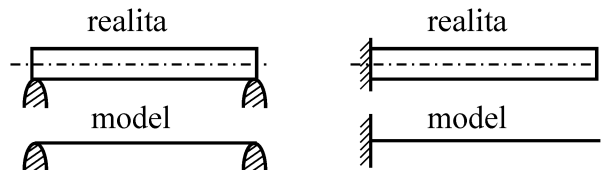


- zatížení soustředěno na γ

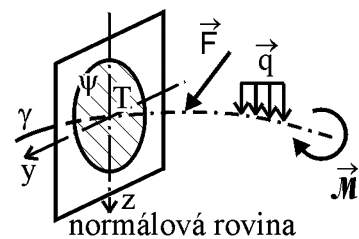


b) předpoklady vazbové a zatěžovací

- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení γ

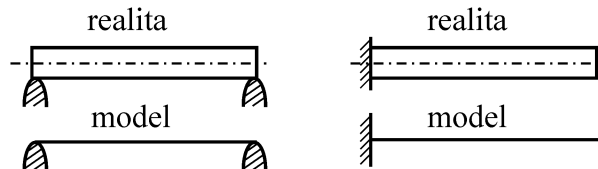


- zatížení soustředěno na γ

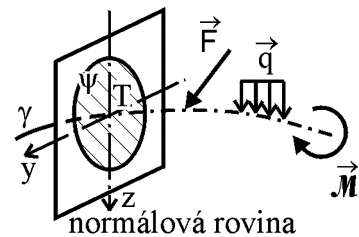
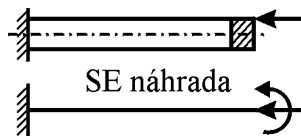


b) předpoklady vazbové a zatěžovací

- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení γ



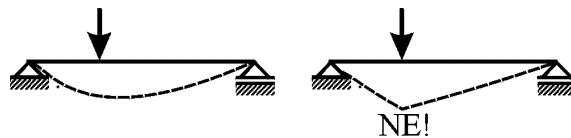
- zatížení soustředěno na γ



c) předpoklady deformační

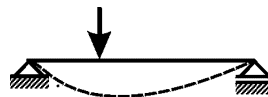
c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

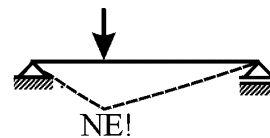


c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

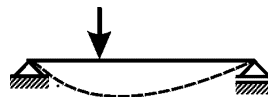


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici

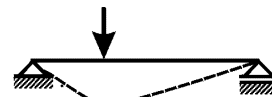


c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

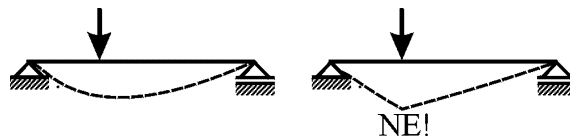


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně
 - oddalují (tah),
 - přibližují (tlak),



c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

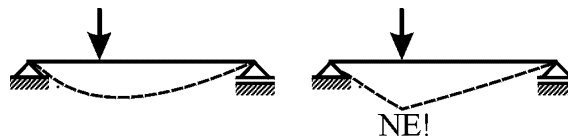


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně
 - oddalují (tah),
 - přibližují (tlak),



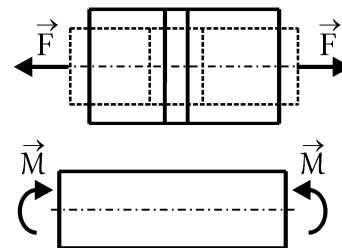
c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká



- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně

- oddalují (tah),
přibližují (tlak),



- natáčí kolem osy v ψ (ohyb),

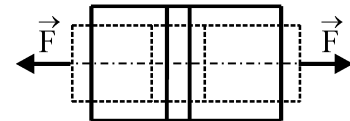
c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

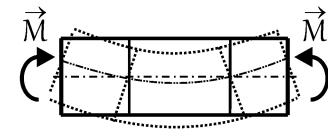


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně

- oddalují (tah),
přibližují (tlak),

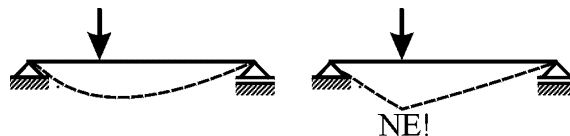


- natáčejí kolem osy v ψ (ohyb),



c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

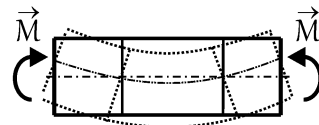


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně

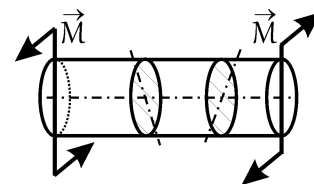
- oddalují (tah),
přibližují (tlak),



- natáčejí kolem osy ψ (ohyb),



- natáčejí kolem osy $\perp$ k ψ (krut),



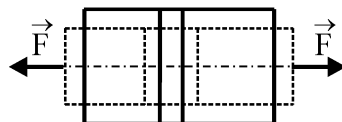
c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

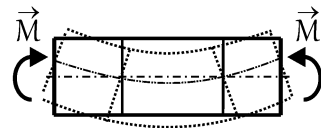


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně

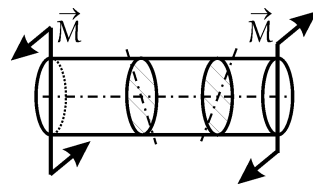
- oddalují (tah),
přibližují (tlak),



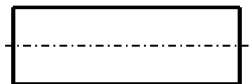
- natáčíjí kolem osy v ψ (ohyb),



- natáčíjí kolem osy $\perp$ k ψ (krut),



- posouvají $\perp$ ke γ (smyk).



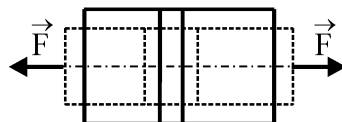
c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

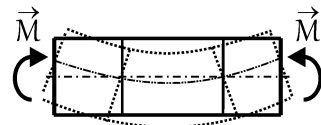


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně

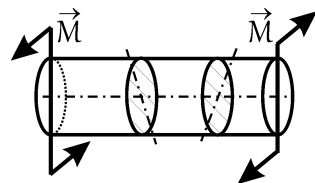
- oddalují (tah),
přibližují (tlak),



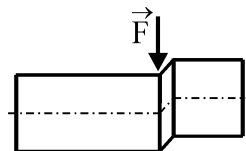
- natáčí kolem osy v ψ (ohyb),



- natáčí kolem osy $\perp$ k ψ (krut),



- posouvají $\perp$ ke γ (smyk).



