

5. Obecné vlastnosti pružného materiálu a pružného tělesa

5.1. Závislost mezi deformací, napjatostí a energií

5.2. Lineární a nelineární pružnost

Lineární (nelineární) pružnost vyšetřuje napjatost a deformaci těles pro případ, že závislost mezi zatížením, napětími, deformacemi a posuvy je lineární (nelineární).

*5.2 [PPI, 37, 202, 233]

5.2. Lineární a nelineární pružnost

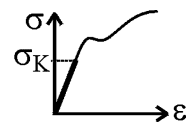
Lineární (nelineární) pružnost vyšetřuje napjatost a deformaci těles pro případ, že závislost mezi zatížením, napětími, deformacemi a posuvy je lineární (nelineární).

Úlohy lineární – jednodušší řešení, **praktická použitelnost** omezená.

*5.2 [PPI, 37, 202, 233]

Nutné podmínky pro lineárnost úlohy:

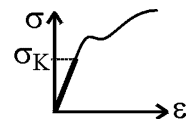
- lineárně pružný materiál, konstitutivní vztahy popisující vazbu mezi napětími a deformacemi jsou popsány Hookeovým zákonem,



Nutné podmínky pro lineárnost úlohy:

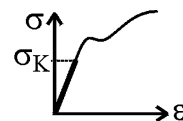
– lineárně pružný materiál, konstitutivní vztahy popisující vazbu mezi napětími a deformacemi jsou popsány Hookeovým zákonem,

– složky T_ε malé, maximálně do 5%,



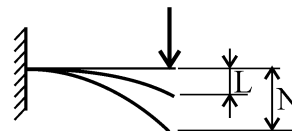
Nutné podmínky pro lineárnost úlohy:

– lineárně pružný materiál, konstitutivní vztahy popisující vazbu mezi napětími a deformacemi jsou popsány Hookeovým zákonem,



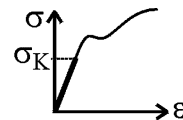
– složky T_ε malé, maximálně do 5%,

– malé deformační posuvy těles, posuvy u, v, w jsou malé z hlediska vlivu na změnu geometrie tělesa a tím na platnost rovnic rovnováhy, které byly sestaveny pro původní, nedeformovanou geometrii



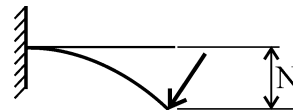
Nutné podmínky pro lineárnost úlohy:

– lineárně pružný materiál, konstitutivní vztahy popisující vazbu mezi napětími a deformacemi jsou popsány Hookeovým zákonem,



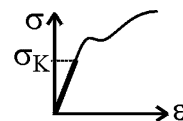
– složky T_ε malé, maximálně do 5%,

– malé deformační posuvy těles, posuvy u, v, w jsou malé z hlediska vlivu na změnu geometrie tělesa a tím na platnost rovnic rovnováhy, které byly sestaveny pro původní, nedeformovanou geometrii



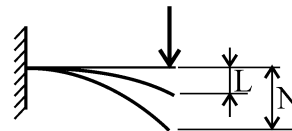
Nutné podmínky pro lineárnost úlohy:

– lineárně pružný materiál, konstitutivní vztahy popisující vazbu mezi napětími a deformacemi jsou popsány Hookeovým zákonem,



– složky T_ε malé, maximálně do 5%,

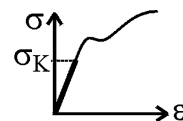
– malé deformační posuvy těles, posuvy u, v, w jsou malé z hlediska vlivu na změnu geometrie tělesa a tím na platnost rovnic rovnováhy, které byly sestaveny pro původní, nedeformovanou geometrii



– lineární okrajové podmínky, nemění se charakter nebo poloha vazeb a zatížení při změně deformace.

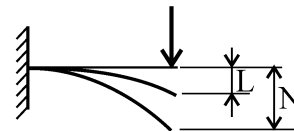
Nutné podmínky pro lineárnost úlohy:

– lineárně pružný materiál, konstitutivní vztahy popisující vazbu mezi napětími a deformacemi jsou popsány Hookeovým zákonem,

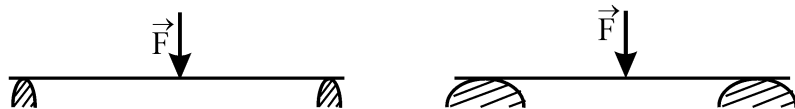


– složky T_ε malé, maximálně do 5%,

– malé deformační posuvy těles, posuvy u, v, w jsou malé z hlediska vlivu na změnu geometrie tělesa a tím na platnost rovnic rovnováhy, které byly sestaveny pro původní, nedeformovanou geometrii

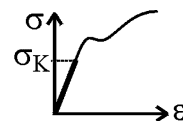


– lineární okrajové podmínky, nemění se charakter nebo poloha vazeb a zatížení při změně deformace.



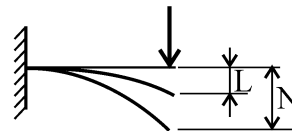
Nutné podmínky pro lineárnost úlohy:

– lineárně pružný materiál, konstitutivní vztahy popisující vazbu mezi napětími a deformacemi jsou popsány Hookeovým zákonem,

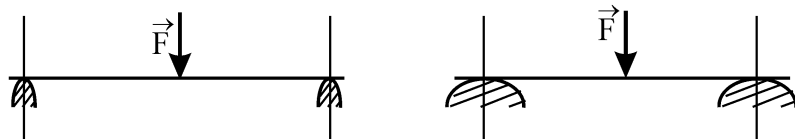


– složky T_ε malé, maximálně do 5%,

– malé deformační posuvy těles, posuvy u, v, w jsou malé z hlediska vlivu na změnu geometrie tělesa a tím na platnost rovnic rovnováhy, které byly sestaveny pro původní, nedeformovanou geometrii

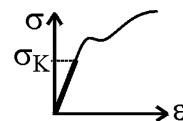


– lineární okrajové podmínky, nemění se charakter nebo poloha vazeb a zatížení při změně deformace.



