

6. Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v PP je nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa, které splňuje jisté geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady (prutové předpoklady).

6. Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v PP je nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa, které splňuje jisté geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady (**prutové předpoklady**).

Vždy budou existovat **odchyly** reálného tělesa od teoretického modelu - vliv na přesnost řešení napjatosti a deformace.

6. Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v PP je nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa, které splňuje jisté geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady (**prutové předpoklady**).

Vždy budou existovat **odchyly** reálného tělesa od teoretického modelu - vliv na přesnost řešení napjatosti a deformace.

Je nutno se zabývat vlivem odchylek a formulovat podmínky použitelnosti výpočtového modelu.

6. Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v PP je nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa, které splňuje jisté geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady (**prutové předpoklady**).

Vždy budou existovat **odchylky** reálného tělesa od teoretického modelu - vliv na přesnost řešení napjatosti a deformace.

Je nutno se zabývat vlivem odchylek a formulovat podmínky použitelnosti výpočtového modelu.

Odchylky

- **podstatné** - prut **není** použitelným výpočtovým modelem,

6. Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v PP je nejjednodušším teoretickým modelem reálného tělesa, které splňuje jisté geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady (**prutové předpoklady**).

Vždy budou existovat **odchylky** reálného tělesa od teoretického modelu - vliv na přesnost řešení napjatosti a deformace.

Je nutno se zabývat vlivem odchylek a formulovat podmínky použitelnosti výpočtového modelu.

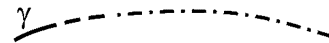
Odchylky

- **podstatné** - prut **není** použitelným výpočtovým modelem,
- **nepodstatné** - prut **je** použitelným výpočtovým modelem.

6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

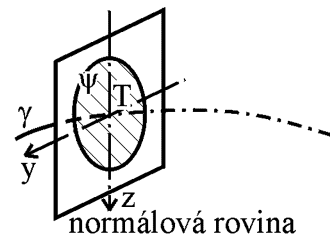
- střednice γ ,



6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

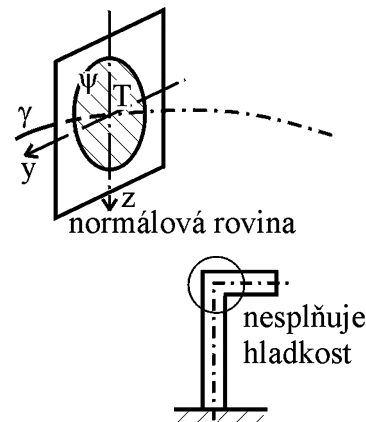
- střednice γ ,
v každém bodě γ příčný průřez ψ .



6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

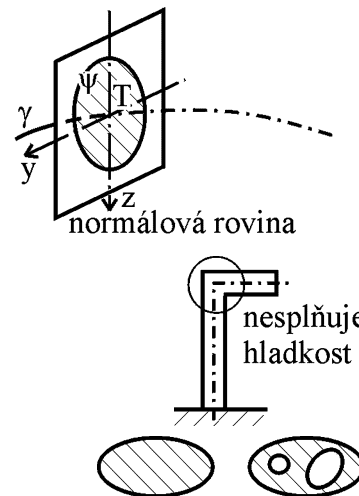
- střednice γ ,
v každém bodě γ příčný průřez ψ
- γ – spojitá a hladká křivka konečné délky



6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

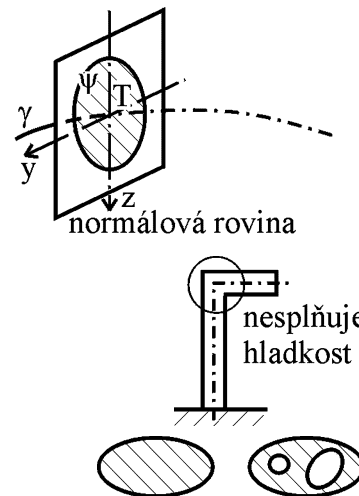
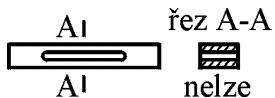
- střednice γ ,
v každém bodě γ příčný průřez ψ
- γ – spojitá a hladká křivka konečné délky
- ψ – jednoduše nebo vícenásobně souvislá oblast (obrys, charakteristiky ψ)



6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

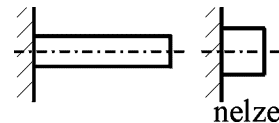
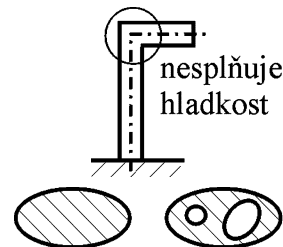
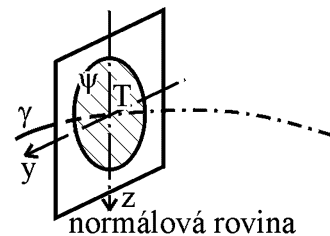
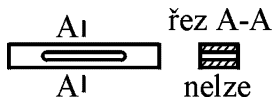
- střednice γ ,
v každém bodě γ příčný průřez ψ
- γ – spojitá a hladká křivka konečné délky
- ψ – jednoduše nebo vícenásobně souvislá oblast (obrys, charakteristiky ψ)



6.1. Prutové předpoklady

a) předpoklady geometrické

- střednice γ ,
v každém bodě γ příčný průřez ψ
- γ – spojitá a hladká křivka konečné délky
- ψ – jednoduše nebo vícenásobně souvislá oblast
(obrys, charakteristiky ψ)
- délka střednice $\gg$ než největší rozměr ψ



b) předpoklady vazbové a zatěžovací

b) předpoklady vazbové a zatěžovací

- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení γ

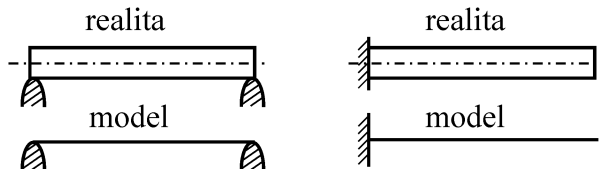
b) předpoklady vazbové a zatěžovací

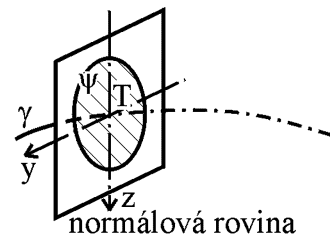
- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení γ



b) předpoklady vazbové a zatěžovací

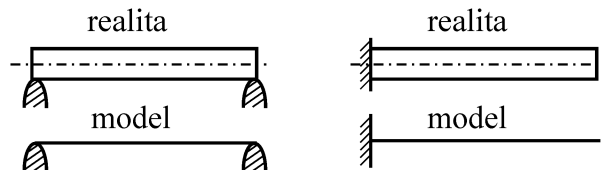
- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení γ



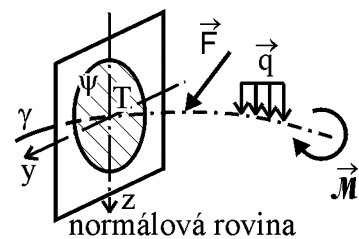


b) předpoklady vazbové a zatěžovací

- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení γ

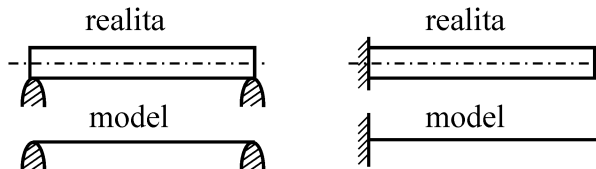


- zatížení soustředěno na γ

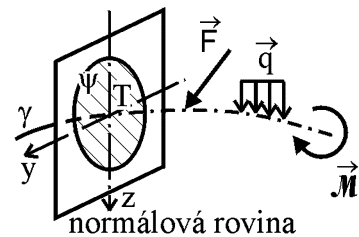
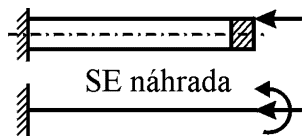


b) předpoklady vazbové a zatěžovací

- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení γ



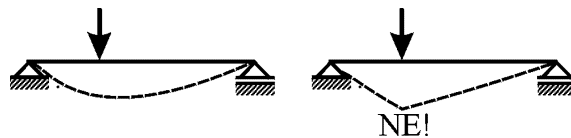
- zatížení soustředěno na γ



c) předpoklady deformační

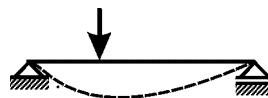
c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

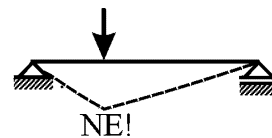


c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

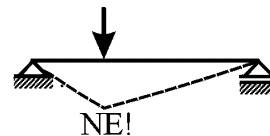
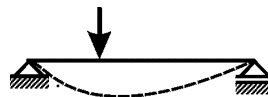


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici



c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

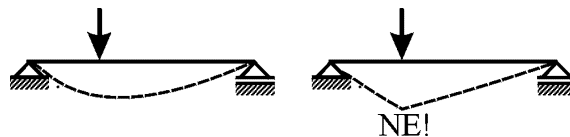


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně
 - oddalují (tah),
 - přibližují (tlak),



c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

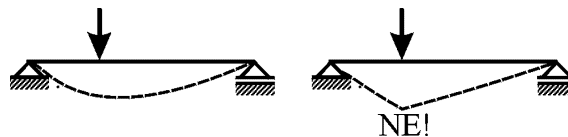


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně
 - oddalují (tah),
 - přibližují (tlak),



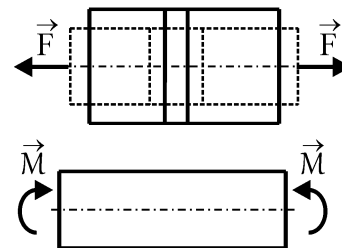
c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká



- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně

- oddalují (tah),
přibližují (tlak),



- natáčí kolem osy v ψ (ohyb),

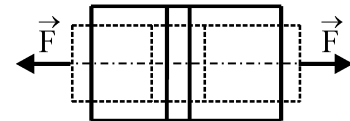
c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

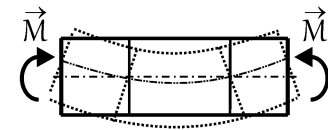


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně

- oddalují (tah),
 - přibližují (tlak),

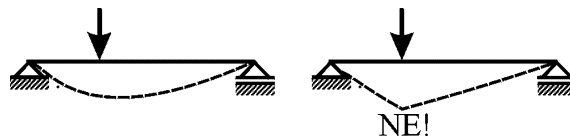


- natáčíjí kolem osy v ψ (ohyb),



c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

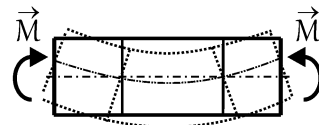


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně

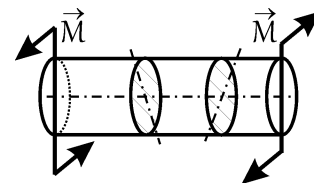
- oddalují (tah),
přibližují (tlak),



- natáčejí kolem osy ψ (ohyb),

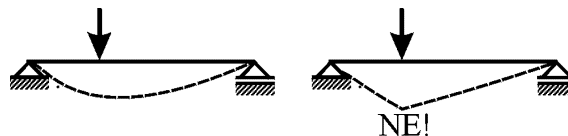


- natáčejí kolem osy $\perp$ k ψ (krut),



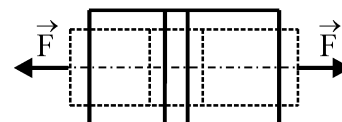
c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

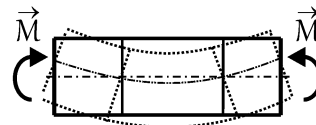


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně

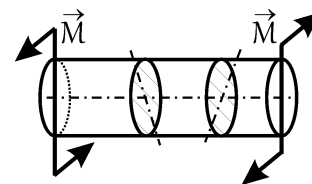
- oddalují (tah),
přibližují (tlak),



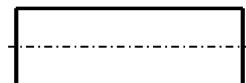
- natáčí kolem osy v ψ (ohyb),



- natáčí kolem osy $\perp$ k ψ (krut),



- posouvají $\perp$ ke γ (smyk).



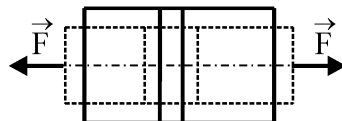
c) předpoklady deformační

- střednice zůstává spojitá a hladká

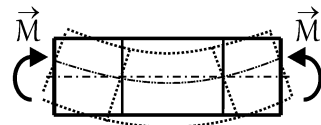


- průřezy zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici pouze se vzájemně

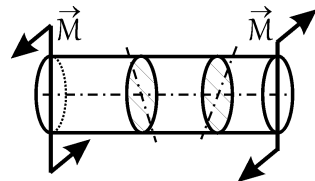
- oddalují (tah),
přibližují (tlak),



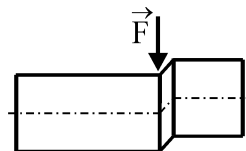
- natáčí kolem osy v ψ (ohyb),



- natáčí kolem osy $\perp$ k ψ (krut),



- posouvají $\perp$ ke γ (smyk).