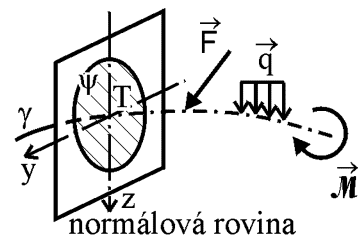
d) předpoklady napjatostní

■

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

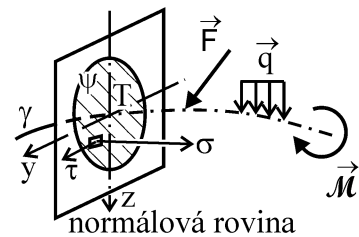
d) předpoklady napjatostní

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



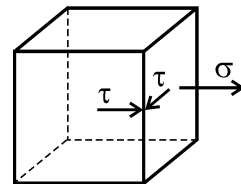
d) předpoklady napjatostní

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



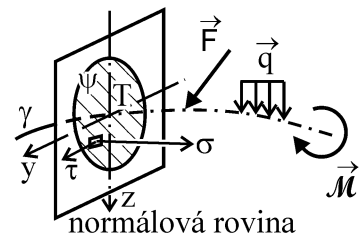
prutová napjatost

napjatost v prutu je určena normálovou a smykovou složkou obecného napětí v příčném průřezu



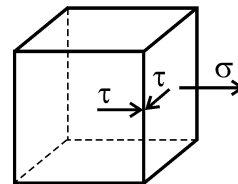
d) předpoklady napjatostní

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



prutová napjatost

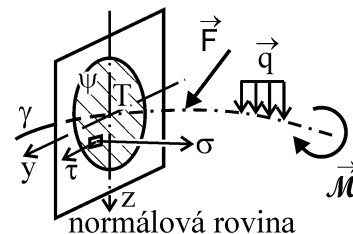
napjatost v prutu je určena normálovou a smykovou složkou obecného napětí v příčném průřezu



$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

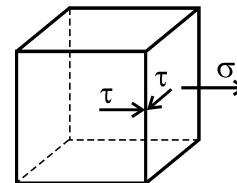
d) předpoklady napjatostní

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



prutová napjatost

napjatost v prutu je určena normálovou a smykovou složkou obecného napětí v příčném průřezu



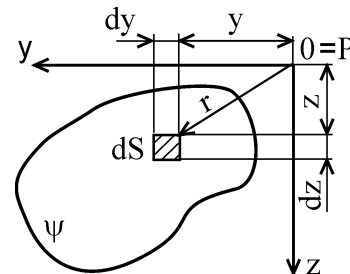
$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.2. Geometrické charakteristiky příčného průřezu

Jsou to veličiny, které charakterizují příčný průřez, a obsahují je vztahy, které si dále odvodíme pro výpočet napětí a deformace pro jednotlivé způsoby namáhání.

6.2.1. Plocha příčného průřezu

$$S = \iint_{\psi} dS = \iint_{\psi} dydz, \quad m^2$$



6.2.2. Lineární (statické) momenty

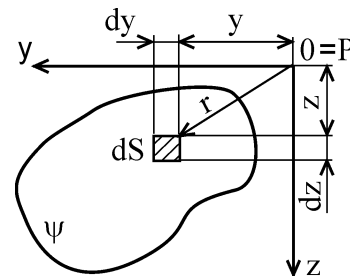
$$U_y = \iint_{\psi} z dS, \quad U_z = \iint_{\psi} y dS, \quad m^3$$

S lineárními momenty jste se setkali už ve statice.

Jak se určí těžiště?

$$\vec{r}_T = \frac{\iint_{\Omega} \vec{r} dF_G}{\iint_{\Omega} dF_G} \quad \text{a pro} \quad \rho = \text{konst.}, t = \text{konst.} \quad \vec{r}_T = \frac{\iint \vec{r} dS}{S}$$

$$y_T = \frac{\iint \psi y dS}{S} = \frac{U_z}{S} \quad z_T = \frac{\iint \psi z dS}{S} = \frac{U_y}{S}$$



6.2.3. Kvadratické momenty

- Osové kvadratické momenty

$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS, \quad J_z = \iint_{\psi} y^2 dS, \quad m^4$$

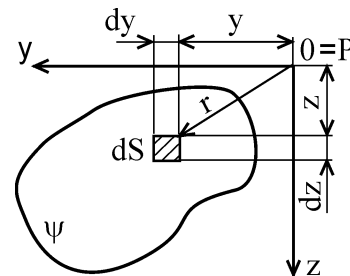
- Deviační kvadratický moment

$$J_{yz} = \iint_{\psi} yz dS, \quad m^4$$

- Polární kvadratický moment

$$J_P = \iint_{\psi} r^2 dS, \quad m^4$$

$$r^2 = y^2 + z^2 \quad J_P = \iint_{\psi} r^2 dS = \iint_{\psi} (y^2 + z^2) dS = \iint_{\psi} y^2 dS + \iint_{\psi} z^2 dS = J_z + J_y$$



6.2.4. Základní vlastnosti kvadratických momentů průřezu

Vyplývají z vlastností integrálů.

1. Aditivnost : Kvadratické momenty celého průřezu ψ k daným osám jsou rovny součtu kvadratických momentů částí průřezu ψ_i k těmže osám.
2. Hodnoty osových a polárních kvadratických momentů jsou kladné. Hodnota deviačního momentu může být jakékoliv reálné číslo.
3. Osové momenty symetrických průřezů k ose symetrie i k ose k ní kolmé jsou stejné. Deviační momenty k těmto osám jsou rovněž stejné, ale opačných znamének.

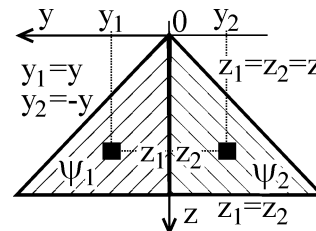
Důkaz: $\psi_1 = \psi_2$, $J_z^1 = \iint_{\psi_1} y_1^2 dS = \iint_{\psi_2} y_2^2 dS = J_z^2$

$$J_y^1 = \iint_{\psi_1} z^2 dS = \iint_{\psi_2} z^2 dS = J_y^2,$$

$$J_{yz}^1 = \iint_{\psi_1} yz dS = - \iint_{\psi_2} (-y)z dS = -J_{yz}^2, \quad J_{yz}^{1+2} = J_{yz}^1 + J_{yz}^2 = 0.$$

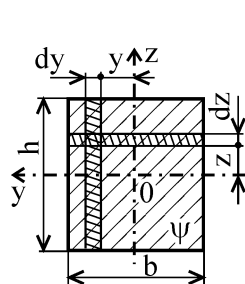
Odtud plyne: Deviační moment symetrického průřezu k pravoúhlému souřadnicovému systému, kde alespoň jedna z os je osou symetrie, je roven nule.