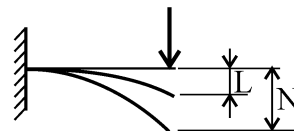
Nutné podmínky pro lineárnost úlohy:

– lineárně pružný materiál, konstitutivní vztahy popisující vazbu mezi napětími a deformacemi jsou popsány Hookeovým zákonem,

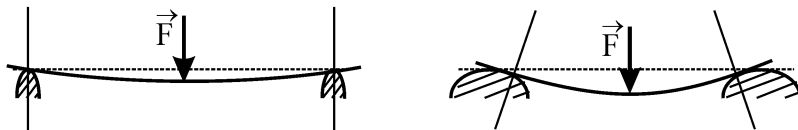


– složky T_ε malé, maximálně do 5%,

– malé deformační posuvy těles, posuvy u, v, w jsou malé z hlediska vlivu na změnu geometrie tělesa a tím na platnost rovnic rovnováhy, které byly sestaveny pro původní, nedeformovanou geometrii

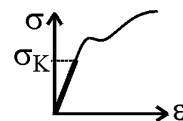


– lineární okrajové podmínky, nemění se charakter nebo poloha vazeb a zatížení při změně deformace (*kontaktní nelinearita*)



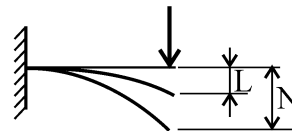
Nutné podmínky pro lineárnost úlohy:

– lineárně pružný materiál, konstitutivní vztahy popisující vazbu mezi napětími a deformacemi jsou popsány Hookeovým zákonem,

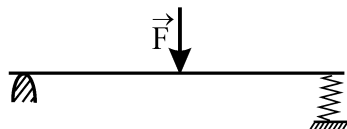


– složky T_ε malé, maximálně do 5%,

– malé deformační posuvy těles, posuvy u, v, w jsou malé z hlediska vlivu na změnu geometrie tělesa a tím na platnost rovnic rovnováhy, které byly sestaveny pro původní, nedeformovanou geometrii

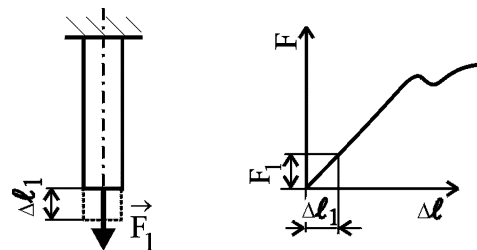


– lineární okrajové podmínky, nemění se charakter nebo poloha vazeb a zatížení při změně deformace (*kontaktní nelinearita*)



5.3. Obecné věty lineární pružnosti

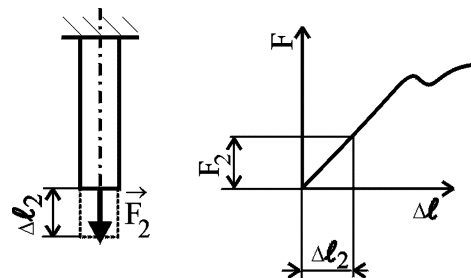
5.3.1. Věta o superpozici napjatosti a deformace



*5.3 [PPI, 38 – 43]

5.3. Obecné věty lineární pružnosti

5.3.1. Věta o superpozici napjatosti a deformace



*5.3 [PPI, 38 – 43]

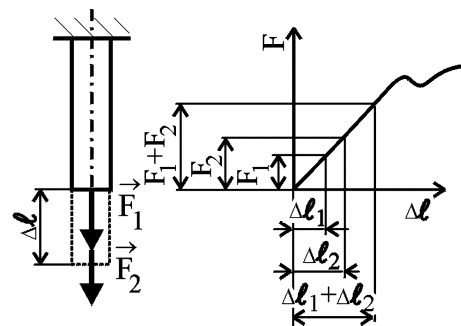
5.3. Obecné věty lineární pružnosti

5.3.1. Věta o superpozici napjatosti a deformace

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

lineární část diagramu (lineární pružnost)

např. pro šedou litinu superpozice neplatí



5.3. Obecné věty lineární pružnosti

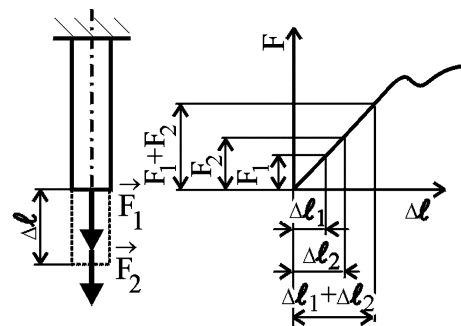
5.3.1. Věta o superpozici napjatosti a deformace

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

lineární část diagramu (lineární pružnost)

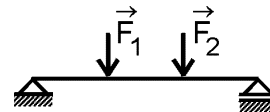
např. pro šedou litinu superpozice neplatí

Napjatost a deformace tělesa zatíženého silovou soustavou je v lineární PP rovna součtu napjatostí a deformací způsobených jednotlivými silami této soustavy.



5.3.2. Věta o vzájemnosti prací (Bettiho věta)

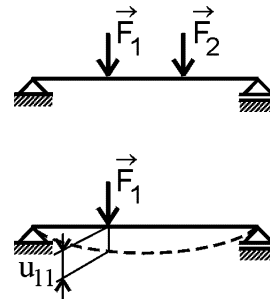
u_{ij} - posuv působíště síly $\vec{F}_i$ po její nositelce způsobený silou $\vec{F}_j$.