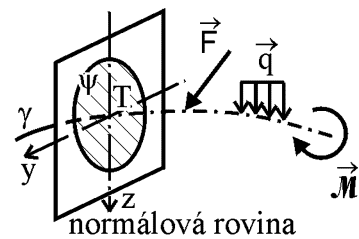
d) předpoklady napjatostní

■

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

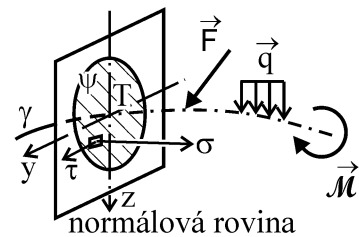
d) předpoklady napjatostní

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



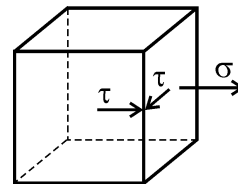
d) předpoklady napjatostní

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



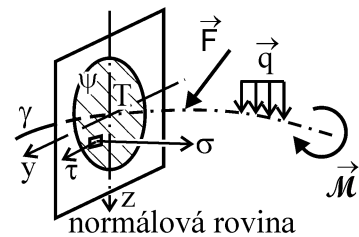
prutová napjatost

napjatost v prutu je určena normálovou a smykovou složkou obecného napětí v příčném průřezu



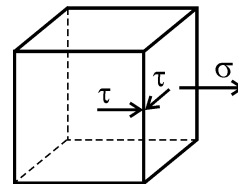
d) předpoklady napjatostní

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



prutová napjatost

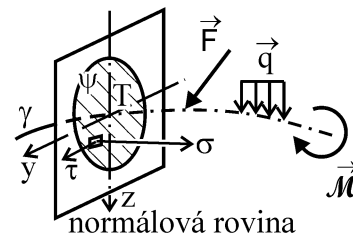
napjatost v prutu je určena normálovou a smykovou složkou obecného napětí v příčném průřezu



$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

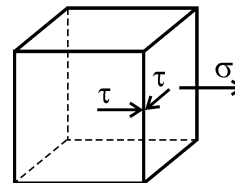
d) předpoklady napjatostní

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



prutová napjatost

napjatost v prutu je určena normálovou a smykovou složkou obecného napětí v příčném průřezu



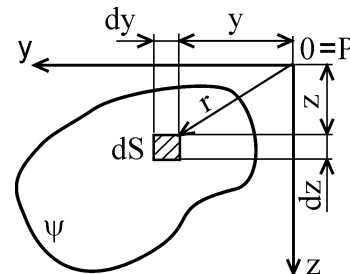
$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.2. Geometrické charakteristiky příčného průřezu

Jsou to veličiny, které charakterizují příčný průřez, a obsahují je vztahy, které si dále odvodíme pro výpočet napětí a deformace pro jednotlivé způsoby namáhání.

6.2.1. Plocha příčného průřezu

$$S = \iint_{\psi} dS = \iint_{\psi} dydz, \quad m^2$$



6.2.2. Lineární (statické) momenty

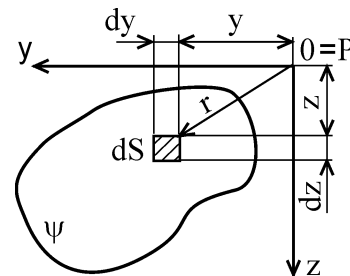
$$U_y = \iint_{\psi} z dS, \quad U_z = \iint_{\psi} y dS, \quad m^3$$

S lineárními momenty jste se setkali už ve statice.

Jak se určí těžiště?

$$\vec{r}_T = \frac{\iint_{\Omega} \vec{r} dF_G}{\iint_{\Omega} dF_G} \quad \text{a pro} \quad \rho = \text{konst.}, t = \text{konst.} \quad \vec{r}_T = \frac{\iint \vec{r} dS}{S}$$

$$y_T = \frac{\iint \psi y dS}{S} = \frac{U_z}{S} \quad z_T = \frac{\iint \psi z dS}{S} = \frac{U_y}{S}$$



6.2.3. Kvadratické momenty

- Osové kvadratické momenty

$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS, \quad J_z = \iint_{\psi} y^2 dS, \quad m^4$$

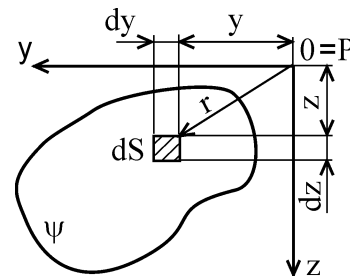
- Deviační kvadratický moment

$$J_{yz} = \iint_{\psi} yz dS, \quad m^4$$

- Polární kvadratický moment

$$J_P = \iint_{\psi} r^2 dS, \quad m^4$$

$$r^2 = y^2 + z^2 \quad J_P = \iint_{\psi} r^2 dS = \iint_{\psi} (y^2 + z^2) dS = \iint_{\psi} y^2 dS + \iint_{\psi} z^2 dS = J_z + J_y$$



6.2.4. Základní vlastnosti kvadratických momentů průřezu

Vyplývají z vlastností integrálů.

1. Aditivnost : Kvadratické momenty celého průřezu ψ k daným osám jsou rovny součtu kvadratických momentů částí průřezu ψ_i k těmže osám.
2. Hodnoty osových a polárních kvadratických momentů jsou kladné. Hodnota deviačního momentu může být jakékoliv reálné číslo.
3. Osové momenty symetrických průřezů k ose symetrie i k ose k ní kolmé jsou stejné. Deviační momenty k těmto osám jsou rovněž stejné, ale opačných znamének.

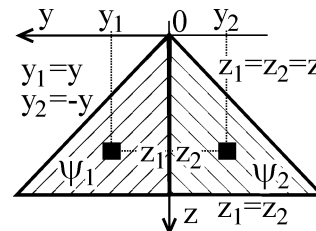
Důkaz: $\psi_1 = \psi_2$, $J_z^1 = \iint_{\psi_1} y_1^2 dS = \iint_{\psi_2} y_2^2 dS = J_z^2$

$$J_y^1 = \iint_{\psi_1} z^2 dS = \iint_{\psi_2} z^2 dS = J_y^2,$$

$$J_{yz}^1 = \iint_{\psi_1} yz dS = - \iint_{\psi_2} (-y)z dS = -J_{yz}^2, \quad J_{yz}^{1+2} = J_{yz}^1 + J_{yz}^2 = 0.$$

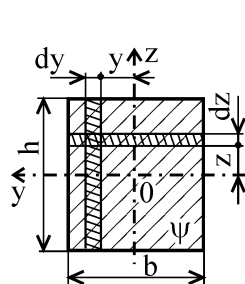
Odtud plyne: Deviační moment symetrického průřezu k pravoúhlému souřadnicovému systému, kde alespoň jedna z os je osou symetrie, je roven nule.

4. Lineární moment k ose procházející těžištěm průřezu (centrální osa) je roven nule.



6.2.5. Kvadratické momenty základních tvarů průřezů

a) Obdélník

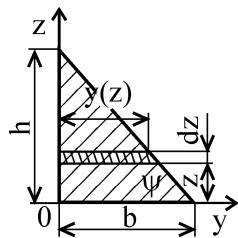


$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 b dz = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_z = \iint_{\psi} y^2 dS = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 h dy = \frac{hb^3}{12}$$

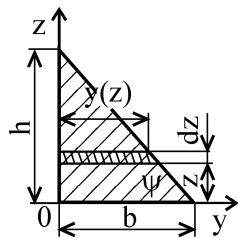
$$J_{yz} = \iint_{\psi} yz dS = 0$$

b) Trojúhelník



$$\frac{y(z)}{b} = \frac{h-z}{h} \rightarrow y(z) = b - \frac{b}{h}z$$

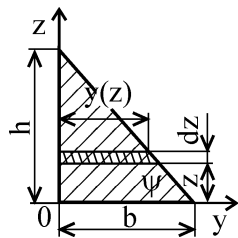
b) Trojúhelník



$$\frac{y(z)}{b} = \frac{h-z}{h} \rightarrow y(z) = b - \frac{b}{h}z$$

$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS = \int_0^h z^2 \left(b - \frac{b}{h}z\right) dz = \frac{bh^3}{12}$$

b) Trojúhelník



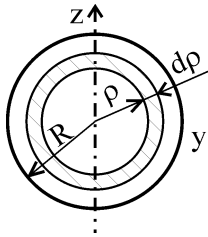
$$\frac{y(z)}{b} = \frac{h-z}{h} \rightarrow y(z) = b - \frac{b}{h}z$$

$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS = \int_0^h z^2 \left(b - \frac{b}{h}z\right) dz = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_z = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_{yz} = \iint_{\psi} yz dS = \int_0^h \int_0^{y(z)} yz dy dz = \frac{b^2 h^2}{24}$$

c) Kruh



$$J_y = J_z \quad J_y + J_z = J_P \Rightarrow J_y = \frac{1}{2} J_P$$

$$dS = 2\pi\rho \cdot d\rho \quad J_P = \iint_{\psi} \rho^2 dS = \int_0^R \rho^2 2\pi\rho \cdot d\rho = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$J_y = J_z = \frac{J_P}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \quad J_{yz} = 0$$

6.2.6. Kvadratické momenty průřezu při transformaci souřadnic

Určíme kvadratické momenty k osám, ke kterým je výpočet nejsnadnější (nebo je známe), a pak je přepočteme k požadovaným osám.

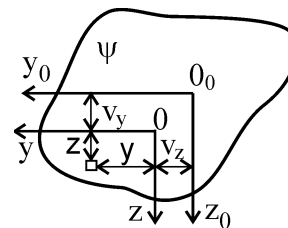
*6.2 [PPI, 67 – 74]

a) **Transformace posunutím**

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_0 a z_0 a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .

$$y = y_0 - v_z$$

$$z = z_0 - v_y$$

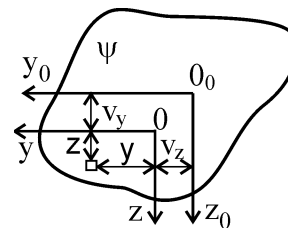


a) Transformace posunutím

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_0 a z_0 a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .

$$y = y_0 - v_z$$

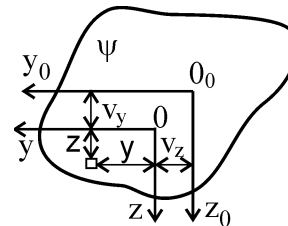
$$z = z_0 - v_y$$



$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS = \iint_{\psi} (z_0 - v_y)^2 dS = \iint_{\psi} z_0^2 dS - 2v_y \iint_{\psi} z_0 dS + v_y^2 \iint_{\psi} dS = J_{y_0} - 2v_y U_{y_0} + v_y^2 S$$

a) Transformace posunutím

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_0 a z_0 a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .



$$y = y_0 - v_z$$

$$z = z_0 - v_y$$

$$J_y = \iint_{\psi} z^2 dS = \iint_{\psi} (z_0 - v_y)^2 dS = \iint_{\psi} z_0^2 dS - 2v_y \iint_{\psi} z_0 dS + v_y^2 \iint_{\psi} dS = J_{y_0} - 2v_y U_{y_0} + v_y^2 S$$

$$J_z = \iint_{\psi} y^2 dS = J_{z_0} - 2v_z U_{z_0} + v_z^2 S$$

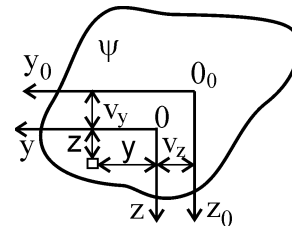
$$J_{yz} = \iint_{\psi} yz dS = \iint_{\psi} (y_0 - v_z)(z_0 - v_y) dS = J_{y_0 z_0} - v_z U_{y_0} - v_y U_{z_0} + v_y v_z S$$

a) Transformace posunutím

Zvolíme osy y_0, z_0 tak, že mají počátek v těžišti příčného průřezu - osy centrální y_T, z_T .
Lineární momenty k centrálním osám jsou rovny 0 $\rightarrow$

Steinerova věta

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_T a z_T procházejícím těžištěm a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .



$$J_y = J_{y_0} - 2v_y U_{y_0} + v_y^2 S$$

$$J_z = J_{z_0} - 2v_z U_{z_0} + v_z^2 S$$

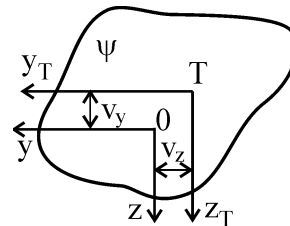
$$J_{yz} = J_{y_0 z_0} - v_z U_{y_0} - v_y U_{z_0} + v_y v_z S$$

a) Transformace posunutím

Zvolíme osy y_0, z_0 tak, že mají počátek v těžišti příčného průřezu - osy centrální y_T, z_T .
Lineární momenty k centrálním osám jsou rovny 0 $\rightarrow$

Steinerova věta

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_T a z_T procházejícím těžištěm a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .



$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S$$

$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S$$

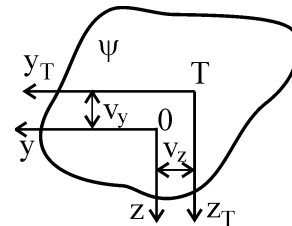
$$J_{yz} = J_{y_T z_T} + v_y v_z S$$

a) Transformace posunutím

Zvolíme osy y_0, z_0 tak, že mají počátek v těžišti příčného průřezu - osy centrální y_T, z_T .
Lineární momenty k centrálním osám jsou rovny 0 $\rightarrow$

Steinerova věta

Známe kvadratické momenty průřezu k osám y_T a z_T procházejícím těžištěm a chceme určit tyto momenty k posunutým osám y a z .



$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S$$

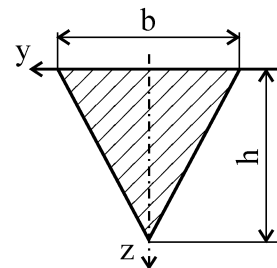
$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S$$

$$J_{yz} = J_{y_T z_T} + v_y v_z S$$

$$J_P = J_{P_T} + (v_y^2 + v_z^2) S$$

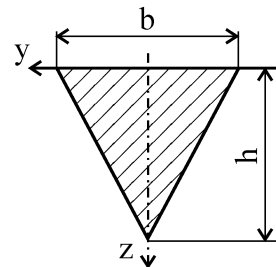
Příklad 1:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru rovnoramenného trojúhelníka k osám y, z .