4. Lineární moment k ose procházející těžištěm průřezu (centrální osa) je roven nule.



6.2.5. Kvadratické momenty základních tvarů průřezů

a) Obdélník

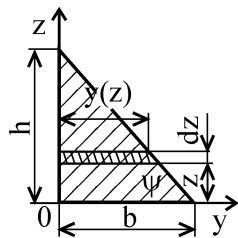


$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 b dz = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_z = \iint_{\psi} y^2 dS = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 h dy = \frac{hb^3}{12}$$

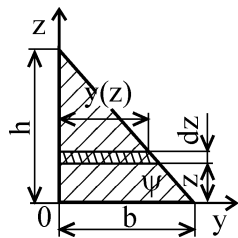
$$J_{yz} = \iint_{\psi} yz dS = 0$$

b) Trojúhelník



$$\frac{y(z)}{b} = \frac{h-z}{h} \rightarrow y(z) = b - \frac{b}{h}z$$

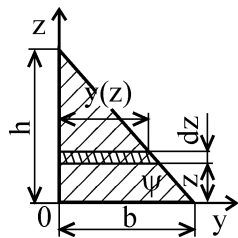
b) Trojúhelník



$$\frac{y(z)}{b} = \frac{h-z}{h} \rightarrow y(z) = b - \frac{b}{h}z$$

$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS = \int_0^h z^2 \left(b - \frac{b}{h}z\right) dz = \frac{bh^3}{12}$$

b) Trojúhelník



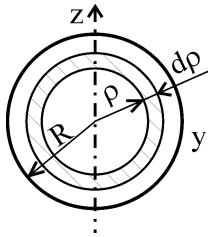
$$\frac{y(z)}{b} = \frac{h-z}{h} \rightarrow y(z) = b - \frac{b}{h}z$$

$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS = \int_0^h z^2 \left(b - \frac{b}{h}z\right) dz = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_z = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_{yz} = \iint_{\psi} yz dS = \int_0^h \int_0^{y(z)} yz dy dz = \frac{b^2 h^2}{24}$$

c) Kruh



$$J_y = J_z \quad J_y + J_z = J_P \Rightarrow J_y = \frac{1}{2} J_P$$

$$dS = 2\pi\rho \cdot d\rho \quad J_P = \iint_{\psi} \rho^2 dS = \int_0^R \rho^2 2\pi\rho \cdot d\rho = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$J_y = J_z = \frac{J_P}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \quad J_{yz} = 0$$

6.2.6. Kvadratické momenty průřezu při transformaci souřadnic

Určíme kvadratické momenty k osám, ke kterým je výpočet nejsnadnější (nebo je známe), a pak je přepočteme k požadovaným osám.

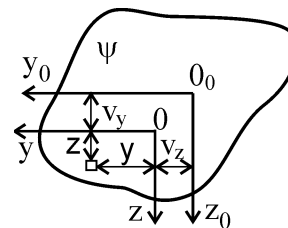
*6.2 [PPI, 67 – 74]

a) **Transformace posunutím**

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_0 a z_0 a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .

$$y = y_0 - v_z$$

$$z = z_0 - v_y$$

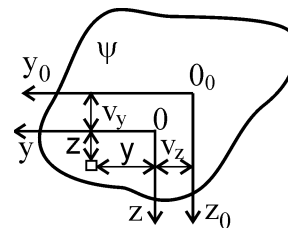


a) Transformace posunutím

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_0 a z_0 a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .

$$y = y_0 - v_z$$

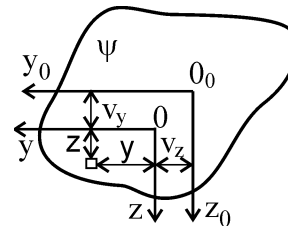
$$z = z_0 - v_y$$



$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS = \iint_{\psi} (z_0 - v_y)^2 dS = \iint_{\psi} z_0^2 dS - 2v_y \iint_{\psi} z_0 dS + v_y^2 \iint_{\psi} dS = J_{y_0} - 2v_y U_{y_0} + v_y^2 S$$

a) Transformace posunutím

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_0 a z_0 a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .



$$y = y_0 - v_z$$

$$z = z_0 - v_y$$

$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS = \iint_{\psi} (z_0 - v_y)^2 dS = \iint_{\psi} z_0^2 dS - 2v_y \iint_{\psi} z_0 dS + v_y^2 \iint_{\psi} dS = J_{y_0} - 2v_y U_{y_0} + v_y^2 S$$

$$J_z = \iint_{\psi} y^2 dS = J_{z_0} - 2v_z U_{z_0} + v_z^2 S$$

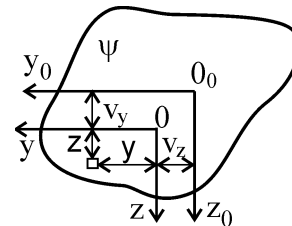
$$J_{yz} = \iint_{\psi} yz dS = \iint_{\psi} (y_0 - v_z)(z_0 - v_y) dS = J_{y_0 z_0} - v_z U_{y_0} - v_y U_{z_0} + v_y v_z S$$

a) Transformace posunutím

Zvolíme osy y_0, z_0 tak, že mají počátek v těžišti příčného průřezu - osy centrální y_T, z_T .
Lineární momenty k centrálním osám jsou rovny 0 $\rightarrow$

Steinerova věta

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_T a z_T procházejícím těžištěm a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .



$$J_y = J_{y_0} - 2v_y U_{y_0} + v_y^2 S$$

$$J_z = J_{z_0} - 2v_z U_{z_0} + v_z^2 S$$

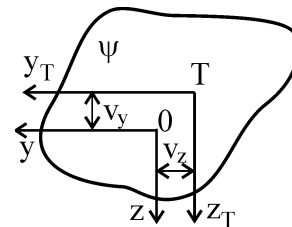
$$J_{yz} = J_{y_0 z_0} - v_z U_{y_0} - v_y U_{z_0} + v_y v_z S$$

a) Transformace posunutím

Zvolíme osy y_0, z_0 tak, že mají počátek v těžišti příčného průřezu - osy centrální y_T, z_T .
Lineární momenty k centrálním osám jsou rovny 0 $\rightarrow$

Steinerova věta

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_T a z_T procházejícím těžištěm a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .



$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S$$

$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S$$

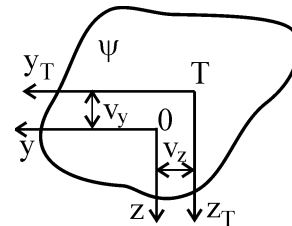
$$J_{yz} = J_{y_T z_T} + v_y v_z S$$

a) Transformace posunutím

Zvolíme osy y_0, z_0 tak, že mají počátek v těžišti příčného průřezu - osy centrální y_T, z_T .
Lineární momenty k centrálním osám jsou rovny 0 $\rightarrow$

Steinerova věta

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_T a z_T procházejícím těžištěm a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .



$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S$$

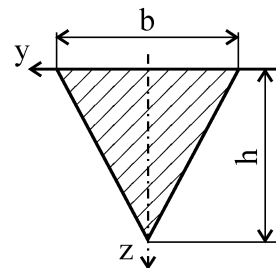
$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S$$

$$J_{yz} = J_{y_T z_T} + v_y v_z S$$

$$J_P = J_{P_T} + (v_y^2 + v_z^2) S$$

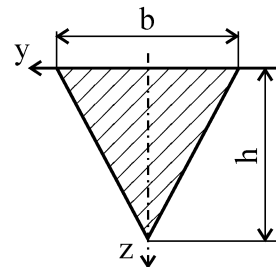
Příklad 1:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru rovnoramenného trojúhelníka k osám y, z .



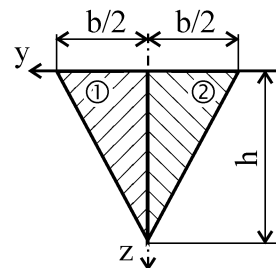
Příklad 1:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru rovnoramenného trojúhelníka k osám y, z .