5.3.2. Věta o vzájemnosti prací (Bettiho věta)

u_{ij} - posuv působíště síly $\vec{F}_i$ po její nositelce způsobený silou $\vec{F}_j$.

a) $\vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2$

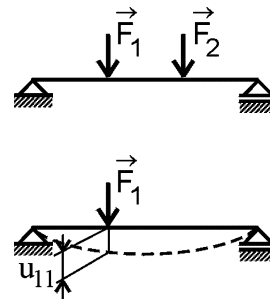


5.3.2. Věta o vzájemnosti prací (Bettiho věta)

u_{ij} - posuv působíště síly $\vec{F}_i$ po její nositelce způsobený silou $\vec{F}_j$.

$$\text{a) } \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2 \\ \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1$$

$$A_{11} = \frac{1}{2} F_1 u_{11}$$



5.3.2. Věta o vzájemnosti prací (Bettiho věta)

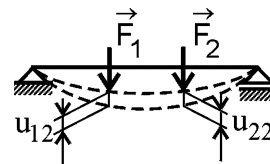
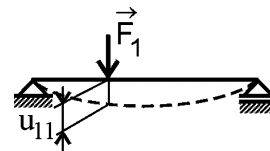
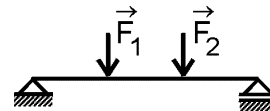
u_{ij} - posuv působíště síly $\vec{F}_i$ po její nositelce způsobený silou $\vec{F}_j$.

$$\text{a) } \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2$$

$$\vec{0} \rightarrow \vec{F}_1$$

$$A_{11} = \frac{1}{2} F_1 u_{11}$$

$$\vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2$$



5.3.2. Věta o vzájemnosti prací (Bettiho věta)

u_{ij} - posuv působíště síly $\vec{F}_i$ po její nositelce způsobený silou $\vec{F}_j$.

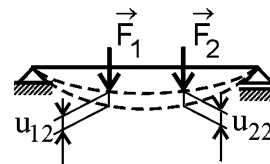
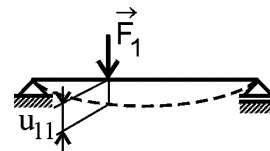
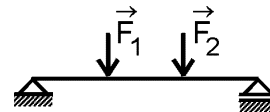
$$\text{a) } \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2$$

$$\vec{0} \rightarrow \vec{F}_1$$

$$A_{11} = \frac{1}{2} F_1 u_{11}$$

$$\vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2$$

$$A_{22} = \frac{1}{2} F_2 u_{22}$$



5.3.2. Věta o vzájemnosti prací (Bettiho věta)

u_{ij} - posuv působíště síly $\vec{F}_i$ po její nositelce způsobený silou $\vec{F}_j$.

$$\text{a) } \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2$$

$$\vec{0} \rightarrow \vec{F}_1$$

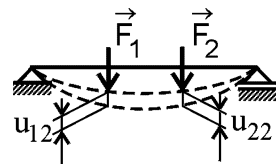
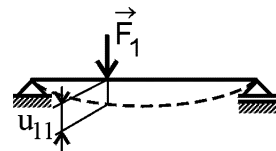
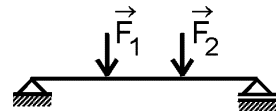
$$A_{11} = \frac{1}{2} F_1 u_{11}$$

$$\vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2$$

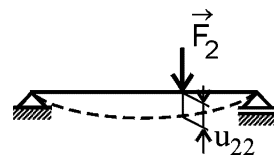
$$A_{22} = \frac{1}{2} F_2 u_{22}$$

$$A_{12} = F_1 u_{12}$$

celková práce $A_1 = A_{11} + A_{22} + A_{12} = \frac{1}{2} F_1 u_{11} + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + F_1 u_{12}.$

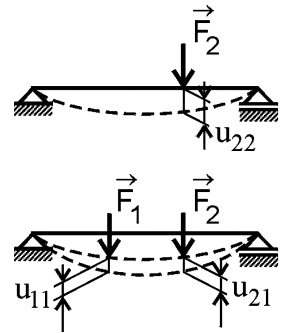


b) Opačný postup: $\vec{0} \rightarrow \vec{F}_2 \rightarrow \vec{F}_2 \cup \vec{F}_1$



b) Opačný postup: $\vec{0} \rightarrow \vec{F}_2 \rightarrow \vec{F}_2 \cup \vec{F}_1$

$$A_2 = A_{22} + A_{11} + A_{21} = \frac{1}{2}F_2 u_{22} + \frac{1}{2}F_1 u_{11} + F_2 u_{21}.$$

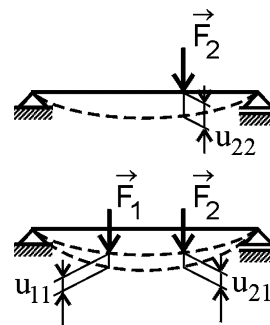


b) Opačný postup: $\vec{0} \rightarrow \vec{F}_2 \rightarrow \vec{F}_2 \cup \vec{F}_1$

$$A_2 = A_{22} + A_{11} + A_{21} = \frac{1}{2}F_2 u_{22} + \frac{1}{2}F_1 u_{11} + F_2 u_{21}.$$

pružný stav $\Rightarrow A_1 = A_2.$

$$\frac{1}{2}F_1 u_{11} + \frac{1}{2}F_2 u_{22} + F_1 u_{12} = \frac{1}{2}F_2 u_{22} + \frac{1}{2}F_1 u_{11} + F_2 u_{21}$$