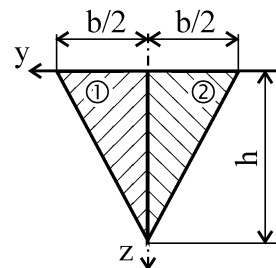
Příklad 1:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru rovnoramenného trojúhelníka k osám y, z .



Řešení:

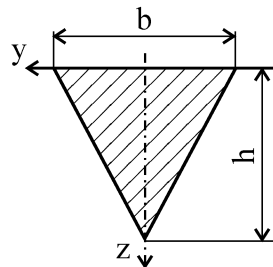
Využijeme základních vlastností kvadratických momentů a průřez rozdělíme na dvě symetrické části tvaru pravoúhlého trojúhelníka. Tento tvar patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít.



$$J_y^{(1)} = J_y^{(2)} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12}$$

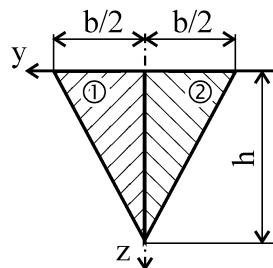
Příklad 1:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru rovnoramenného trojúhelníka k osám y, z .



Řešení:

Využijeme základních vlastností kvadratických momentů a průřez rozdělíme na dvě symetrické části tvaru pravoúhlého trojúhelníka. Tento tvar patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít.

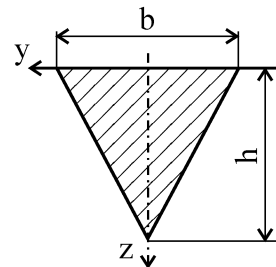


$$J_y^{(1)} = J_y^{(2)} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12}$$

$$J_z^{(1)} = J_z^{(2)} = \frac{h \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12}$$

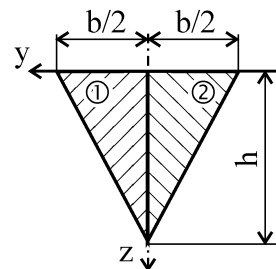
Příklad 1:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru rovnoramenného trojúhelníka k osám y, z .



Řešení:

Využijeme základních vlastností kvadratických momentů a průřez rozdělíme na dvě symetrické části tvaru pravoúhlého trojúhelníka. Tento tvar patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít.



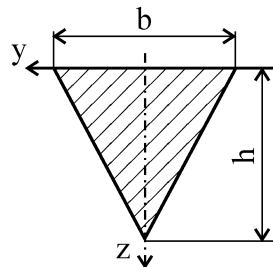
$$J_y^{(1)} = J_y^{(2)} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12}$$

$$J_z^{(1)} = J_z^{(2)} = \frac{h \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12}$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = 2 \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12},$$

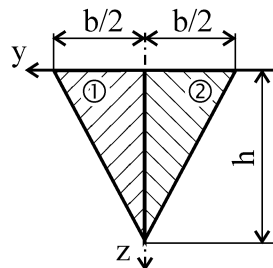
Příklad 1:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru rovnoramenného trojúhelníka k osám y, z .



Řešení:

Využijeme základních vlastností kvadratických momentů a průřez rozdělíme na dvě symetrické části tvaru pravoúhlého trojúhelníka. Tento tvar patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít.



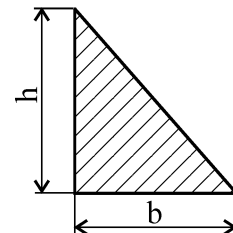
$$J_y^{(1)} = J_y^{(2)} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12}$$

$$J_z^{(1)} = J_z^{(2)} = \frac{h \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12}$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = 2 \frac{\left(\frac{b}{2}\right) h^3}{12}, \quad J_z = J_z^{(1)} + J_z^{(2)} = 2 \frac{h \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12}, \quad J_{yz} = 0$$

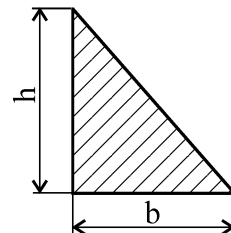
Příklad 2:

Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru pravoúhlého trojúhelníka k osám rovnoběžným s jeho odvěsnami.



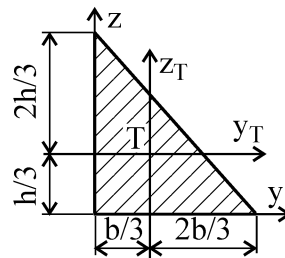
Příklad 2:

Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru pravoúhlého trojúhelníka k osám rovnoběžným s jeho odvěsnami.



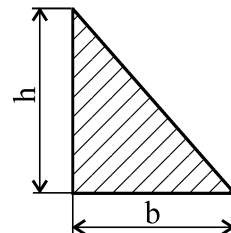
Řešení:

Centrální osy jsou osy procházející těžištěm průřezu (y_T, z_T). Průřez je tvaru pravoúhlého trojúhelníka, patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít. Kvadratické momenty máme odvozeny k osám, které leží v odvěsnách trojúhelníka (y, z). Musíme tedy transformovat posunutím a k tomu využijeme **Steinerovu větu**.



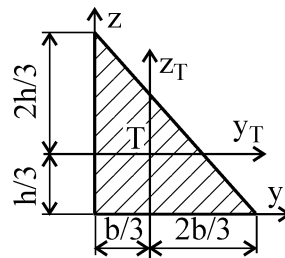
Příklad 2:

Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru pravoúhlého trojúhelníka k osám rovnoběžným s jeho odvěsnami.



Řešení:

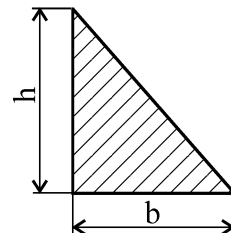
Centrální osy jsou osy procházející těžištěm průřezu (y_T, z_T). Průřez je tvaru pravoúhlého trojúhelníka, patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít. Kvadratické momenty máme odvozeny k osám, které leží v odvěsnách trojúhelníka (y, z). Musíme tedy transformovat posunutím a k tomu využijeme **Steinerovu větu**.



$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{3}\right)^2 S \Rightarrow J_{y_T} = \frac{bh^3}{12} - \left(-\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

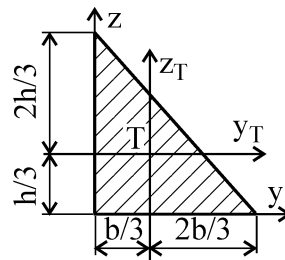
Příklad 2:

Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru pravoúhlého trojúhelníka k osám rovnoběžným s jeho odvěsnami.



Řešení:

Centrální osy jsou osy procházející těžištěm průřezu (y_T, z_T). Průřez je tvaru pravoúhlého trojúhelníka, patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít. Kvadratické momenty máme odvozeny k osám, které leží v odvěsnách trojúhelníka (y, z). Musíme tedy transformovat posunutím a k tomu využijeme **Steinerovu větu**.

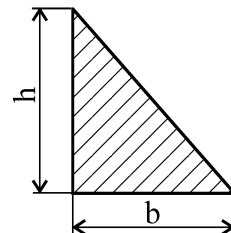


$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{3}\right)^2 S \Rightarrow J_{y_T} = \frac{bh^3}{12} - \left(-\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S = J_{z_T} + \left(-\frac{b}{3}\right)^2 S \Rightarrow J_{z_T} = \frac{hb^3}{12} - \left(-\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36}$$

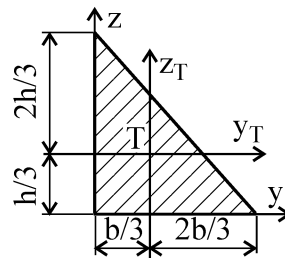
Příklad 2:

Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru pravoúhlého trojúhelníka k osám rovnoběžným s jeho odvěsnami.



Řešení:

Centrální osy jsou osy procházející těžištěm průřezu (y_T, z_T). Průřez je tvaru pravoúhlého trojúhelníka, patří do základních tvarů průřezů, pro které jsme dosazením do definičních vztahů odvodili kvadratické momenty, můžeme tyto výsledky využít. Kvadratické momenty máme odvozeny k osám, které leží v odvěsnách trojúhelníka (y, z). Musíme tedy transformovat posunutím a k tomu využijeme **Steinerovu větu**.



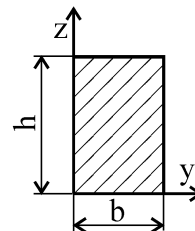
$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{3}\right)^2 S \Rightarrow J_{y_T} = \frac{bh^3}{12} - \left(-\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S = J_{z_T} + \left(-\frac{b}{3}\right)^2 S \Rightarrow J_{z_T} = \frac{hb^3}{12} - \left(-\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36}$$

$$J_{yz} = J_{y_T z_T} + v_y v_z S = J_{y_T z_T} + \left(-\frac{h}{3}\right) \left(-\frac{b}{3}\right) S \Rightarrow J_{y_T z_T} = \frac{b^2 h^2}{24} - \left(-\frac{h}{3}\right) \left(-\frac{b}{3}\right) \frac{bh}{2} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

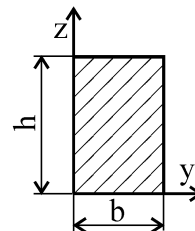
Příklad 3:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru obdélníka k osám y, z .



Příklad 3:

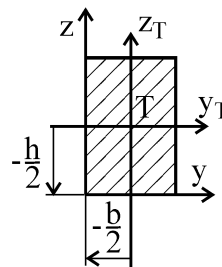
Určete kvadratické momenty průřezu tvaru obdélníka k osám y, z .



Řešení:

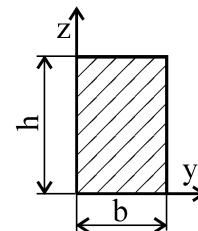
Kvadratické momenty máme odvozeny k centrálním osám a musíme tedy použít transformaci posunutím – **Steinerovu větu**.

$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{3}$$



Příklad 3:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru obdélníka k osám y, z .

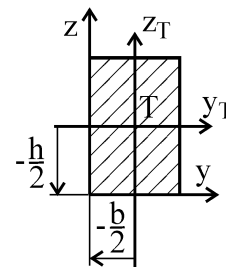


Řešení:

Kvadratické momenty máme odvozeny k centrálním osám a musíme tedy použít transformaci posunutím – **Steinerovu větu**.

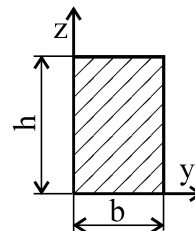
$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{3}$$

$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S = J_{z_T} + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{12} + \frac{b^2}{4}bh = \frac{hb^3}{3}$$



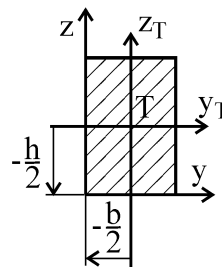
Příklad 3:

Určete kvadratické momenty průřezu tvaru obdélníka k osám y, z .



Řešení:

Kvadratické momenty máme odvozeny k centrálním osám a musíme tedy použít transformaci posunutím – **Steinerovu větu**.

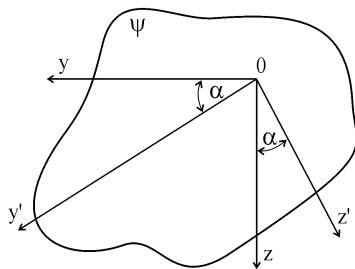


$$J_y = J_{y_T} + v_y^2 S = J_{y_T} + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{3}$$

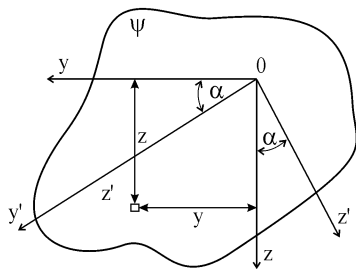
$$J_z = J_{z_T} + v_z^2 S = J_{z_T} + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{12} + \frac{b^2}{4}bh = \frac{hb^3}{3}$$

$$J_{yz} = J_{y_T z_T} + v_y v_z S = J_{y_T z_T} + \left(-\frac{h}{2}\right) \left(-\frac{b}{2}\right) bh = 0 + \frac{h}{2} \frac{b}{2} bh = \frac{b^2 h^2}{4}$$

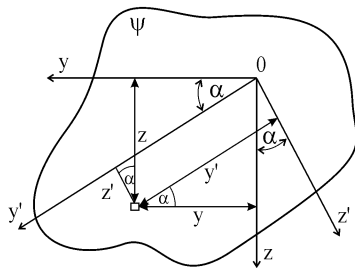
b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



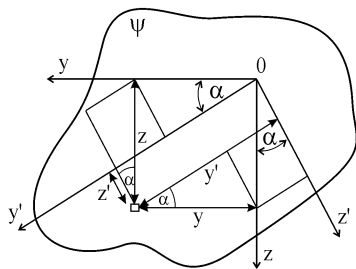
b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



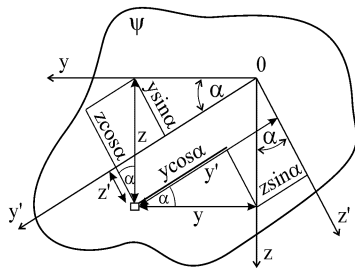
b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



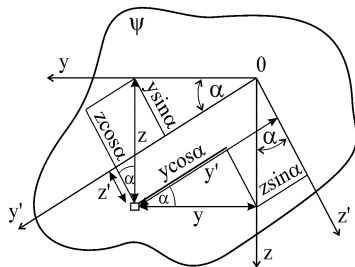
b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69

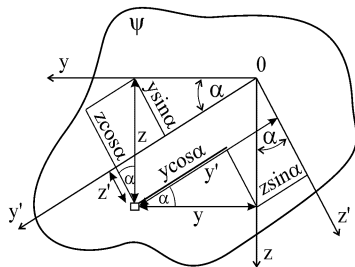


$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} J_{y'} &= \iint_{\psi} z'^2 dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