Řešení:

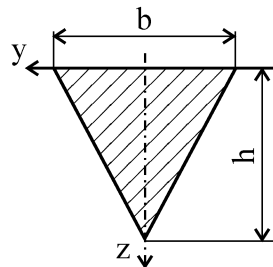
Využijeme základních vlastností kvadratických momentů a průřez rozdělíme na dvě symetrické části tvaru pravoúhlého trojúhelníka. Tento tvar patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít.



$$J_y^{(1)} = J_y^{(2)} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12}$$

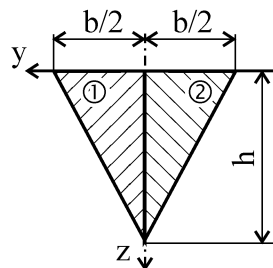
Příklad 1:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru rovnoramenného trojúhelníka k osám y, z .



Řešení:

Využijeme základních vlastností kvadratických momentů a průřez rozdělíme na dvě symetrické části tvaru pravoúhlého trojúhelníka. Tento tvar patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít.

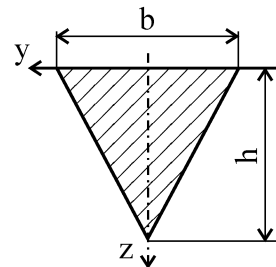


$$J_y^{(1)} = J_y^{(2)} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12}$$

$$J_z^{(1)} = J_z^{(2)} = \frac{h \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12}$$

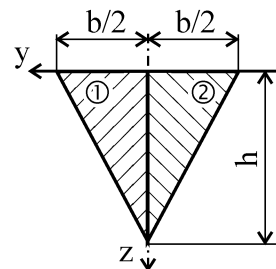
Příklad 1:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru rovnoramenného trojúhelníka k osám y, z .



Řešení:

Využijeme základních vlastností kvadratických momentů a průřez rozdělíme na dvě symetrické části tvaru pravoúhlého trojúhelníka. Tento tvar patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít.



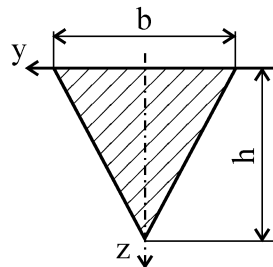
$$J_y^{(1)} = J_y^{(2)} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12}$$

$$J_z^{(1)} = J_z^{(2)} = \frac{h \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12}$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = 2 \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12},$$

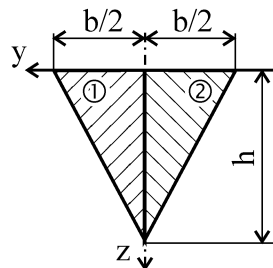
Příklad 1:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru rovnoramenného trojúhelníka k osám y, z .



Řešení:

Využijeme základních vlastností kvadratických momentů a průřez rozdělíme na dvě symetrické části tvaru pravoúhlého trojúhelníka. Tento tvar patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít.



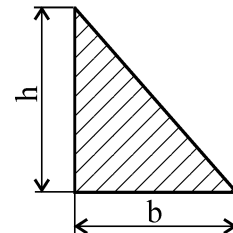
$$J_y^{(1)} = J_y^{(2)} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12}$$

$$J_z^{(1)} = J_z^{(2)} = \frac{h \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12}$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = 2 \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12}, \quad J_z = J_z^{(1)} + J_z^{(2)} = 2 \frac{h \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12}, \quad J_{yz} = 0$$

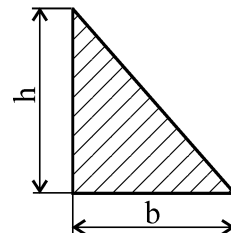
Příklad 2:

Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru pravoúhlého trojúhelníka k osám rovnoběžným s jeho odvěsnami.



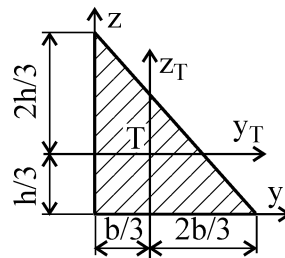
Příklad 2:

Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru pravoúhlého trojúhelníka k osám rovnoběžným s jeho odvěsnami.



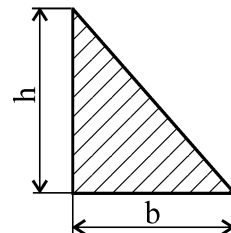
Řešení:

Centrální osy jsou osy procházející těžištěm průřezu (y_T, z_T). Průřez je tvaru pravoúhlého trojúhelníka, patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít. Kvadratické momenty máme odvozeny k osám, které leží v odvěsnách trojúhelníka (y, z). Musíme tedy transformovat posunutím a k tomu využijeme **Steinerovu větu**.



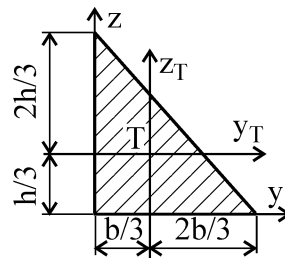
Příklad 2:

Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru pravoúhlého trojúhelníka k osám rovnoběžným s jeho odvěsnami.



Řešení:

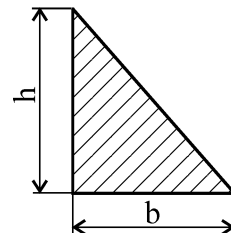
Centrální osy jsou osy procházející těžištěm průřezu (y_T, z_T). Průřez je tvaru pravoúhlého trojúhelníka, patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít. Kvadratické momenty máme odvozeny k osám, které leží v odvěsnách trojúhelníka (y, z). Musíme tedy transformovat posunutím a k tomu využijeme **Steinerovu větu**.



$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{3}\right)^2 S \Rightarrow J_{y_T} = \frac{bh^3}{12} - \left(-\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

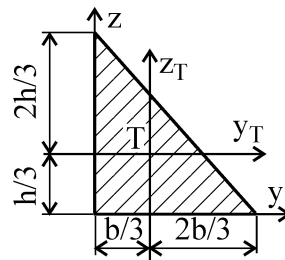
Příklad 2:

Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru pravoúhlého trojúhelníka k osám rovnoběžným s jeho odvěsnami.



Řešení:

Centrální osy jsou osy procházející těžištěm průřezu (y_T, z_T). Průřez je tvaru pravoúhlého trojúhelníka, patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít. Kvadratické momenty máme odvozeny k osám, které leží v odvěsnách trojúhelníka (y, z). Musíme tedy transformovat posunutím a k tomu využijeme **Steinerovu větu**.

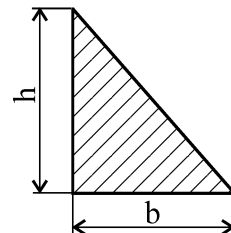


$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{3}\right)^2 S \Rightarrow J_{y_T} = \frac{bh^3}{12} - \left(-\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S = J_{z_T} + \left(-\frac{b}{3}\right)^2 S \Rightarrow J_{z_T} = \frac{hb^3}{12} - \left(-\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36}$$

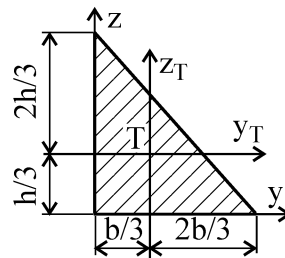
Příklad 2:

Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru pravoúhlého trojúhelníka k osám rovnoběžným s jeho odvěsnami.