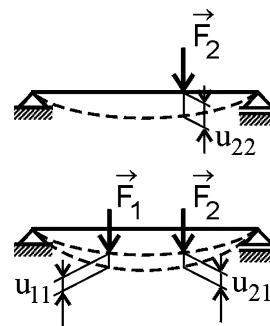
b) Opačný postup: $\vec{0} \rightarrow \vec{F}_2 \rightarrow \vec{F}_2 \cup \vec{F}_1$

$$A_2 = A_{22} + A_{11} + A_{21} = \frac{1}{2}F_2u_{22} + \frac{1}{2}F_1u_{11} + F_2u_{21}.$$

pružný stav $\Rightarrow A_1 = A_2.$

$$\frac{1}{2}F_1u_{11} + \frac{1}{2}F_2u_{22} + F_1u_{12} = \frac{1}{2}F_2u_{22} + \frac{1}{2}F_1u_{11} + F_2u_{21}$$

$$\boxed{F_1u_{12} = F_2u_{21}} .$$



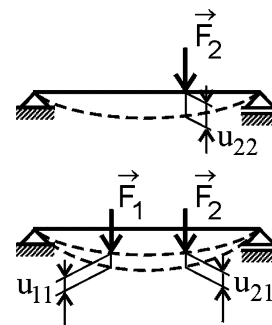
b) Opačný postup: $\vec{0} \rightarrow \vec{F}_2 \rightarrow \vec{F}_2 \cup \vec{F}_1$

$$A_2 = A_{22} + A_{11} + A_{21} = \frac{1}{2}F_2u_{22} + \frac{1}{2}F_1u_{11} + F_2u_{21}.$$

pružný stav $\Rightarrow A_1 = A_2.$

$$\frac{1}{2}F_1u_{11} + \frac{1}{2}F_2u_{22} + F_1u_{12} = \frac{1}{2}F_2u_{22} + \frac{1}{2}F_1u_{11} + F_2u_{21}$$

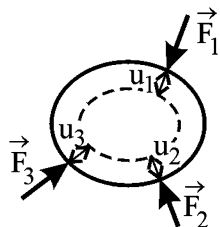
$$\boxed{F_1u_{12} = F_2u_{21}}.$$



Bettiho věta: Při působení silových soustav Π_1 a Π_2 na lineárně pružné těleso platí: Práce soustavy Π_1 na složkách deformace vyvolaných soustavou Π_2 je rovna práci soustavy Π_2 na složkách deformace vyvolaných soustavou Π_1 .

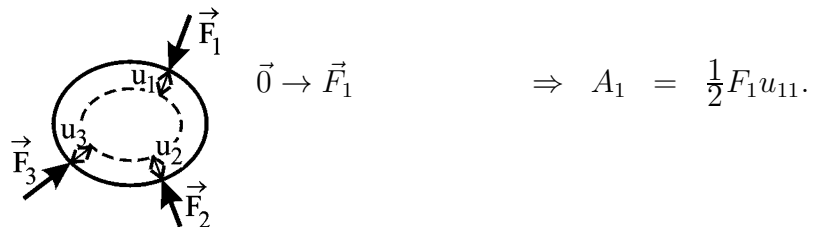
5.3.3. Věty o deformační práci silových soustav

a) Věta o deformační práci soustavy osamělých sil



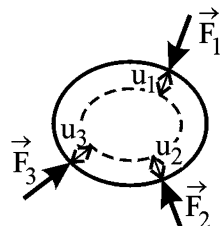
5.3.3. Věty o deformační práci silových soustav

a) Věta o deformační práci soustavy osamělých sil



5.3.3. Věty o deformační práci silových soustav

a) Věta o deformační práci soustavy osamělých sil

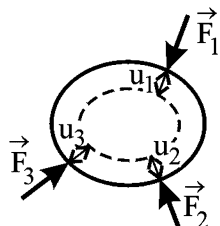


$$\vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{1}{2} F_1 u_{11}.$$

$$\begin{aligned} \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2 &\Rightarrow A_2 = A_1 + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + F_1 u_{12} = \\ &= \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + \frac{1}{2} F_1 u_{12}. \end{aligned}$$

5.3.3. Věty o deformační práci silových soustav

a) Věta o deformační práci soustavy osamělých sil



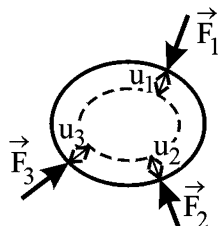
$$\vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{1}{2} F_1 u_{11}.$$

$$\begin{aligned} \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2 &\Rightarrow A_2 = A_1 + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + F_1 u_{12} = \\ &= \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + \frac{1}{2} F_1 u_{12}. \end{aligned}$$

$$F_1 u_{12} = F_2 u_{21} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 (u_{21} + u_{22})$$

5.3.3. Věty o deformační práci silových soustav

a) Věta o deformační práci soustavy osamělých sil



$$\vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{1}{2} F_1 u_{11}.$$

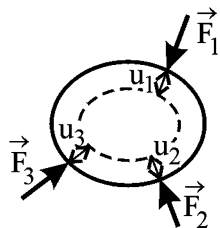
$$\begin{aligned} \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2 &\Rightarrow A_2 = A_1 + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + F_1 u_{12} = \\ &= \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + \frac{1}{2} F_1 u_{12}. \end{aligned}$$

$$F_1 u_{12} = F_2 u_{21} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 (u_{21} + u_{22})$$

$$A = \frac{1}{2} F_1 u_1 + \frac{1}{2} F_2 u_2 + \cdots + \frac{1}{2} F_n u_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i.$$