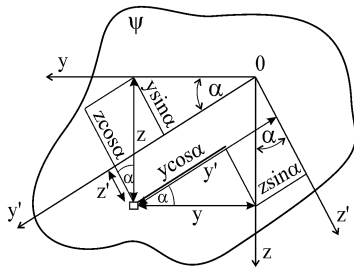
$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} J_{y'} &= \iint_{\psi} z'^2 dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{z'} &= \iint_{\psi} y'^2 dS = \iint_{\psi} (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_z \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

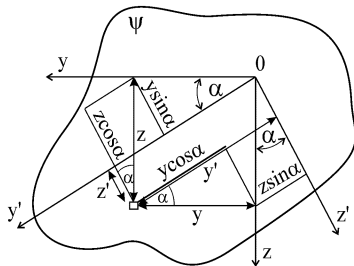
$$\begin{aligned} J_{y'} &= \iint_{\psi} z'^2 dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{z'} &= \iint_{\psi} y'^2 dS = \iint_{\psi} (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_z \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{y'z'} &= \iint_{\psi} y' z' dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)(y \cos \alpha + z \sin \alpha) dS = \\ &= \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$J_{P'} = J_{y'} + J_{z'} = J_y (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_z (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = J_P$$

b) **Transformace natočením** - odvození skriptu PP, str. 68 - 69



$$z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} J_{y'} &= \iint_{\psi} z'^2 dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{z'} &= \iint_{\psi} y'^2 dS = \iint_{\psi} (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 dS = \\ &= J_z \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

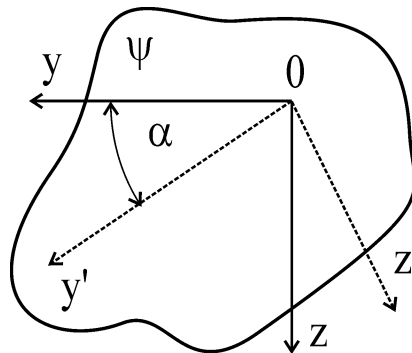
$$\begin{aligned} J_{y'z'} &= \iint_{\psi} y' z' dS = \iint_{\psi} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)(y \cos \alpha + z \sin \alpha) dS = \\ &= \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$J_{P'} = J_{y'} + J_{z'} = J_y (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_z (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = J_P$$

Polární kvadratický moment nezávisí na úhlu natočení souř. systému – **invariantní veličina**.

6.2.7. Hlavní kvadratické momenty

V množině pootočených souřadných systémů y', z' existuje takový souřadný systém y_h, z_h , ke kterému je deviační moment roven nule.

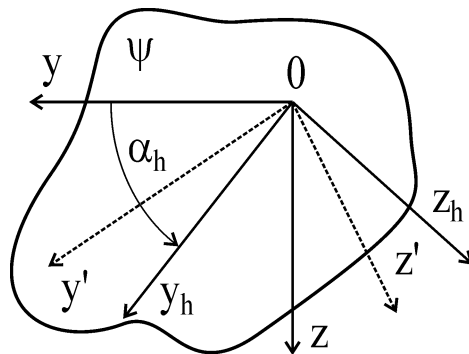


6.2.7. Hlavní kvadratické momenty

V množině potočených souřadných systémů y', z' existuje takový souřadný systém y_h, z_h , ke kterému je deviační moment roven nule.

$$J_{y_h z_h} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha_h + J_{yz} \cos 2\alpha_h = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_h = -\frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \Rightarrow \alpha_h = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} \right)$$

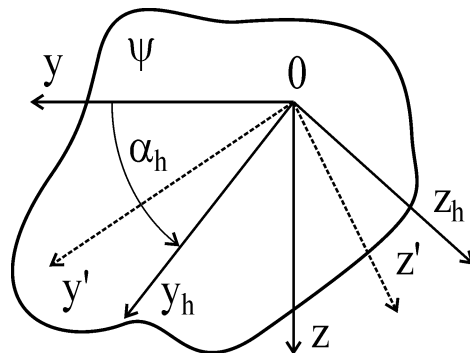


6.2.7. Hlavní kvadratické momenty

V množině pootočených souřadných systémů y', z' existuje takový souřadný systém y_h, z_h , ke kterému je deviační moment roven nule.

$$J_{y_h z_h} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha_h + J_{yz} \cos 2\alpha_h = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_h = -\frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \Rightarrow \alpha_h = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} \right)$$



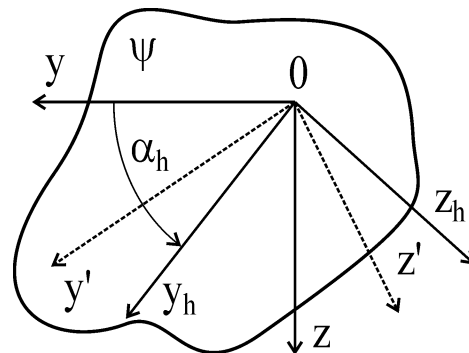
Je to tzv. **hlavní souřadný systém** a jeho osy se nazývají **osy hlavní**. Kvadratické momenty k tomuto souřadnému systému jsou **hlavní kvadratické momenty** J_{y_h}, J_{z_h} . Větší z nich se nazývá **maximální hlavní kvadratický moment** a označuje se J_1 , menší se nazývá **minimální hlavní kvadratický moment** a označuje se J_2 .

6.2.7. Hlavní kvadratické momenty

V množině potočených souřadných systémů y', z' existuje takový souřadný systém y_h, z_h , ke kterému je deviační moment roven nule.

$$J_{y_h z_h} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha_h + J_{yz} \cos 2\alpha_h = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_h = -\frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \Rightarrow \alpha_h = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} \right)$$



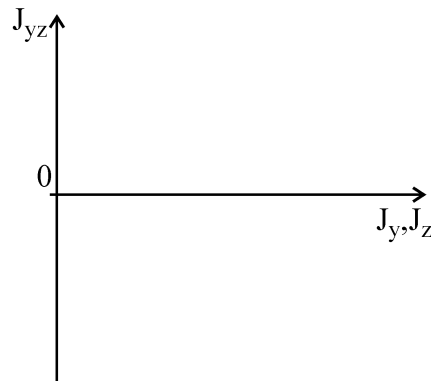
Je to tzv. **hlavní souřadný systém** a jeho osy se nazývají **osy hlavní**. Kvadratické momenty k tomuto souřadnému systému jsou **hlavní kvadratické momenty** J_{y_h}, J_{z_h} . Větší z nich se nazývá **maximální hlavní kvadratický moment** a označuje se J_1 , menší se nazývá **minimální hlavní kvadratický moment** a označuje se J_2 .

Pokud hlavní souřadnicový systém má počátek v těžišti, nazývá se **hlavní centrální souřadnicový systém**.

6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.



*6.2 [PPI, 71 – 74]

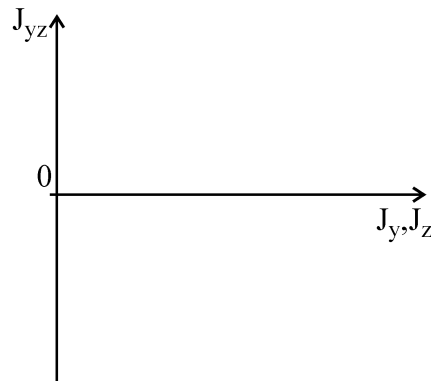
6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

$$J_{y'} = J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha$$

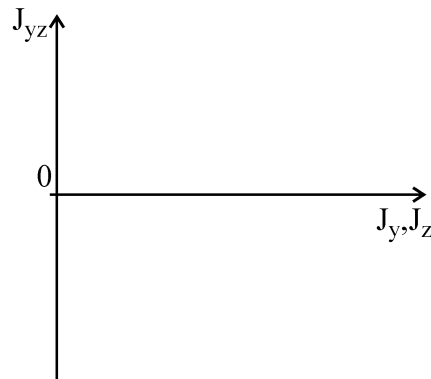
$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$



6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.



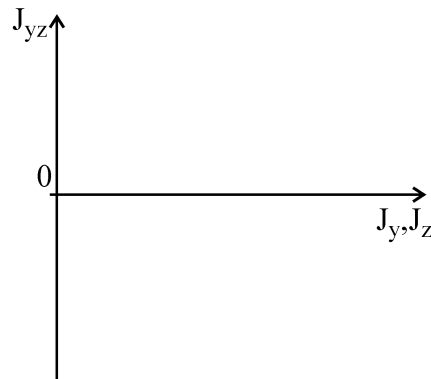
$$\begin{aligned} J_{y'} &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \\ &= J_y \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.



$$\begin{aligned} J_{y'} &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha \\ &= J_y \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

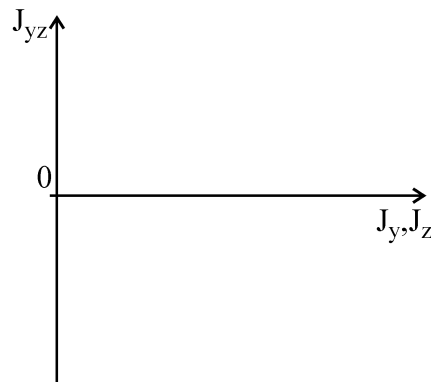
6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

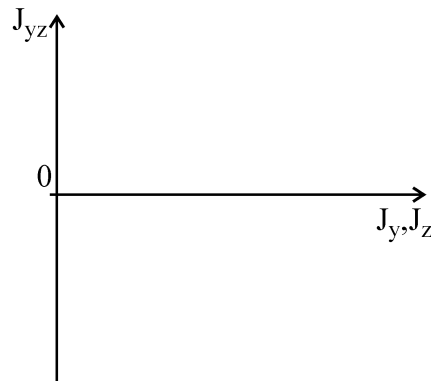
$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$



6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.



$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

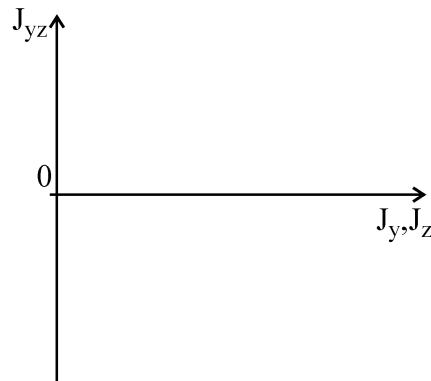
$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.



$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

→ rovnice kružnice s poloměrem $r = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$,

6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

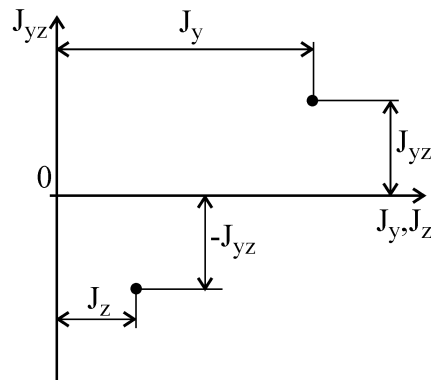
$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

→ rovnice kružnice s poloměrem $r = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$,

vodorovná osa – osově kvadratické momenty, osa svislá – momenty deviační, souřadnici J_y přísluší odpovídající (vypočítané) znaménko u J_{yz} , souřadnici J_z pak přísluší J_{yz} stejně velký, ale s opačným znaménkem.



6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

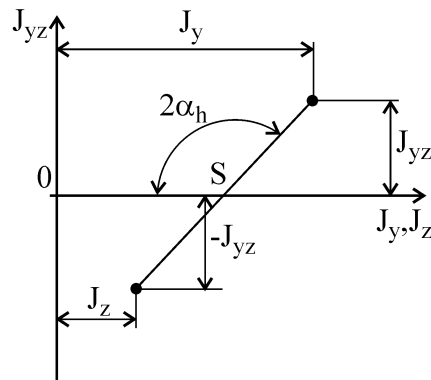
$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

→ rovnice kružnice s poloměrem $r = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$,

vodorovná osa – osově kvadratické momenty, osa svislá – momenty deviační, souřadnici J_y přísluší odpovídající (vypočítané) znaménko u J_{yz} , souřadnici J_z pak přísluší J_{yz} stejně velký, ale s opačným znaménkem.



6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

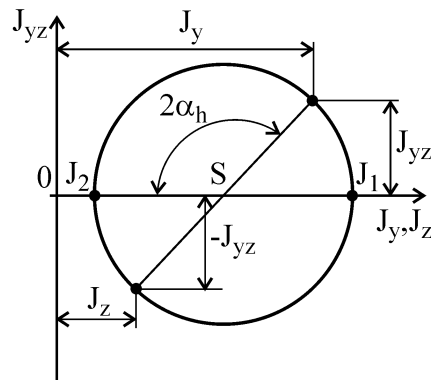
$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

→ rovnice kružnice s poloměrem $r = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$,

vodorovná osa – osově kvadratické momenty, osa svislá – momenty deviační, souřadnici J_y přísluší odpovídající (vypočítané) znaménko u J_{yz} , souřadnici J_z pak přísluší J_{yz} stejně velký, ale s opačným znaménkem.



6.2.8. Mohrova kružnice

Mohrova kružnice je geometrickým místem bodů v Mohrově rovině, jejichž souřadnice jsou kvadratické momenty k natočeným souřadnicovým systémům v jednom bodě průřezu.

Odvození ve skriptech PP, str. 70 - 71.