Řešení:

Centrální osy jsou osy procházející těžištěm průřezu (y_T, z_T). Průřez je tvaru pravoúhlého trojúhelníka, patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít. Kvadratické momenty máme odvozeny k osám, které leží v odvěsnách trojúhelníka (y, z). Musíme tedy transformovat posunutím a k tomu využijeme **Steinerovu větu**.



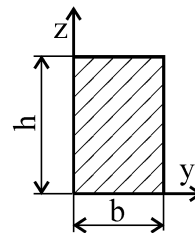
$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{3}\right)^2 S \Rightarrow J_{y_T} = \frac{bh^3}{12} - \left(-\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S = J_{z_T} + \left(-\frac{b}{3}\right)^2 S \Rightarrow J_{z_T} = \frac{hb^3}{12} - \left(-\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36}$$

$$J_{yz} = J_{y_T z_T} + v_y v_z S = J_{y_T z_T} + \left(-\frac{h}{3}\right) \left(-\frac{b}{3}\right) S \Rightarrow J_{y_T z_T} = \frac{b^2 h^2}{24} - \left(-\frac{h}{3}\right) \left(-\frac{b}{3}\right) \frac{bh}{2} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

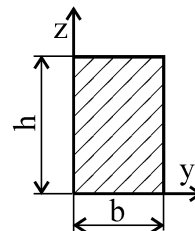
Příklad 3:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru obdélníka k osám y, z .



Příklad 3:

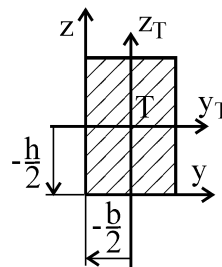
Určete kvadratické momenty průřezu tvaru obdélníka k osám y, z .



Řešení:

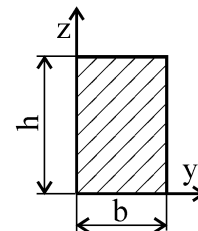
Kvadratické momenty máme odvozeny k centrálním osám a musíme tedy použít transformaci posunutím – **Steinerovu větu**.

$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{3}$$



Příklad 3:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru obdélníka k osám y, z .

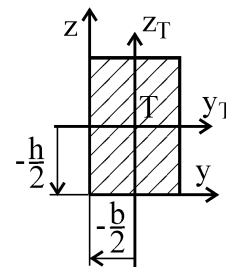


Řešení:

Kvadratické momenty máme odvozeny k centrálním osám a musíme tedy použít transformaci posunutím – **Steinerovu větu**.

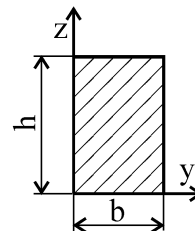
$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{3}$$

$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S = J_{z_T} + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{12} + \frac{b^2}{4}bh = \frac{hb^3}{3}$$



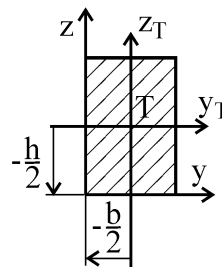
Příklad 3:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru obdélníka k osám y, z .



Řešení:

Kvadratické momenty máme odvozeny k centrálním osám a musíme tedy použít transformaci posunutím – **Steinerovu větu**.

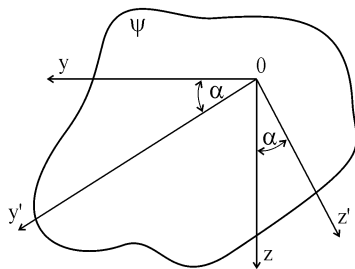


$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{3}$$

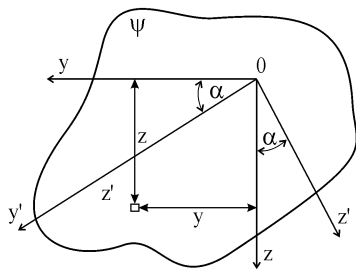
$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S = J_{z_T} + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{12} + \frac{b^2}{4}bh = \frac{hb^3}{3}$$

$$J_{yz} = J_{y_T z_T} + v_y v_z S = J_{y_T z_T} + \left(-\frac{h}{2}\right) \left(-\frac{b}{2}\right) bh = 0 + \frac{h}{2} \frac{b}{2} bh = \frac{b^2 h^2}{4}$$

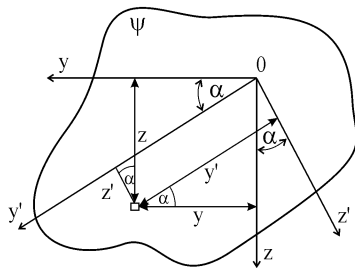
b) **Transformace natočením** - odvození skript PP, str. 68 - 69



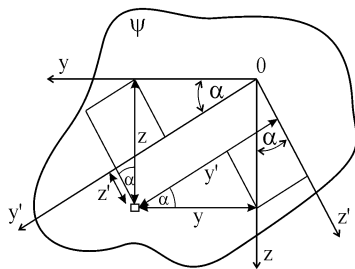
b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



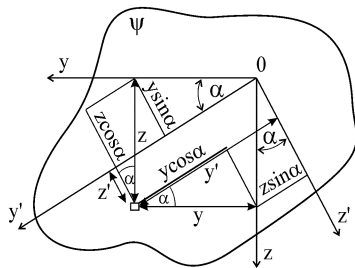
b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



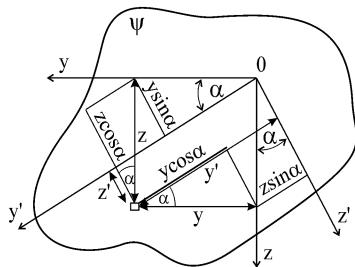
b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69

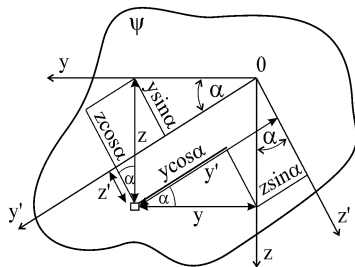


$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} J_{y'} &= \iint_{\psi} z'^2 dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



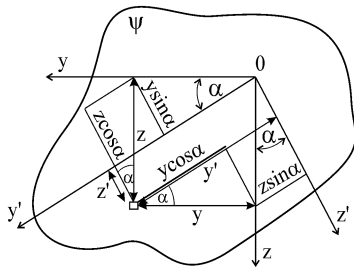
$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} J_{y'} &= \iint_{\psi} z'^2 dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{z'} &= \iint_{\psi} y'^2 dS = \iint_{\psi} (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_z \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