5.3.3. Věty o deformační práci silových soustav

a) Věta o deformační práci soustavy osamělých sil



$$\vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} F_1 u_{11}.$$

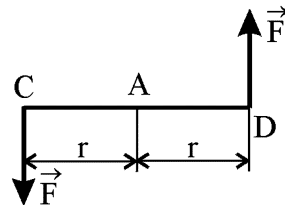
$$\begin{aligned} \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2 &\Rightarrow A_2 = A_1 + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + F_1 u_{12} = \\ &= \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + \frac{1}{2} F_1 u_{12}. \end{aligned}$$

$$F_1 u_{12} = F_2 u_{21} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 (u_{21} + u_{22})$$

$$A = \frac{1}{2} F_1 u_1 + \frac{1}{2} F_2 u_2 + \cdots + \frac{1}{2} F_n u_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i.$$

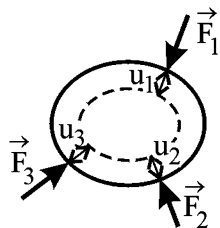
b) Deformační práce při působení silové dvojice

$$\mathcal{M} = 2rF$$



5.3.3. Věty o deformační práci silových soustav

a) Věta o deformační práci soustavy osamělých sil



$$\vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} F_1 u_{11}.$$

$$\begin{aligned} \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2 &\Rightarrow A_2 = A_1 + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + F_1 u_{12} = \\ &= \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + \frac{1}{2} F_1 u_{12}. \end{aligned}$$

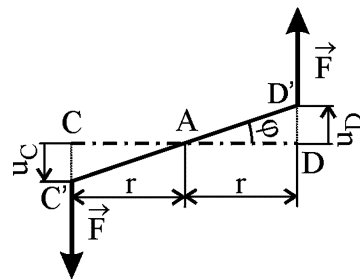
$$F_1 u_{12} = F_2 u_{21} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 (u_{21} + u_{22})$$

$$A = \frac{1}{2} F_1 u_1 + \frac{1}{2} F_2 u_2 + \dots + \frac{1}{2} F_n u_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i.$$

b) Deformační práce při působení silové dvojice

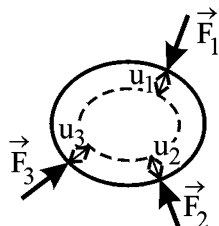
$$\mathcal{M} = 2rF$$

$$u = r \operatorname{tg} \varphi = r \varphi$$



5.3.3. Věty o deformační práci silových soustav

a) Věta o deformační práci soustavy osamělých sil



$$\begin{aligned}\vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 &\Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} F_1 u_{11}. \\ \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2 &\Rightarrow A_2 = A_1 + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + F_1 u_{12} = \\ &= \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + \frac{1}{2} F_1 u_{12}.\end{aligned}$$

$$F_1 u_{12} = F_2 u_{21} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 (u_{21} + u_{22})$$

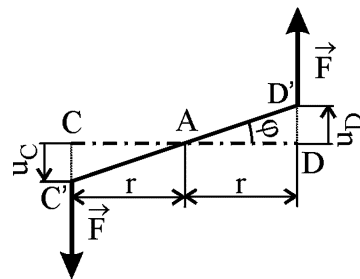
$$A = \frac{1}{2} F_1 u_1 + \frac{1}{2} F_2 u_2 + \dots + \frac{1}{2} F_n u_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i.$$

b) Deformační práce při působení silové dvojice

$$\mathcal{M} = 2rF$$

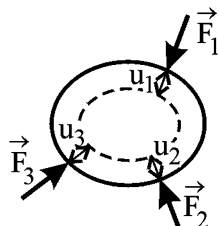
$$u = r \operatorname{tg} \varphi = r \varphi$$

$$A = \frac{1}{2} F_1 u_1 + \frac{1}{2} F_2 u_2 =$$



5.3.3. Věty o deformační práci silových soustav

a) Věta o deformační práci soustavy osamělých sil



$$\begin{aligned}\vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 &\Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}F_1u_{11}. \\ \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2 &\Rightarrow A_2 = A_1 + \frac{1}{2}F_2u_{22} + F_1u_{12} = \\ &= \frac{1}{2}F_1(u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2}F_2u_{22} + \frac{1}{2}F_1u_{12}.\end{aligned}$$

$$F_1u_{12} = F_2u_{21} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}F_1(u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2}F_2(u_{21} + u_{22})$$

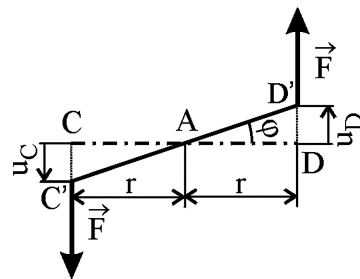
$$A = \frac{1}{2}F_1u_1 + \frac{1}{2}F_2u_2 + \cdots + \frac{1}{2}F_nu_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n F_iu_i.$$

b) Deformační práce při působení silové dvojice

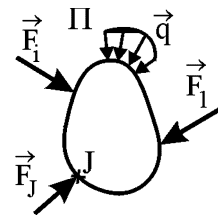
$$\mathcal{M} = 2rF$$

$$u = r \operatorname{tg} \varphi = r\varphi$$

$$A = \frac{1}{2}F_1u_1 + \frac{1}{2}F_2u_2 = \frac{1}{2}Fr\varphi - \frac{1}{2}F(-r\varphi) = \frac{1}{2}F2r\varphi = \frac{1}{2}\mathcal{M}\varphi$$