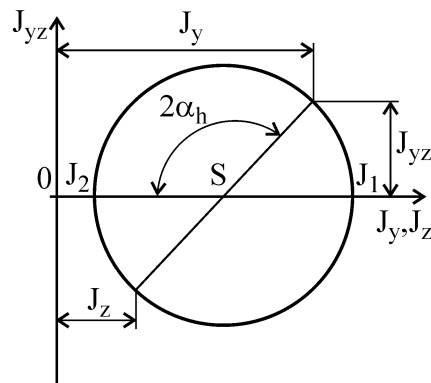
$$J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} = \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha$$

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2} \right)^2 + J_{y'z'}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2$$

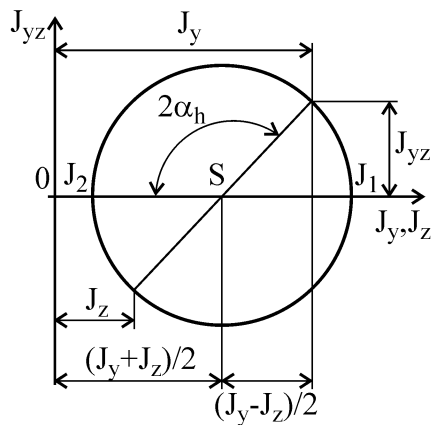
→ rovnice kružnice s poloměrem $r = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$,

vodorovná osa – osově kvadratické momenty, osa svislá – momenty deviační, souřadnici J_y přísluší odpovídající (vypočítané) znaménko u J_{yz} , souřadnici J_z pak přísluší J_{yz} stejně velký, ale s opačným znaménkem.



6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty



a)

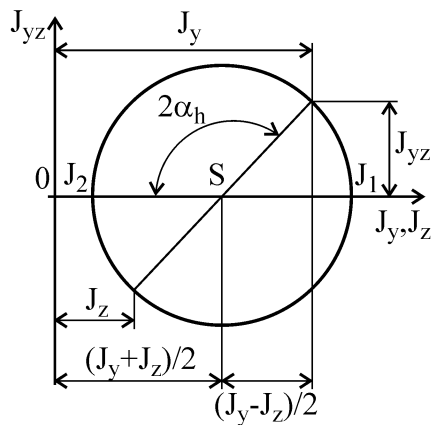
$$\alpha_h = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} \right)$$

$$J_{y_h} = J_y \cos^2 \alpha_h - J_{yz} \sin 2\alpha_h + J_z \sin^2 \alpha_h$$

$$J_{z_h} = J_z \cos^2 \alpha_h + J_{yz} \sin 2\alpha_h + J_y \sin^2 \alpha_h$$

6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty



a)

$$\alpha_h = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} \right)$$

$$J_{y_h} = J_y \cos^2 \alpha_h - J_{yz} \sin 2\alpha_h + J_z \sin^2 \alpha_h$$

$$J_{z_h} = J_z \cos^2 \alpha_h + J_{yz} \sin 2\alpha_h + J_y \sin^2 \alpha_h$$

b)

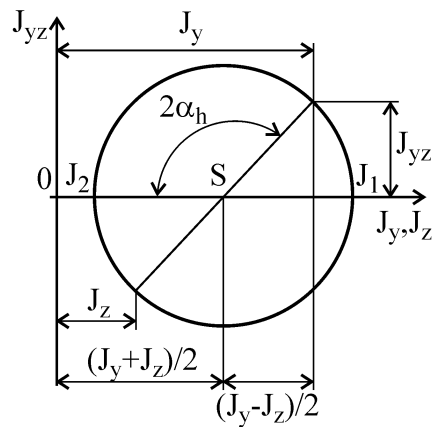
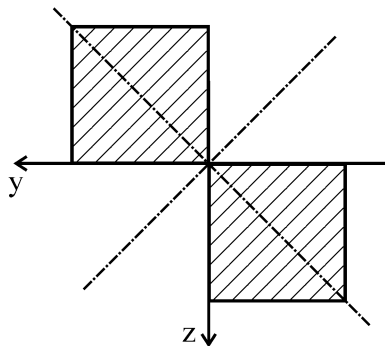
$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$$

6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty

b)

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$

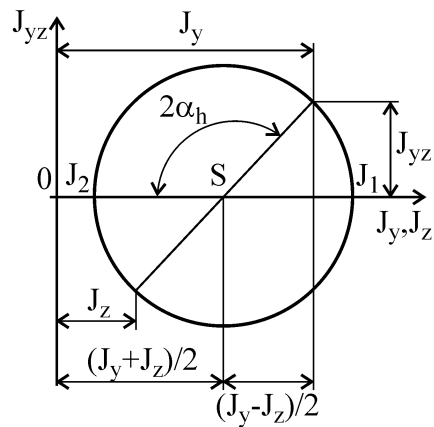
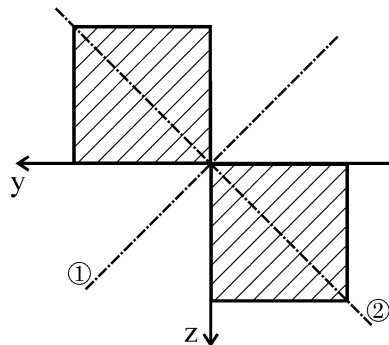


6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty

b)

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$

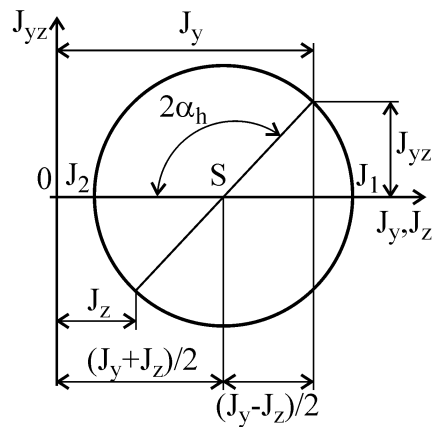
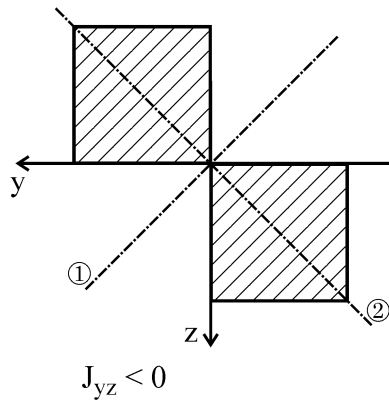


6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty

b)

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$

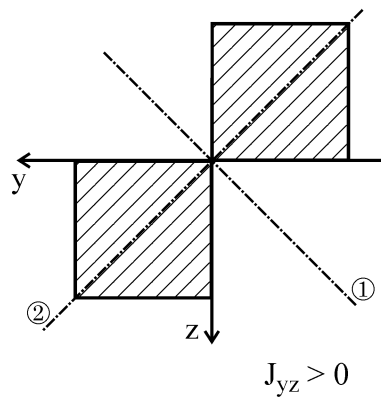
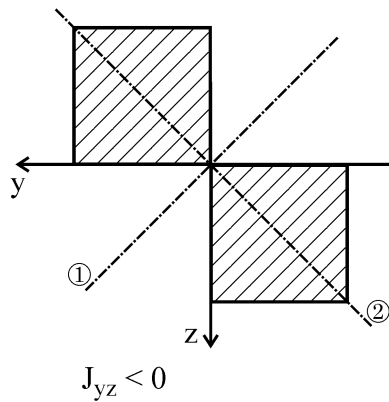
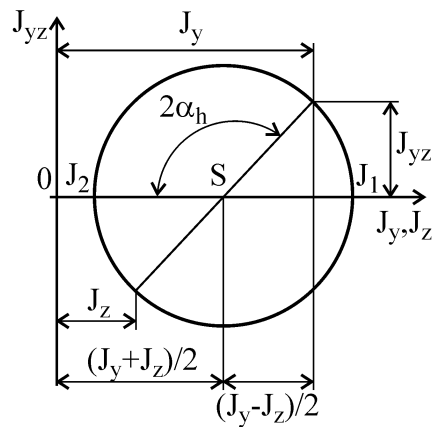


6.2.8. Mohrova kružnice

Hlavní kvadratické momenty

b)

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$



Příklad 4:

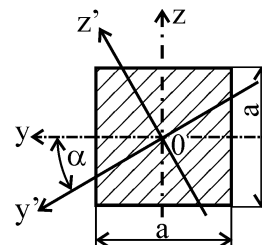
Určete centrální kvadratické momenty průřezu tvaru čtverce k osám y' , z' natočeným vzhledem k osám y , z o úhel α .

Řešení:

$$J_y = J_z = \frac{a^4}{12}, \quad J_{yz} = 0$$

$$J_{y'} = J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha = J_y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = J_y$$

$$J_{z'} = J_z \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha = J_z$$



Grafické řešení:

Platí obecně:

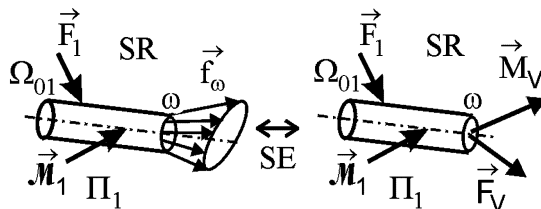
Centrální kvadratické momenty průřezů s více osami symetrie jsou si rovny a jsou to přímo hlavní momenty pro jakékoliv natočení tohoto systému. Mohrova kružnice pro tento případ degeneruje v bod.

6.3. Výsledné vnitřní účinky prutů (VVÚ)

Probráno ve Statice.

*6.3 [PPI, 76 - 85]

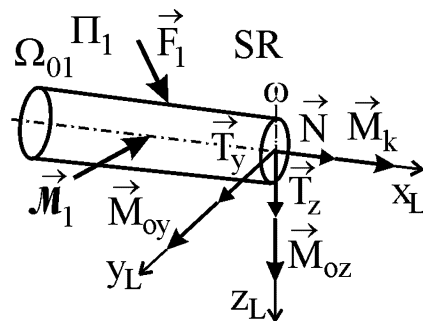
6.3. Výsledné vnitřní účinky prutů (VVÚ)



$$\vec{F}_V = \vec{N} + \vec{T}_y + \vec{T}_z$$

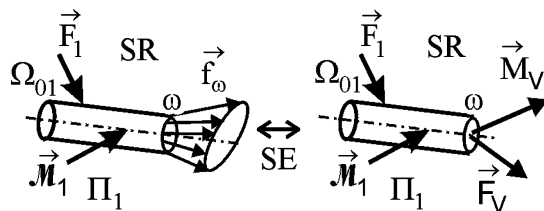
$$\vec{M}_V = \vec{M}_k + \vec{M}_{oy} + \vec{M}_{oz}$$

$$VVÚ = \{N, T_y, T_z, M_k, M_{oy}, M_{oz}\}$$



Výsledné vnitřní účinky (VVÚ) jsou složky silové a momentové výslednice v těžišti příčného průřezu, které spolu se soustavou vnějších silových účinků tvoří rovnovážnou silovou soustavu působící na prvek.

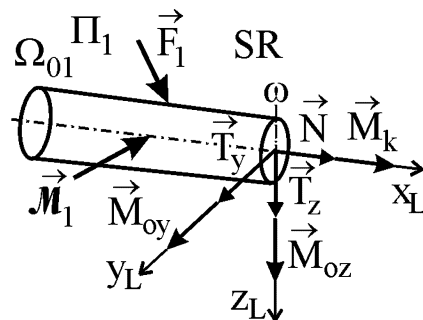
*6.3 [PPI, 76 - 85]



$$\vec{F}_V = \vec{N} + \vec{T}_y + \vec{T}_z$$

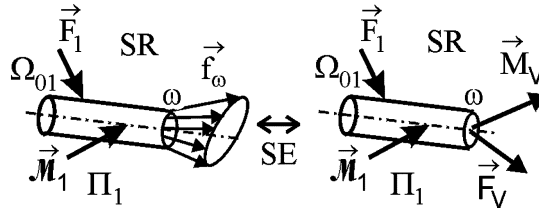
$$\vec{M}_V = \vec{M}_k + \vec{M}_{oy} + \vec{M}_{oz}$$

$$VV\dot{U} = \{N, T_y, T_z, M_k, M_{oy}, M_{oz}\}$$



Výsledné vnitřní účinky (VVÚ) jsou složky silové a momentové výslednice v těžišti příčného průřezu, které spolu se soustavou vnějších silových účinků tvoří rovnovážnou silovou soustavu působící na prvek.

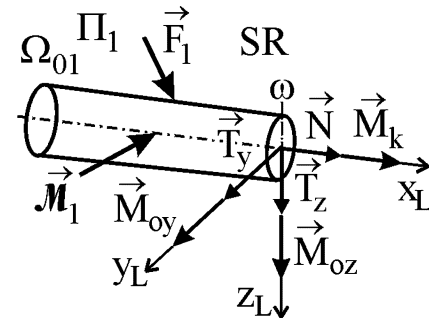
N - normálová síla $\left\{ \begin{array}{l} \text{tah} \\ \text{tlak} \end{array} \right.$



$$\vec{F}_V = \vec{N} + \vec{T}_y + \vec{T}_z$$

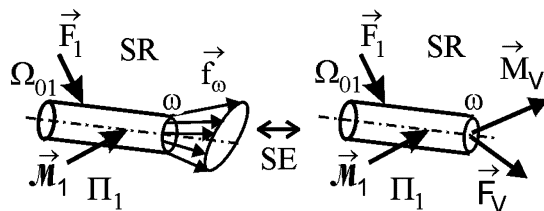
$$\vec{M}_V = \vec{M}_k + \vec{M}_{oy} + \vec{M}_{oz}$$

$$VV\dot{U} = \{N, T_y, T_z, M_k, M_{oy}, M_{oz}\}$$



Výsledné vnitřní účinky (VVÚ) jsou složky silové a momentové výslednice v těžišti příčného průřezu, které spolu se soustavou vnějších silových účinků tvoří rovnovážnou silovou soustavu působící na prvek.