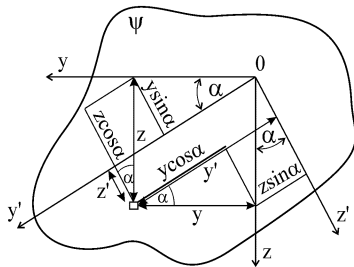
$$\begin{aligned} J_{y'} &= \iint_{\psi} z'^2 dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{z'} &= \iint_{\psi} y'^2 dS = \iint_{\psi} (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_z \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{y'z'} &= \iint_{\psi} y' z' dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)(y \cos \alpha + z \sin \alpha) dS = \\ &= \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$J_{P'} = J_{y'} + J_{z'} = J_y (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_z (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = J_P$$

b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} J_{y'} &= \iint_{\psi} z'^2 dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{z'} &= \iint_{\psi} y'^2 dS = \iint_{\psi} (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_z \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

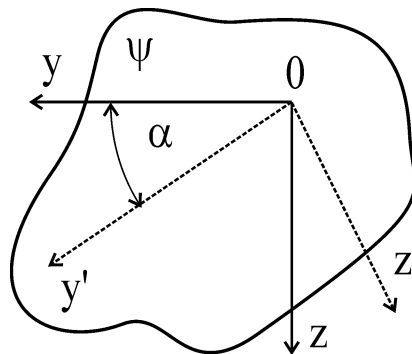
$$\begin{aligned} J_{y'z'} &= \iint_{\psi} y' z' dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)(y \cos \alpha + z \sin \alpha) dS = \\ &= \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$J_{P'} = J_{y'} + J_{z'} = J_y (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_z (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = J_P$$

Polární kvadratický moment nezávisí na úhlu natočení souř. systému – **invariantní veličina**.

6.2.7. Hlavní kvadratické momenty

V množině pootočených souřadných systémů y', z' existuje takový souřadný systém y_h, z_h , ke kterému je deviační moment roven nule.

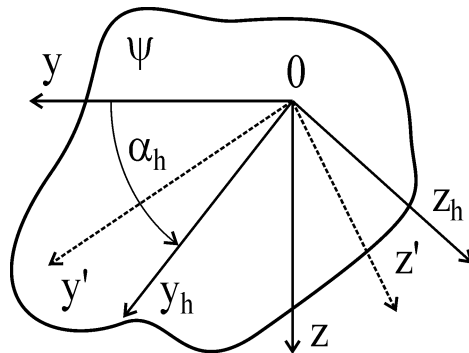


6.2.7. Hlavní kvadratické momenty

V množině pootočených souřadných systémů y', z' existuje takový souřadný systém y_h, z_h , ke kterému je deviační moment roven nule.

$$J_{y_h z_h} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha_h + J_{yz} \cos 2\alpha_h = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_h = -\frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \Rightarrow \alpha_h = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} \right)$$

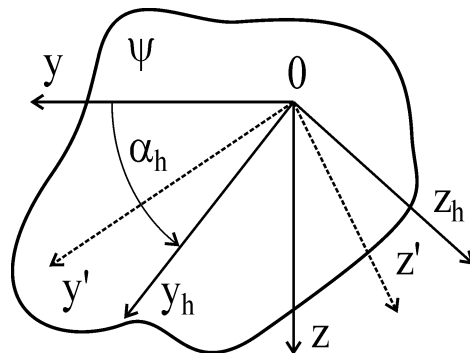


6.2.7. Hlavní kvadratické momenty

V množině pootočených souřadných systémů y', z' existuje takový souřadný systém y_h, z_h , ke kterému je deviační moment roven nule.

$$J_{y_h z_h} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha_h + J_{yz} \cos 2\alpha_h = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_h = -\frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \Rightarrow \alpha_h = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} \right)$$



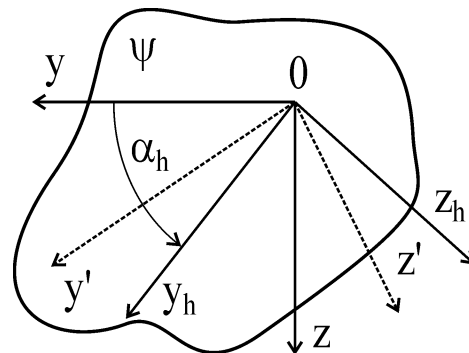
Je to tzv. **hlavní souřadný systém** a jeho osy se nazývají **osy hlavní**. Kvadratické momenty k tomuto souřadnému systému jsou **hlavní kvadratické momenty** J_{y_h}, J_{z_h} . Větší z nich se nazývá **maximální hlavní kvadratický moment** a označuje se J_1 , menší se nazývá **minimální hlavní kvadratický moment** a označuje se J_2 .

6.2.7. Hlavní kvadratické momenty

V množině potočených souřadných systémů y', z' existuje takový souřadný systém y_h, z_h , ke kterému je deviační moment roven nule.

$$J_{y_h z_h} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha_h + J_{yz} \cos 2\alpha_h = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_h = -\frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \Rightarrow \alpha_h = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} \right)$$



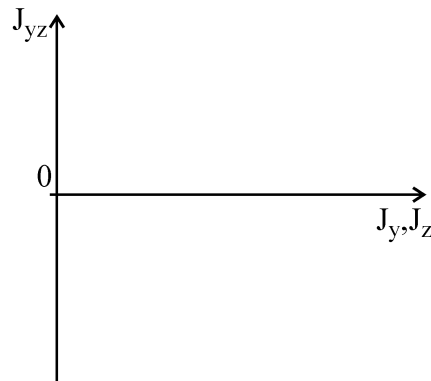
Je to tzv. **hlavní souřadný systém** a jeho osy se nazývají **osy hlavní**. Kvadratické momenty k tomuto souřadnému systému jsou **hlavní kvadratické momenty** J_{y_h}, J_{z_h} . Větší z nich se nazývá **maximální hlavní kvadratický moment** a označuje se J_1 , menší se nazývá **minimální hlavní kvadratický moment** a označuje se J_2 .

Pokud hlavní souřadnicový systém má počátek v těžišti, nazývá se **hlavní centrální souřadnicový systém**.

6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.



*6.2 [PPI, 71 – 74]

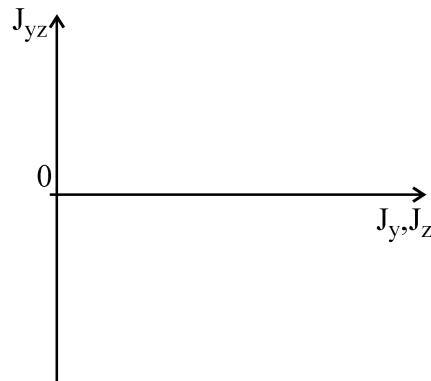
6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

$$J_{y'} = J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha$$

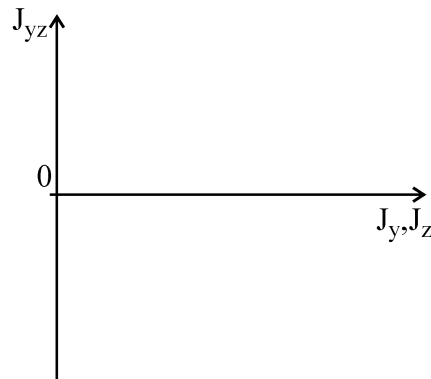
$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$



6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.