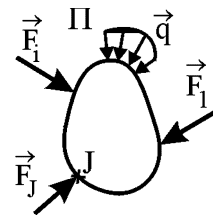


c) Věta Castiglianova



c) Věta Castiglianova

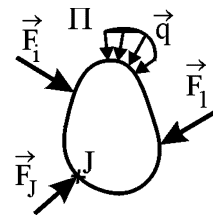
$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$



c) Věta Castiglianova

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i u_i$$

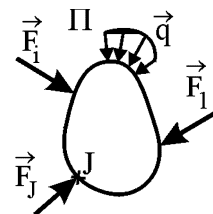


c) Věta Castiglianova

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i u_i$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \frac{\partial A_1}{\partial F_J} + \frac{\partial A_2}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_J}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial F_J}$$



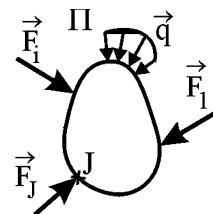
c) Věta Castiglianova

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i u_i$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \frac{\partial A_1}{\partial F_J} + \frac{\partial A_2}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_J}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial F_J}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_i}{\partial F_J} u_i$$



c) Věta Castiglianova

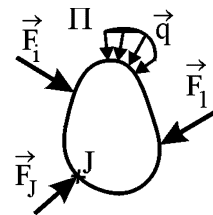
$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i u_i$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \frac{\partial A_1}{\partial F_J} + \frac{\partial A_2}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_J}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial F_J}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_i}{\partial F_J} u_i$$

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}$$



c) Věta Castiglianova

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

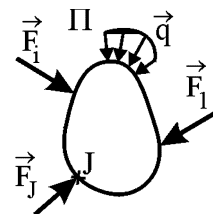
$$\Delta W = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i u_i$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \frac{\partial A_1}{\partial F_J} + \frac{\partial A_2}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_J}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial F_J}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_i}{\partial F_J} u_i$$

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}$$

$\frac{\partial F_i}{\partial F_J}$ je jen 1 nebo 0



c) Věta Castiglianova

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i u_i$$

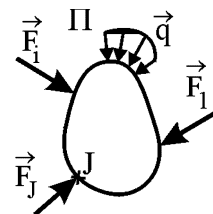
$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \frac{\partial A_1}{\partial F_J} + \frac{\partial A_2}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_J}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial F_J}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_i}{\partial F_J} u_i$$

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}$$

$\frac{\partial F_i}{\partial F_J}$ je jen 1 nebo 0

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial F_J} =$$



c) Věta Castiglianova

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i u_i$$

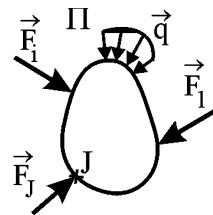
$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \frac{\partial A_1}{\partial F_J} + \frac{\partial A_2}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_J}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial F_J}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_i}{\partial F_J} u_i$$

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}$$

$\frac{\partial F_i}{\partial F_J}$ je jen 1 nebo 0

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} u_J$$



c) Věta Castiglianova

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i u_i$$

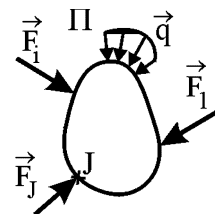
$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \frac{\partial A_1}{\partial F_J} + \frac{\partial A_2}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_J}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial F_J}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_i}{\partial F_J} u_i$$

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}$$

$\frac{\partial F_i}{\partial F_J}$ je jen 1 nebo 0

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} u_J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} u_J.$$



c) Věta Castiglianova

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i u_i$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \frac{\partial A_1}{\partial F_J} + \frac{\partial A_2}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_J}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial F_J}$$

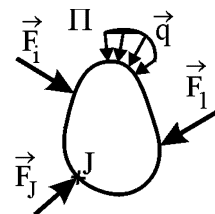
$$\frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_i}{\partial F_J} u_i$$

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}$$

$\frac{\partial F_i}{\partial F_J}$ je jen 1 nebo 0

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} u_J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} u_J.$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial F_J} + \frac{1}{2} u_J$$



c) Věta Castiglianova

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i u_i$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \frac{\partial A_1}{\partial F_J} + \frac{\partial A_2}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_J}{\partial F_J} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial F_J}$$

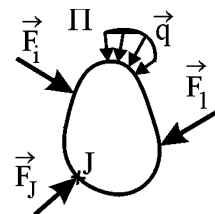
$$\frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_i}{\partial F_J} u_i$$

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}$$

$\frac{\partial F_i}{\partial F_J}$ je jen 1 nebo 0

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial F_J} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} u_J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial F_J} + \frac{1}{2} u_J.$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_J} = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial F_J} + \frac{1}{2} u_J \quad \implies \quad \frac{\partial W}{\partial F_J} = u_J.$$



Působí-li na lineárně pružné těleso (soustavu) silová soustava, pak posuv u_J působišťe síly $\vec{F}_J$ po její nositelce je dán parciální derivací celkové energie napjatosti tělesa (soustavy) podle této síly $u_J = \frac{\partial W}{\partial F_J}$.

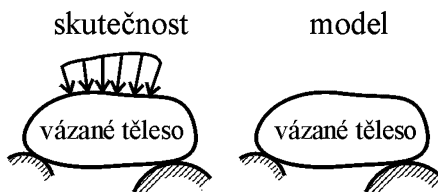
Úhel natočení φ_J přímky spojené s působišťem silové dvojice $\vec{\mathcal{M}}_J$ v rovině jejího působení je dán parciální derivací celkové energie napjatosti tělesa (soustavy) podle této dvojice $\varphi_J = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{M}_J}$.