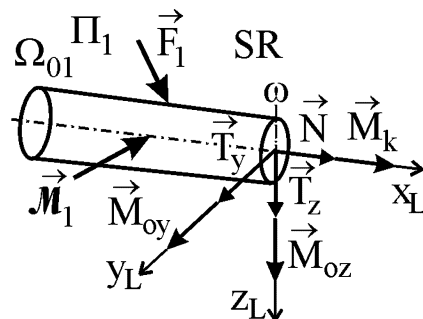
N	- normálová síla	⟨	tah
			tlak
T_y, T_z	- posouvající síly	-	smyk



$$\vec{F}_V = \vec{N} + \vec{T}_y + \vec{T}_z$$

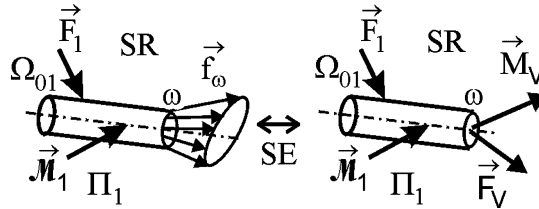
$$\vec{M}_V = \vec{M}_k + \vec{M}_{oy} + \vec{M}_{oz}$$

$$VV\dot{U} = \{N, T_y, T_z, M_k, M_{oy}, M_{oz}\}$$



Výsledné vnitřní účinky (VVÚ) jsou složky silové a momentové výslednice v těžišti příčného průřezu, které spolu se soustavou vnějších silových účinků tvoří rovnovážnou silovou soustavu působící na prvek.

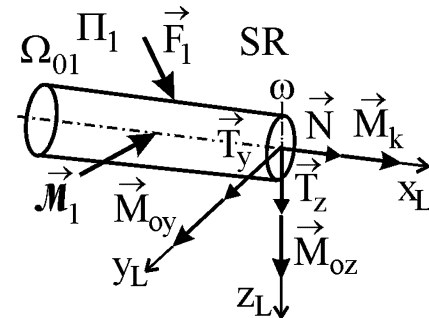
N	- normálová síla	<	tah tlak
T_y, T_z	- posouvající síly	-	smyk
M_k	- kroučící moment	-	kрут



$$\vec{F}_V = \vec{N} + \vec{T}_y + \vec{T}_z$$

$$\vec{M}_V = \vec{M}_k + \vec{M}_{oy} + \vec{M}_{oz}$$

$$VV\dot{U} = \{N, T_y, T_z, M_k, M_{oy}, M_{oz}\}$$



Výsledné vnitřní účinky (VVÚ) jsou složky silové a momentové výslednice v těžišti příčného průřezu, které spolu se soustavou vnějších silových účinků tvoří rovnovážnou silovou soustavu působící na prvek.

N	- normálová síla	<	tah tlak
T_y, T_z	- posouvající síly	-	smyk
M_k	- kroučící moment	-	krut
M_{oy}, M_{oz}	- ohybové momenty	-	ohyb

- **Jednoduché** namáhání prutu – v **každém** bodě γ pouze **jedna** ze složek $\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_o, \vec{M}_k$ – tah ($N > 0$), tlak ($N < 0$), ohyb ($M_o \neq 0$), krut ($M_k \neq 0$), smyk ($T \neq 0$).

- **Jednoduché** namáhání prutu – v **každém** bodě γ pouze **jedna** ze složek $\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_o, \vec{M}_k$ – tah ($N > 0$), tlak ($N < 0$), ohyb ($M_o \neq 0$), krut ($M_k \neq 0$), smyk ($T \neq 0$).
- **Kombinované** namáhání prutu – alespoň v jednom bodě γ prutu **více než jedna** ze složek $\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_o, \vec{M}_k$ nenulová.

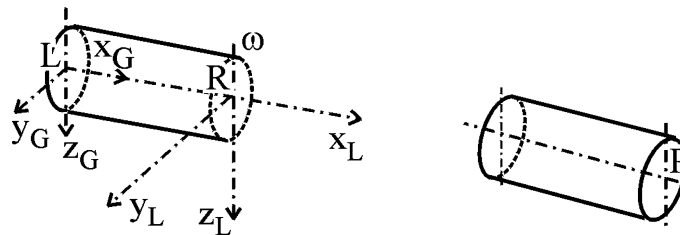
- **Jednoduché** namáhání prutu – v **každém** bodě γ pouze **jedna** ze složek $\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_o, \vec{M}_k$ – tah ($N > 0$), tlak ($N < 0$), ohyb ($M_o \neq 0$), krut ($M_k \neq 0$), smyk ($T \neq 0$).
- **Kombinované** namáhání prutu – alespoň v jednom bodě γ prutu **více než jedna** ze složek $\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_o, \vec{M}_k$ nenulová.

a) **VVÚ v bodě střednice** – určitá hodnota (lokální charakteristiky – napětí),

- **Jednoduché** namáhání prutu – v **každém** bodě γ pouze **jedna** ze složek $\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_o, \vec{M}_k$ – tah ($N > 0$), tlak ($N < 0$), ohyb ($M_o \neq 0$), krut ($M_k \neq 0$), smyk ($T \neq 0$).
 - **Kombinované** namáhání prutu – alespoň v jednom bodě γ prutu **více než jedna** ze složek $\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_o, \vec{M}_k$ nenulová.
- a) **VVÚ v bodě střednice** – určitá hodnota (lokální charakteristiky – napětí),
- b) **VVÚ prutu** – funkční závislost po délce střednice (nebezpečné průřezy a globální charakteristiky – posuvy).

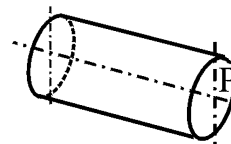
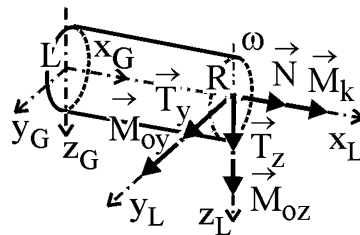
Znaménková konvence:

a) otevřené přímé pruty



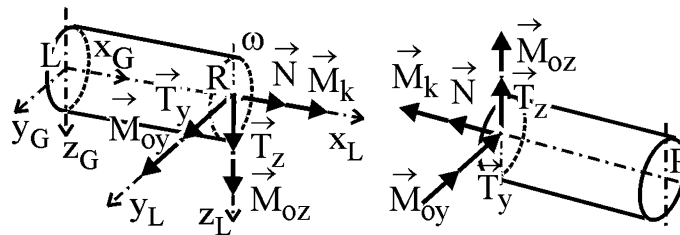
Znaménková konvence:

a) otevřené přímé pruty



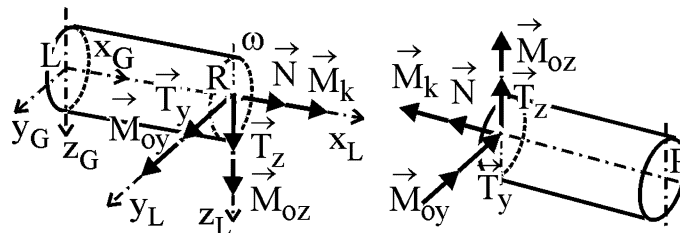
Znaménková konvence:

a) otevřené přímé pruty

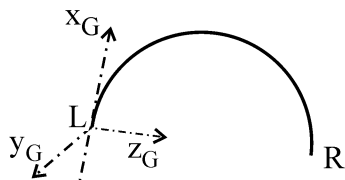


Znaménková konvence:

a) otevřené přímé pruty

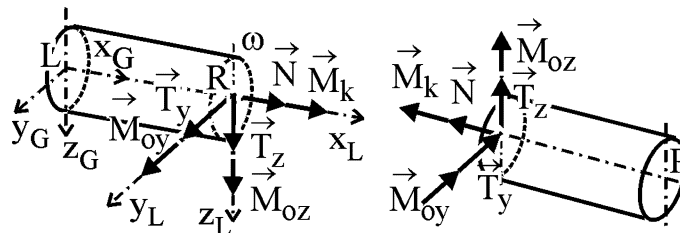


b) otevřené zakřivené pruty

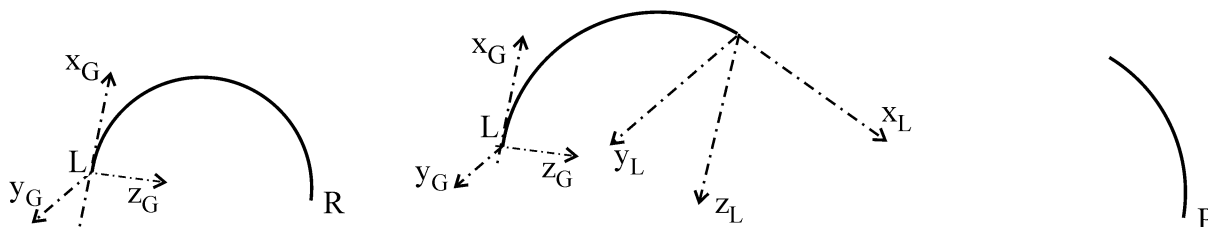


Znaménková konvence:

a) otevřené přímé pruty

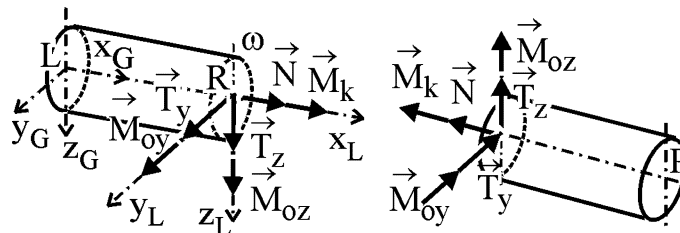


b) otevřené zakřivené pruty

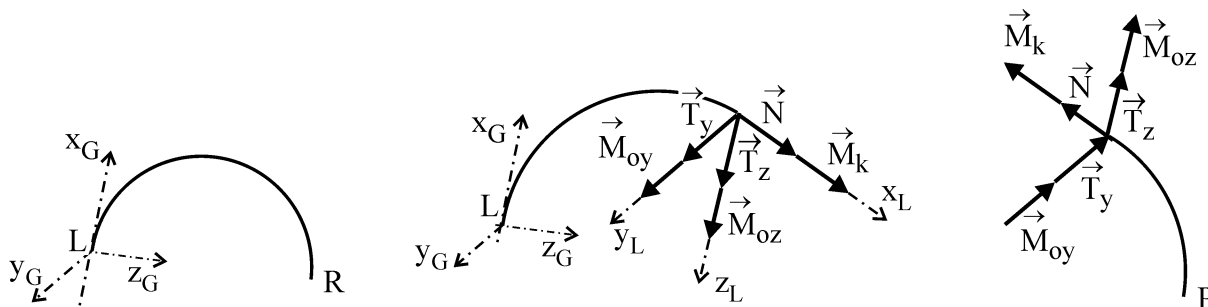


Znaménková konvence:

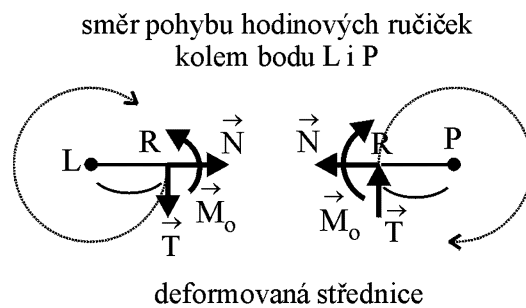
a) otevřené přímé pruty



b) otevřené zakřivené pruty



Pomůcka pro rovinnou úlohu:

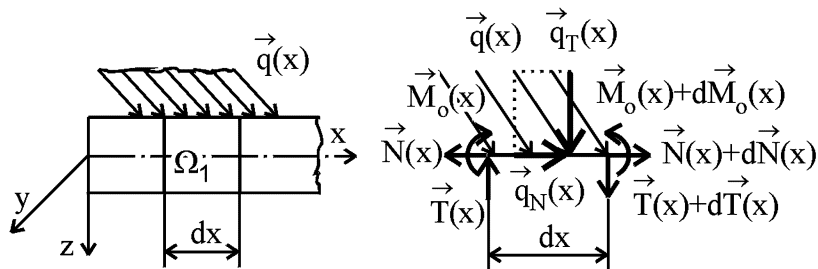


Diferenciální přístup

Schwedlerova věta – pro *přímý prut zatížený spojitým liniovým zatížením* $\vec{q}(x)$.

$$q_N(x) = q(x) \cos \alpha$$

$$q_T(x) = q(x) \sin \alpha$$



$$\frac{d N(x)}{d x} = -q_N(x), \quad \frac{d T(x)}{d x} = -q_T(x), \quad \frac{d M_o(x)}{d x} = T(x).$$

6.3.1. Otevřené vázané pruty

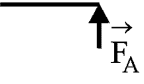
Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			



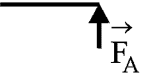
6.3.1. Otevřené vázané pruty

Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			

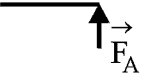
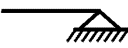
6.3.1. Otevřené vázané pruty

Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			$w_A = 0$

6.3.1. Otevřené vázané pruty

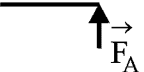
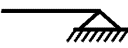
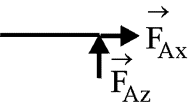
Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			$w_A = 0$
rotační vazba			



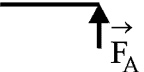
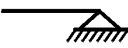
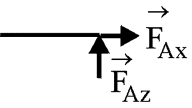
6.3.1. Otevřené vázané pruty

Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			$w_A = 0$
rotační vazba			

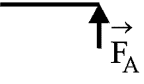
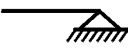
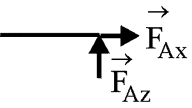
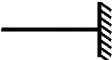
6.3.1. Otevřené vázané pruty

Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			$w_A = 0$
rotační vazba			$u_A = 0$ $w_A = 0$

6.3.1. Otevřené vázané pruty

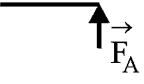
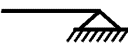
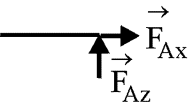
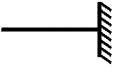
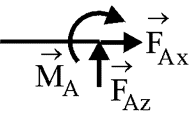
Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			$w_A = 0$
rotační vazba			$u_A = 0$ $w_A = 0$
vetknutí			



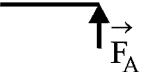
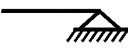
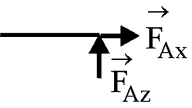
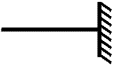
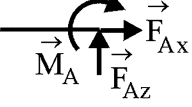
6.3.1. Otevřené vázané pruty

Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			$w_A = 0$
rotační vazba			$u_A = 0$ $w_A = 0$
vetknutí			