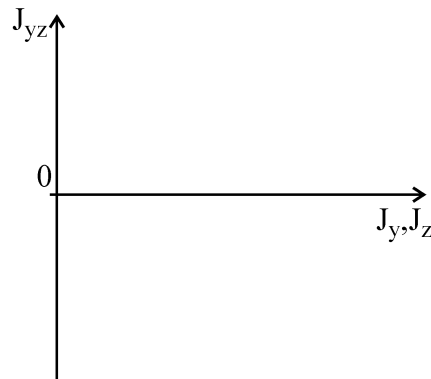
$$\begin{aligned} J_{y'} &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \\ &= J_y \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.



$$\begin{aligned} J_{y'} &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \\ &= J_y \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

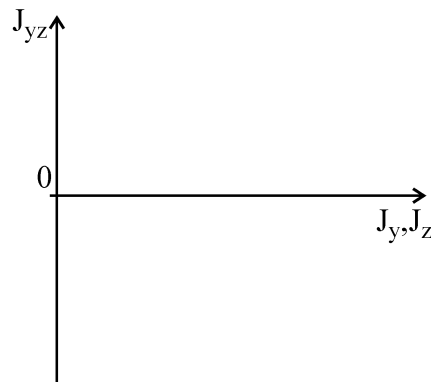
6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

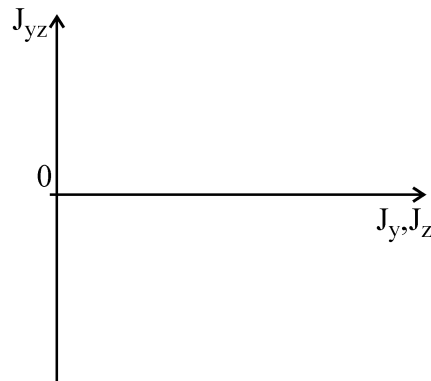
$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$



6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.



$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

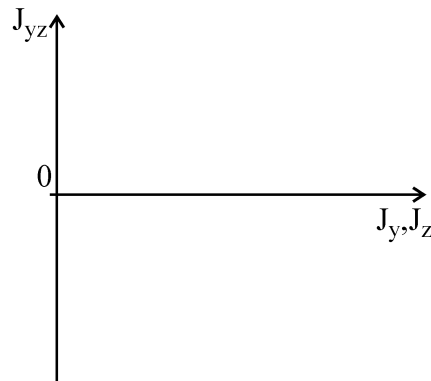
$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.



$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

→ rovnice kružnice s poloměrem $r = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$,

6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

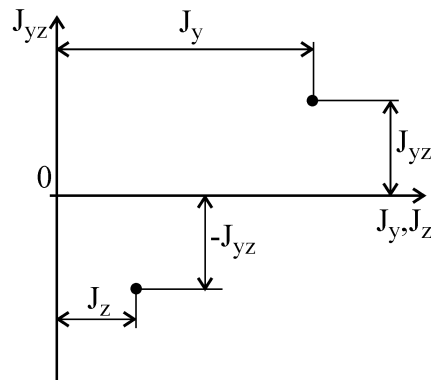
$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

→ rovnice kružnice s poloměrem $r = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$,

vodorovná osa – osově kvadratické momenty, osa svislá – momenty deviační, souřadnici J_y přísluší odpovídající (vypočítané) znaménko u J_{yz} , souřadnici J_z pak přísluší J_{yz} stejně velký, ale s opačným znaménkem.



6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

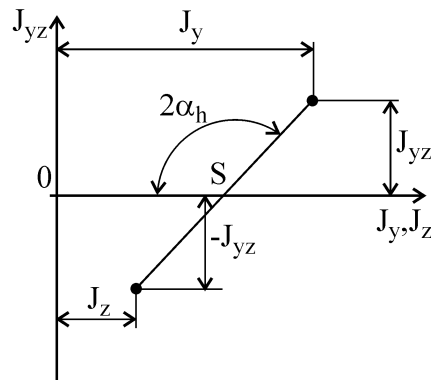
$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

→ rovnice kružnice s poloměrem $r = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$,

vodorovná osa – osově kvadratické momenty, osa svislá – momenty deviační, souřadnici J_y přísluší odpovídající (vypočítané) znaménko u J_{yz} , souřadnici J_z pak přísluší J_{yz} stejně velký, ale s opačným znaménkem.



6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

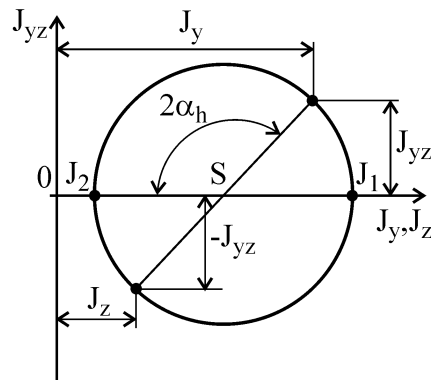
$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

→ rovnice kružnice s poloměrem $r = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$,

vodorovná osa – osově kvadratické momenty, osa svislá – momenty deviační, souřadnici J_y přísluší odpovídající (vypočítané) znaménko u J_{yz} , souřadnici J_z pak přísluší J_{yz} stejně velký, ale s opačným znaménkem.



6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

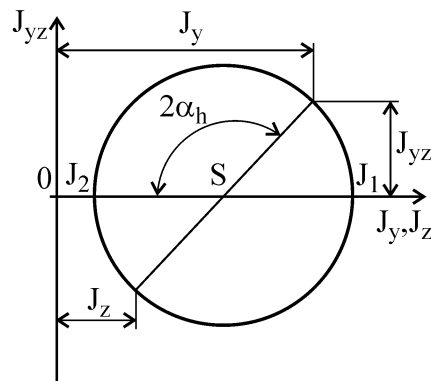
$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

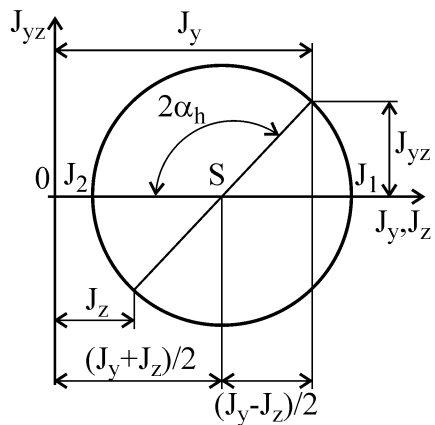
→ rovnice kružnice s poloměrem $r = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$,

vodorovná osa – osově kvadratické momenty, osa svislá – momenty deviační, souřadnici J_y přísluší odpovídající (vypočítané) znaménko u J_{yz} , souřadnici J_z pak přísluší J_{yz} stejně velký, ale s opačným znaménkem.