5.4. Saint Venantův princip

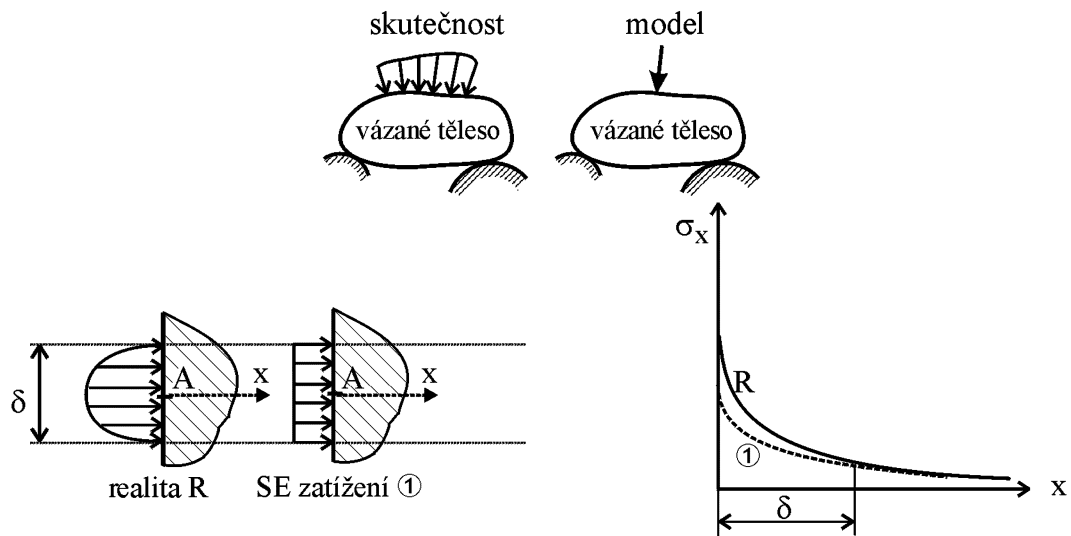
skutečnost



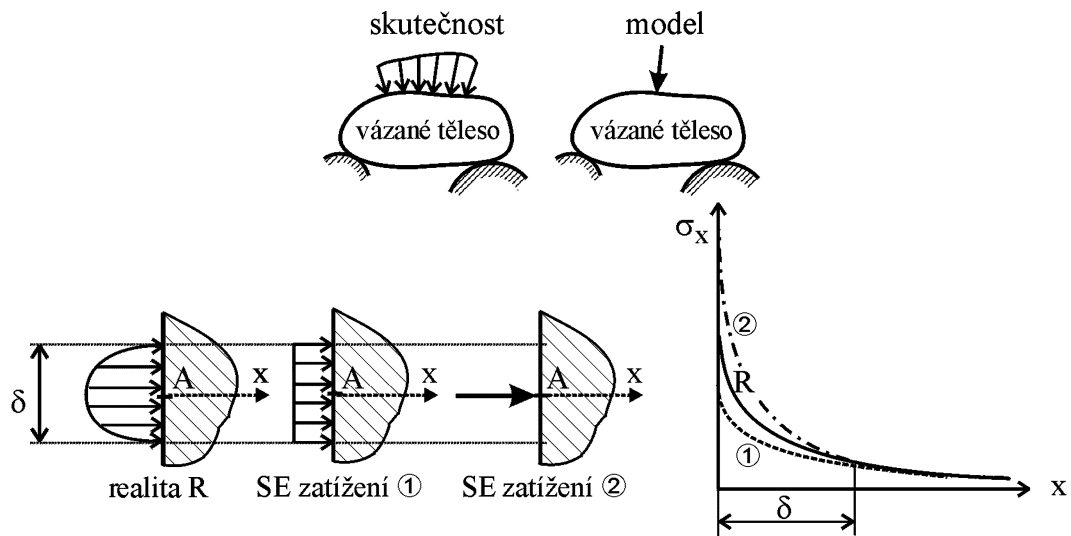
5.4. Saint Venantův princip



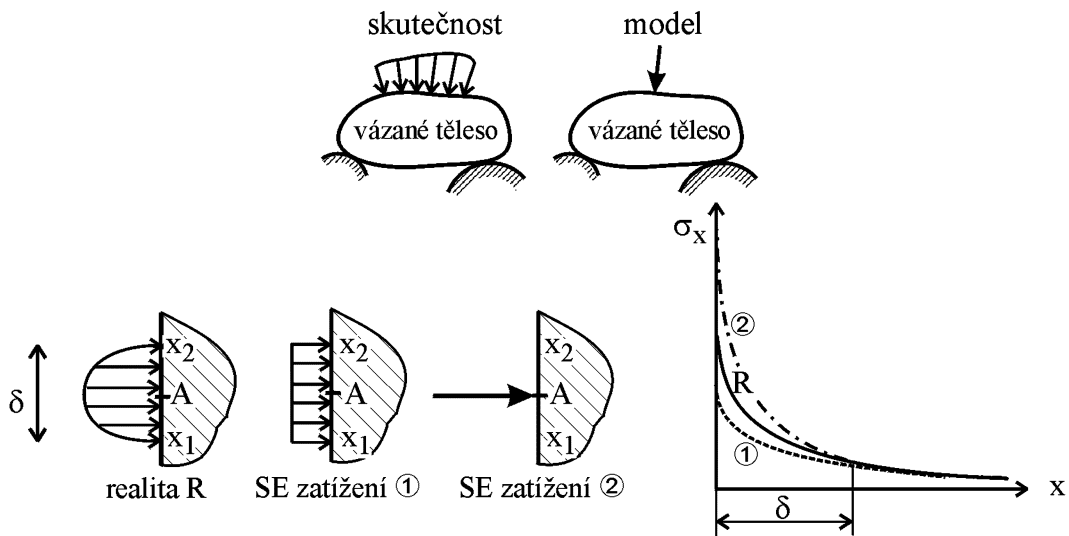
5.4. Saint Venantův princip



5.4. Saint Venantův princip



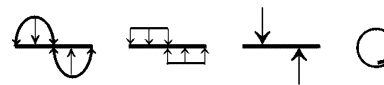
5.4. Saint Venantův princip



Nahradíme-li v určité oblasti tělesa jednu silovou soustavu jinou, staticky ekvivalentní soustavou, pak napjatost tělesa je pro obě zatížení prakticky stejná s výjimkou blízkého okolí oblasti náhrady, jehož rozměry δ jsou srovnatelné s rozměry této oblasti.