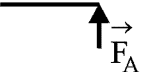
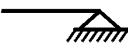
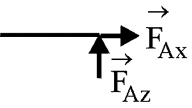
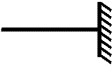
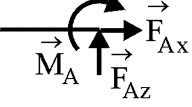
6.3.1. Otevřené vázané pruty

Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			$w_A = 0$
rotační vazba			$u_A = 0$ $w_A = 0$
vetknutí			$u_A = 0$ $w_A = 0$ $\phi_A = 0$

6.3.1. Otevřené vázané pruty

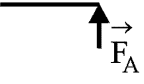
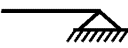
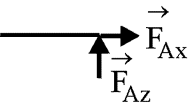
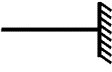
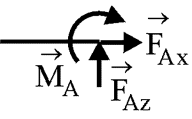
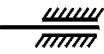
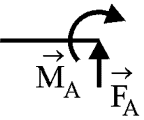
Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			$w_A = 0$
rotační vazba			$u_A = 0$ $w_A = 0$
vetknutí			$u_A = 0$ $w_A = 0$ $\phi_A = 0$
posuvná vazba			



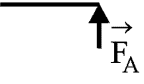
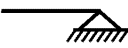
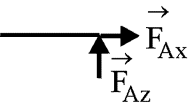
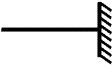
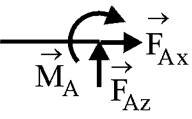
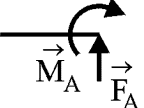
6.3.1. Otevřené vázané pruty

Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			$w_A = 0$
rotační vazba			$u_A = 0$ $w_A = 0$
vetknutí			$u_A = 0$ $w_A = 0$ $\phi_A = 0$
posuvná vazba			

6.3.1. Otevřené vázané pruty

Vazbové deformační podmínky prutu

označení	schéma	uvolnění	omezené kinematické vazbové parametry
obecná vazba			$w_A = 0$
rotační vazba			$u_A = 0$ $w_A = 0$
vetknutí			$u_A = 0$ $w_A = 0$ $\phi_A = 0$
posuvná vazba			$w_A = 0$ $\phi_A = 0$

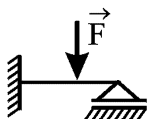
Vazby **tuhé** – omezený vazbový parametr je nulový.

Lineárně pružné vazby – vazbové parametry úměrné odpovídajícímu parametru stykové síly.

Vazby **tuhé** – omezený vazbový parametr je nulový.

Lineárně pružné vazby – vazbové parametry úměrné odpovídajícímu parametru stykové síly.

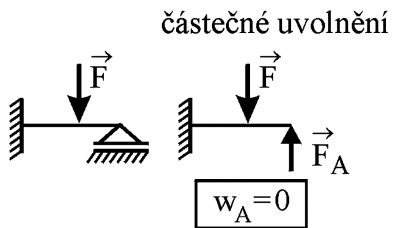
vazba tuhá



Vazby **tuhé** – omezený vazbový parametr je nulový.

Lineárně pružné vazby – vazbové parametry úměrné odpovídajícímu parametru stykové síly.

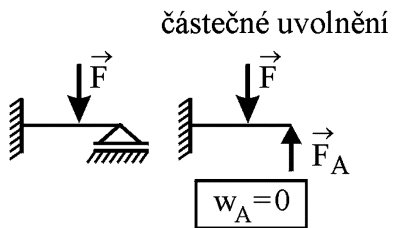
vazba tuhá



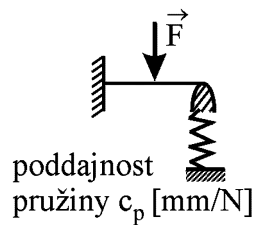
Vazby **tuhé** – omezený vazbový parametr je nulový.

Lineárně pružné vazby – vazbové parametry úměrné odpovídajícímu parametru stykové síly.

vazba tuhá



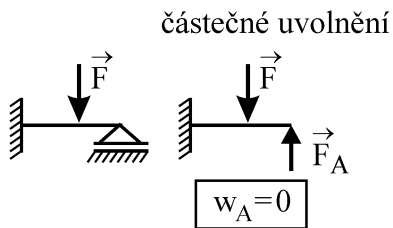
vazba lineárně pružná



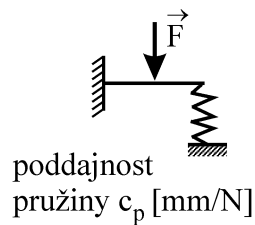
Vazby **tuhé** – omezený vazbový parametr je nulový.

Lineárně pružné vazby – vazbové parametry úměrné odpovídajícímu parametru stykové síly.

vazba tuhá



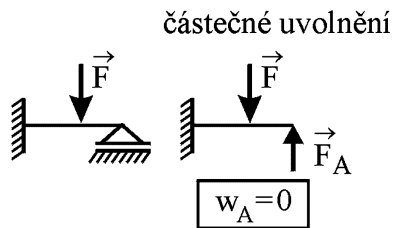
vazba lineárně pružná



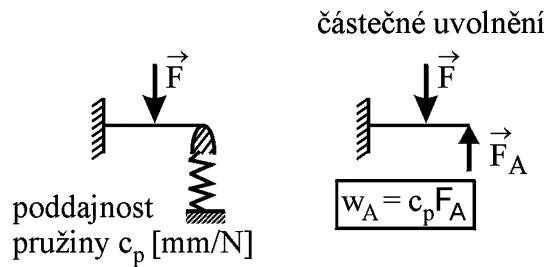
Vazby **tuhé** – omezený vazbový parametr je nulový.

Lineárně pružné vazby – vazbové parametry úměrné odpovídajícímu parametru stykové síly.

vazba tuhá



vazba lineárně pružná



Prut vázaný v n bodech střednice

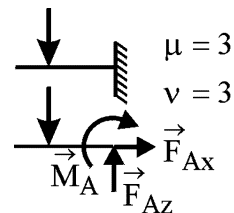
Statika: μ – počet neznámých nezávislých parametrů (složky vazbových silových účinků)
 ν – počet použitelných podmínek statické rovnováhy (závisí na typu silové soustavy).

Prut vázaný v n bodech střednice

Statika: μ – počet neznámých nezávislých parametrů (složky vazbových silových účinků)

ν – počet použitelných podmínek statické rovnováhy (závisí na typu silové soustavy).

a) $\boxed{\nu = \mu}$



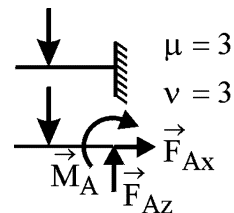
Prut vázaný v n bodech střednice

Statika: μ – počet neznámých nezávislých parametrů (složky vazbových silových účinků)

ν – počet použitelných podmínek statické rovnováhy (závisí na typu silové soustavy).

a) $\boxed{\nu = \mu}$

- uložení staticky určité,
- neznámé parametry určíme z podmínek SR.



Prut vázaný v n bodech střednice

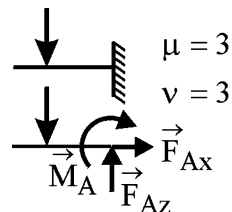
Statika: μ – počet neznámých nezávislých parametrů (složky vazbových silových účinků)

ν – počet použitelných podmínek statické rovnováhy (závisí na typu silové soustavy).

a) $\boxed{\nu = \mu}$

- uložení staticky určité,
- neznámé parametry určíme z podmínek SR.

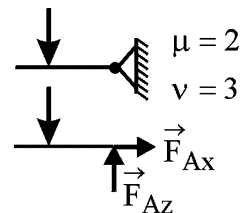
Prut uložen nepohyblivě z hlediska pohybu jako celku, ale s možností volné deformace.



Prut vázaný v n bodech střednice

Statika: μ – počet neznámých nezávislých parametrů (složky vazbových silových účinků)
 ν – počet použitelných podmínek statické rovnováhy (závisí na typu silové soustavy).

b) $\boxed{\mu < \nu}$

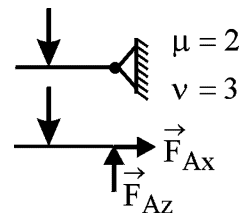


Prut vázaný v n bodech střednice

Statika: μ – počet neznámých nezávislých parametrů (složky vazbových silových účinků)
 ν – počet použitelných podmínek statické rovnováhy (závisí na typu silové soustavy).

b) $\boxed{\mu < \nu}$

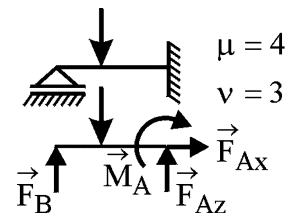
Prut není uložen nepohyblivě – dynamika, pak teprve případně PP.



Prut vázaný v n bodech střednice

Statika: μ – počet neznámých nezávislých parametrů (složky vazbových silových účinků)
 ν – počet použitelných podmínek statické rovnováhy (závisí na typu silové soustavy).

c) $\boxed{\mu > \nu}$

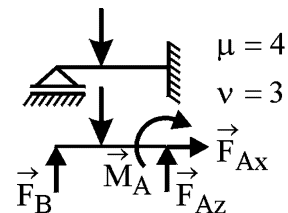


Prut vázaný v n bodech střednice

Statika: μ – počet neznámých nezávislých parametrů (složky vazbových silových účinků)
 ν – počet použitelných podmínek statické rovnováhy (závisí na typu silové soustavy).

c) $\boxed{\mu > \nu}$

- uložení staticky neurčité,
 $s = \mu - \nu$,
- ν použitelných podmínek SR + s vazbových deformačních podmínek.

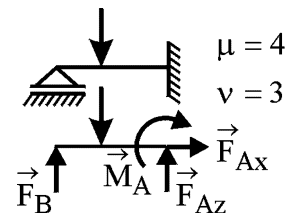


Prut vázaný v n bodech střednice

Statika: μ – počet neznámých nezávislých parametrů (složky vazbových silových účinků)
 ν – počet použitelných podmínek statické rovnováhy (závisí na typu silové soustavy).

c) $\boxed{\mu > \nu}$

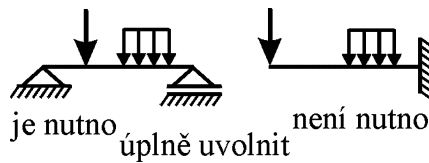
- uložení staticky neurčité,
 $s = \mu - \nu$,
- ν použitelných podmínek SR + s vazbových deformačních podmínek.



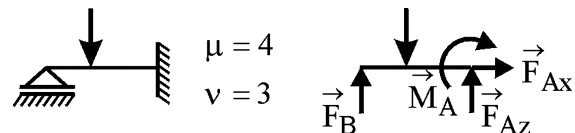
Prut uložen nepohyblivě z hlediska pohybu jako celku, ale s omezenou deformací.

Otevřené pruty vázané staticky určitě

úplné uvolnění,
stykové síly z podmínek SR,
řešíme jako prut volný.



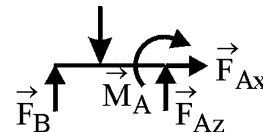
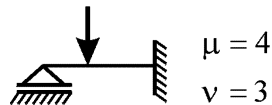
Otevřené pruty vázané staticky neurčitě



Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

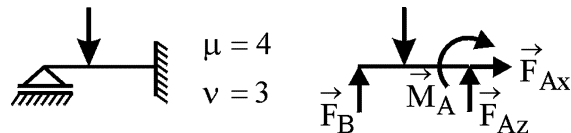
$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$



Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$

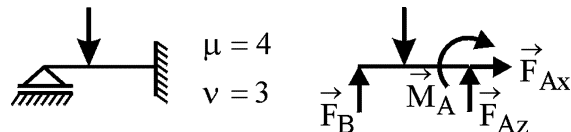


2. prut uvolníme částečně – uvolnění, kdy je prut je právě v prostoru určen.

Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$



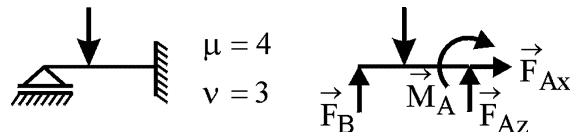
2. prut uvolníme částečně – uvolnění, kdy je prut je právě v prostoru určen.

Částečné uvolnění je uvolnění na úroveň staticky určitého uložení a zavedení deformačních podmínek tak, aby byla zachována deformace shodná s původním staticky neurčitým uložení.

Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$



2. prut uvolníme částečně – uvolnění, kdy je prut je právě v prostoru určen.

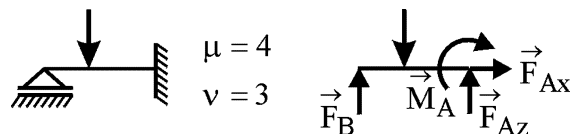
Částečné uvolnění je uvolnění na úroveň staticky určitého uložení a zavedení deformačních podmínek tak, aby byla zachována deformace shodná s původním staticky neurčitým uložení.

Deformační podmínka je vazbová podmínka v místě uvolněné vazby při částečném uvolnění.

Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

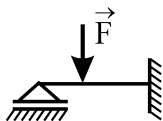
$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$



2. prut uvolníme částečně – uvolnění, kdy je prut je právě v prostoru určen.

Částečné uvolnění je uvolnění na úroveň staticky určitého uložení a zavedení deformačních podmínek tak, aby byla zachována deformace shodná s původním staticky neurčitým uložení.

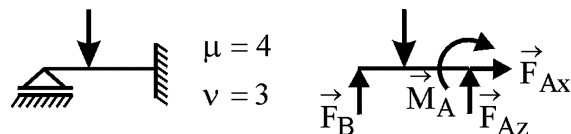
Deformační podmínka je vazbová podmínka v místě uvolněné vazby při částečném uvolnění.



Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

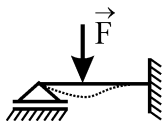
$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$



2. prut uvolníme částečně – uvolnění, kdy je prut je právě v prostoru určen.