6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty



a)

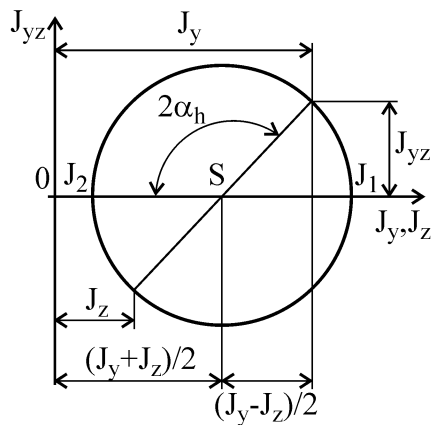
$$\alpha_h = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} \right)$$

$$J_{y_h} = J_y \cos^2 \alpha_h - J_{yz} \sin 2\alpha_h + J_z \sin^2 \alpha_h$$

$$J_{z_h} = J_z \cos^2 \alpha_h + J_{yz} \sin 2\alpha_h + J_y \sin^2 \alpha_h$$

6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty



a)

$$\alpha_h = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} \right)$$

$$J_{y_h} = J_y \cos^2 \alpha_h - J_{yz} \sin 2\alpha_h + J_z \sin^2 \alpha_h$$

$$J_{z_h} = J_z \cos^2 \alpha_h + J_{yz} \sin 2\alpha_h + J_y \sin^2 \alpha_h$$

b)

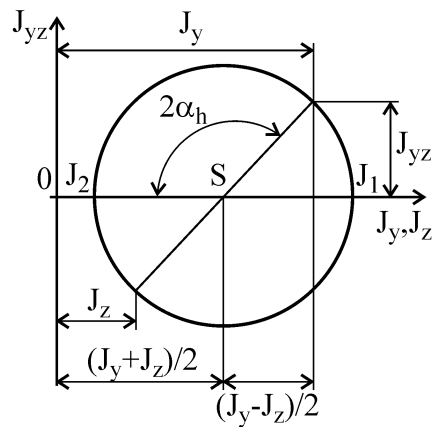
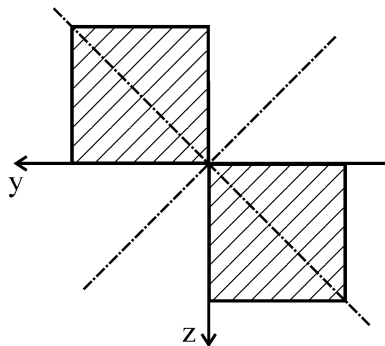
$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$$

6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty

b)

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$

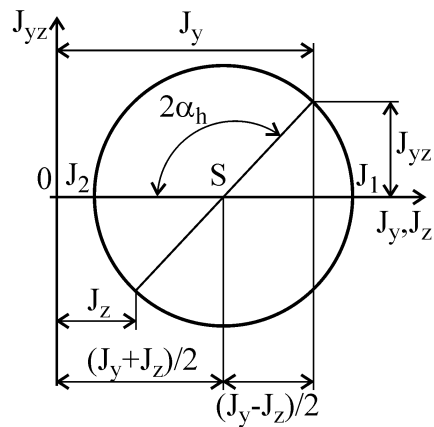
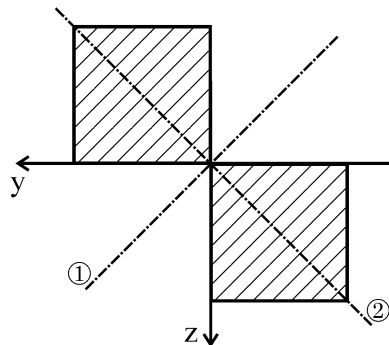


6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty

b)

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$

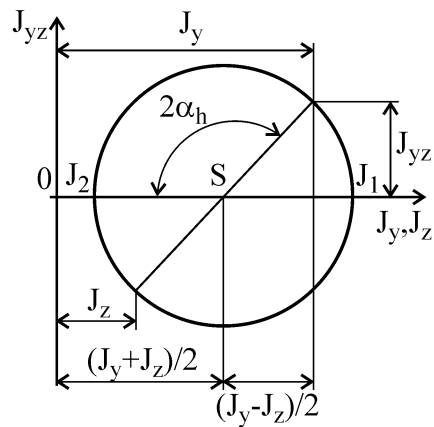
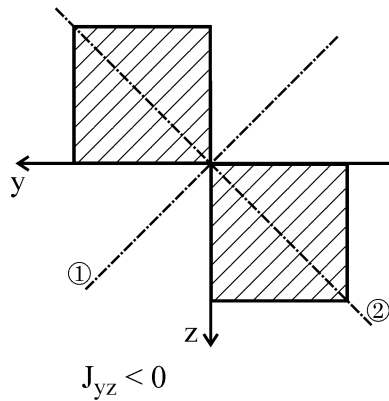


6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty

b)

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$

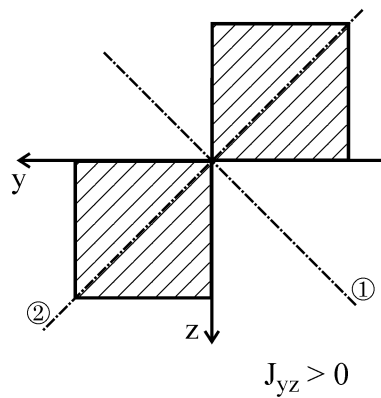
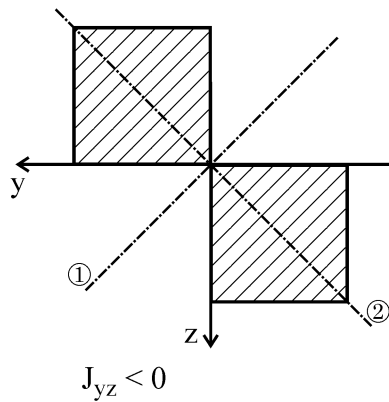
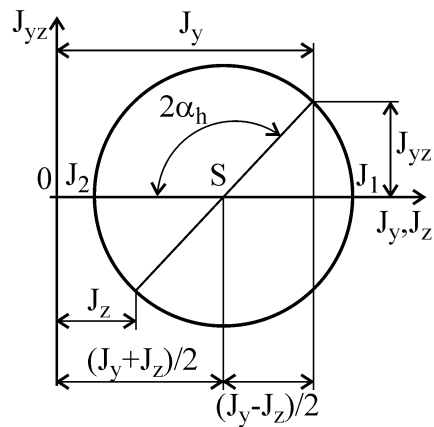


6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty

b)

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$



Příklad 4:

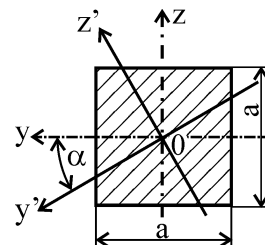
Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru čtverce k osám y' , z' natočeným vzhledem k osám y , z o úhel α .

Řešení:

$$J_y = J_z = \frac{a^4}{12}, \quad J_{yz} = 0$$

$$J_{y'} = J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha = J_y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = J_y$$

$$J_{z'} = J_z \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha = J_z$$



Grafické řešení:

Platí obecně:

Centrální kvadratické momenty průřezů s více osami symetrie jsou si rovny a jsou to přímo hlavní momenty pro jakékoliv natočení tohoto systému. Mohrova kružnice pro tento případ degeneruje v bod.