Význam Saint Venantova principu:

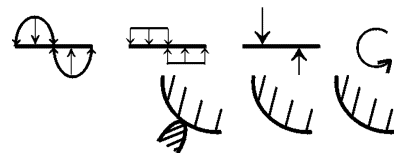
a) výpočtové modely silového působení



Význam Saint Venantova principu:

a) výpočtové modely silového působení

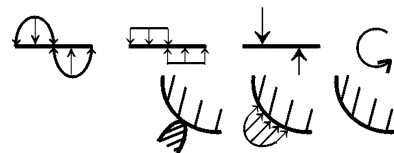
b) výpočtové modely styku těles



Význam Saint Venantova principu:

a) výpočtové modely silového působení

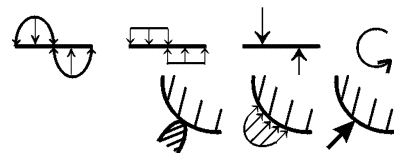
b) výpočtové modely styku těles



Význam Saint Venantova principu:

a) výpočtové modely silového působení

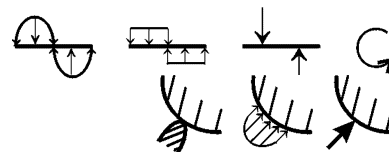
b) výpočtové modely styku těles



Význam Saint Venantova principu:

a) výpočtové modely silového působení

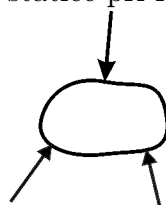
b) výpočtové modely styku těles



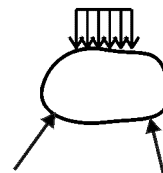
c) nepoužívat zjednodušení běžná ve staticce při řešení napjatosti a deformace



skutečné
vázané těleso



model pro řešení
statické rovnováhy



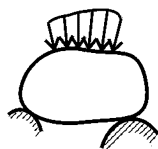
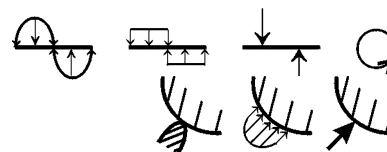
model pro řešení
napjatosti a deformace

Význam Saint Venantova principu:

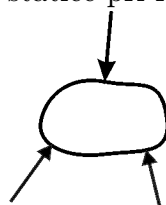
a) výpočtové modely silového působení

b) výpočtové modely styku těles

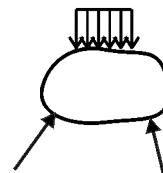
c) nepoužívat zjednodušení běžná ve staticce při řešení napjatosti a deformace



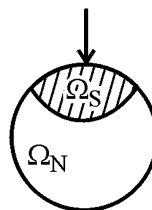
skutečné
vázané těleso



model pro řešení
statické rovnováhy



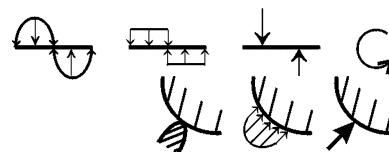
model pro řešení
napjatosti a deformace



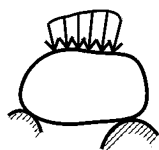
Význam Saint Venantova principu:

a) výpočtové modely silového působení

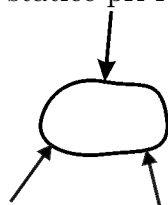
b) výpočtové modely styku těles



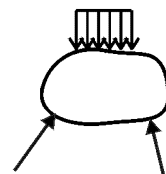
c) nepoužívat zjednodušení běžná ve staticce při řešení napjatosti a deformace



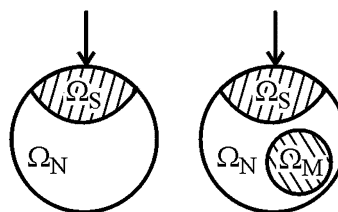
skutečné
vázané těleso



model pro řešení
statické rovnováhy



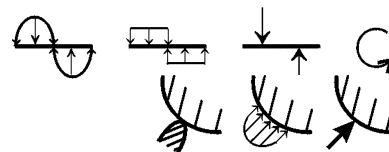
model pro řešení
napjatosti a deformace



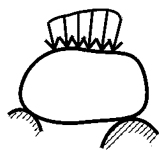
Význam Saint Venantova principu:

a) výpočtové modely silového působení

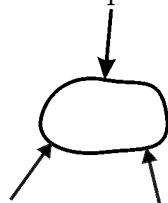
b) výpočtové modely styku těles



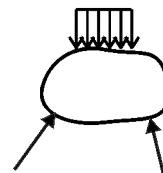
c) nepoužívat zjednodušení běžná ve staticce při řešení napjatosti a deformace



skutečné
vázané těleso



model pro řešení
statické rovnováhy



model pro řešení
napjatosti a deformace

provozní schopnost tělesa určena mezními stavy
v $\Omega_M \Rightarrow \Omega_M$ nesmí neobsahovat žádný bod Ω_S
(oblast ovlivněná náhradou silového působení na
ploše Γ_S)