Částečné uvolnění je uvolnění na úroveň staticky určitého uložení a zavedení deformačních podmínek tak, aby byla zachována deformace shodná s původním staticky neurčitým uložením.

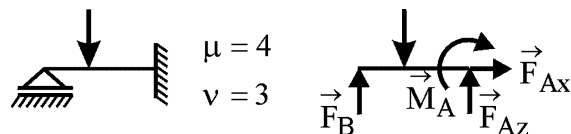
Deformační podmínka je vazbová podmínka v místě uvolněné vazby při částečném uvolnění.



Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

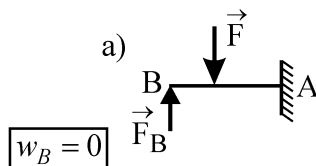
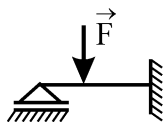
$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$



2. prut uvolníme částečně – uvolnění, kdy je prut je právě v prostoru určen.

Částečné uvolnění je uvolnění na úroveň staticky určitého uložení a zavedení deformačních podmínek tak, aby byla zachována deformace shodná s původním staticky neurčitým uložením.

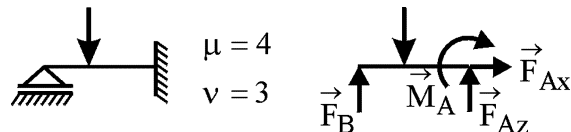
Deformační podmínka je vazbová podmínka v místě uvolněné vazby při částečném uvolnění.



Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

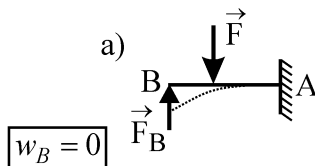
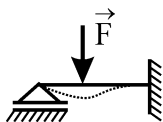
$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$



2. prut uvolníme částečně – uvolnění, kdy je prut je právě v prostoru určen.

Částečné uvolnění je uvolnění na úroveň staticky určitého uložení a zavedení deformačních podmínek tak, aby byla zachována deformace shodná s původním staticky neurčitým uložením.

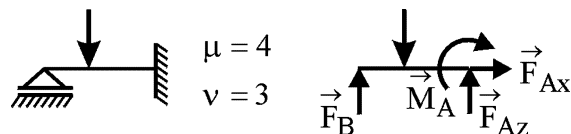
Deformační podmínka je vazbová podmínka v místě uvolněné vazby při částečném uvolnění.



Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

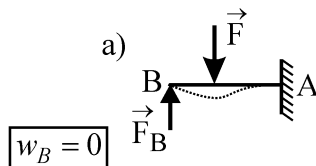
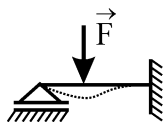
$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$



2. prut uvolníme částečně – uvolnění, kdy je prut je právě v prostoru určen.

Částečné uvolnění je uvolnění na úroveň staticky určitého uložení a zavedení deformačních podmínek tak, aby byla zachována deformace shodná s původním staticky neurčitým uložením.

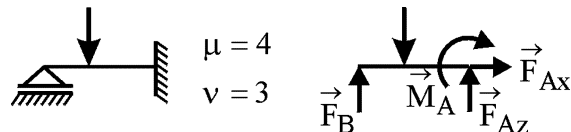
Deformační podmínka je vazbová podmínka v místě uvolněné vazby při částečném uvolnění.



Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

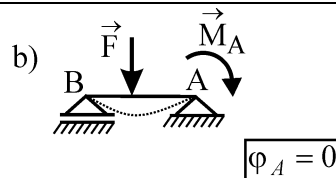
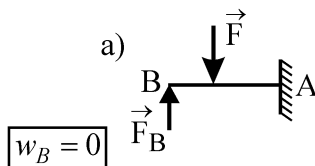
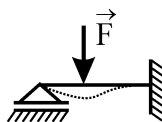
$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$



2. prut uvolníme částečně – uvolnění, kdy je prut je právě v prostoru určen.

Částečné uvolnění je uvolnění na úroveň staticky určitého uložení a zavedení deformačních podmínek tak, aby byla zachována deformace shodná s původním staticky neurčitým uložením.

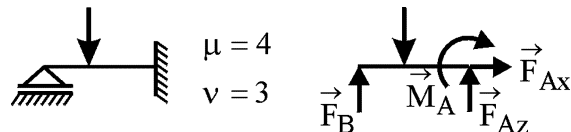
Deformační podmínka je vazbová podmínka v místě uvolněné vazby při částečném uvolnění.



Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

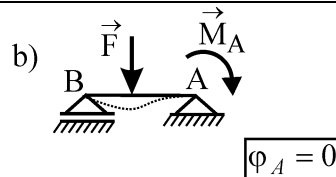
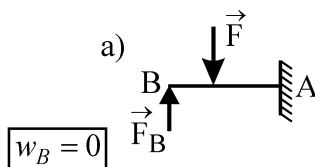
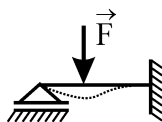
$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$



2. prut uvolníme částečně – uvolnění, kdy je prut je právě v prostoru určen.

Částečné uvolnění je uvolnění na úroveň staticky určitého uložení a zavedení deformačních podmínek tak, aby byla zachována deformace shodná s původním staticky neurčitým uložením.

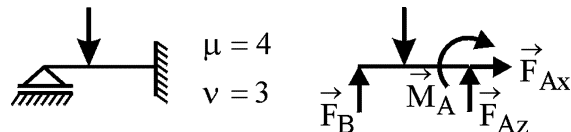
Deformační podmínka je vazbová podmínka v místě uvolněné vazby při částečném uvolnění.



Otevřené pruty vázané staticky neurčitě

1. prut uvolníme úplně a sestavíme použitelné podmínky SR:

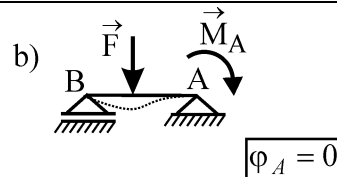
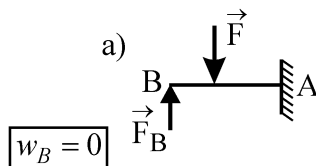
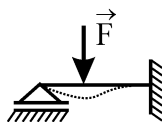
$$\sum F_x = 0 : \quad \sum F_z = 0 : \quad \sum M_A = 0 :$$



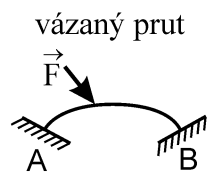
2. prut uvolníme částečně – uvolnění, kdy je prut je právě v prostoru určen.

Částečné uvolnění je uvolnění na úroveň staticky určitého uložení a zavedení deformačních podmínek tak, aby byla zachována deformace shodná s původním staticky neurčitým uložením.

Deformační podmínka je vazbová podmínka v místě uvolněné vazby při částečném uvolnění.



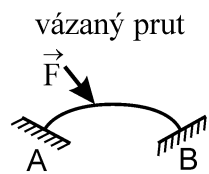
Deformační podmínky mohou být homogenní, nehomogenní, podmíněné.



$$\begin{aligned}v &= 3 \\ \mu &= 6 \\ s &= 3\end{aligned}$$

ČU

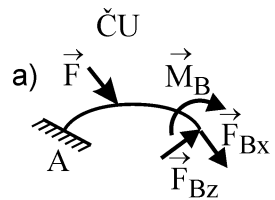
deformační podmínky



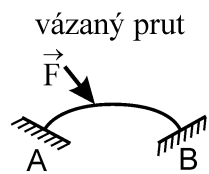
$$v = 3$$

$$\mu = 6$$

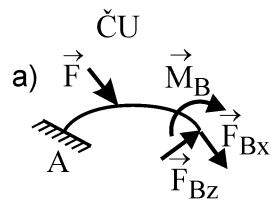
$$s = 3$$



deformační podmínky

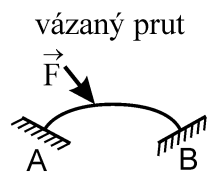


$$\begin{aligned} \nu &= 3 \\ \mu &= 6 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

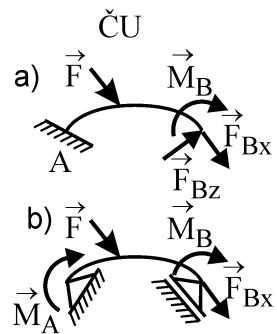


deformační podmínky

$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ w_B &= 0 \\ \varphi_B &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

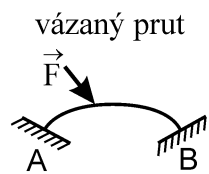


$$\begin{aligned} v &= 3 \\ \mu &= 6 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

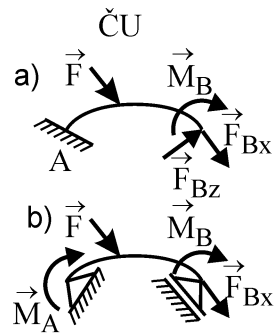


deformační podmínky

$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ w_B &= 0 \\ \varphi_B &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$



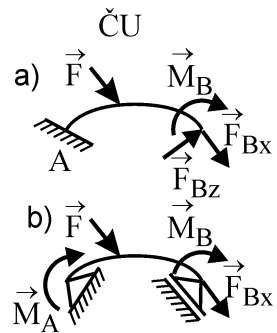
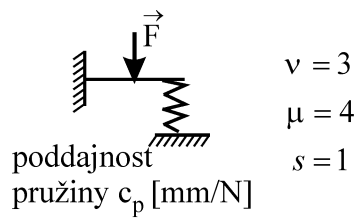
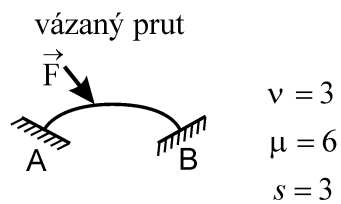
$$\begin{aligned} \nu &= 3 \\ \mu &= 6 \\ s &= 3 \end{aligned}$$



deformační podmínky

$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ w_B &= 0 \\ \varphi_B &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

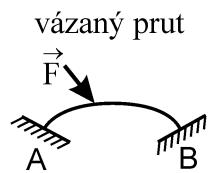
$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ \varphi_B &= 0 \\ \varphi_A &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$



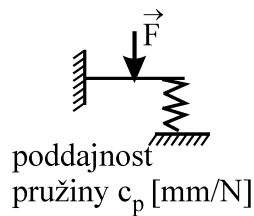
deformační podmínky

$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ w_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

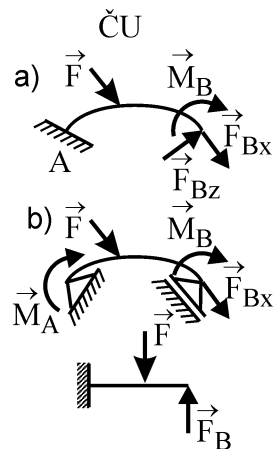
$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$



$$\begin{aligned} \nu &= 3 \\ \mu &= 6 \\ s &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \nu &= 3 \\ \mu &= 4 \\ s &= 1 \end{aligned}$$

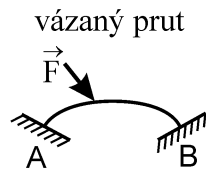


deformační podmínky

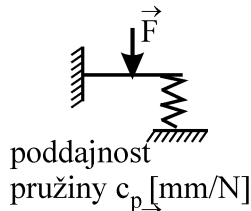
$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ w_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

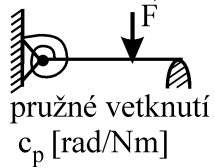
$$w_B = c_p F_B \quad \text{nehomogenní} \\ \text{silově závislá}$$



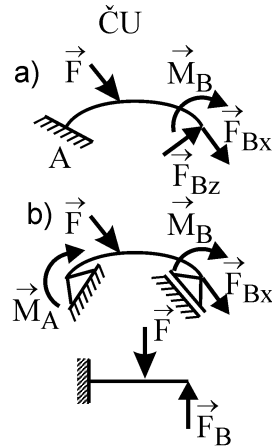
$$\begin{aligned} v &= 3 \\ \mu &= 6 \\ s &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v &= 3 \\ \mu &= 4 \\ s &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v &= 3 \\ \mu &= 4 \\ s &= 1 \end{aligned}$$

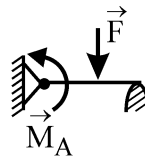


deformační podmínky

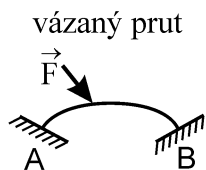
$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ w_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

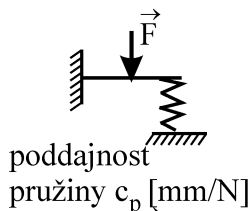
$$w_B = c_p F_B \quad \text{nehomogenní} \\ \text{silově závislá}$$



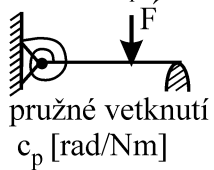
$$\phi_A = c_p M_A \quad \text{nehomogenní} \\ \text{silově závislá}$$



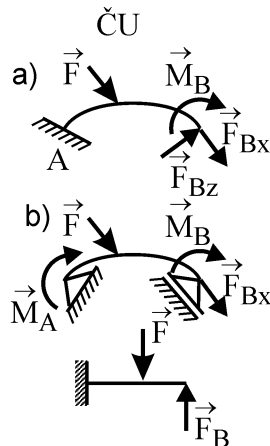
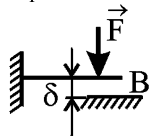
$$\begin{aligned} v &= 3 \\ \mu &= 6 \\ s &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v &= 3 \\ \mu &= 4 \\ s &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v &= 3 \\ \mu &= 4 \\ s &= 1 \end{aligned}$$

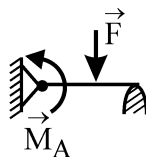


deformační podmínky

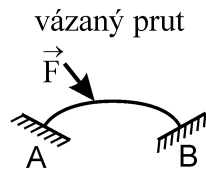
$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ w_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

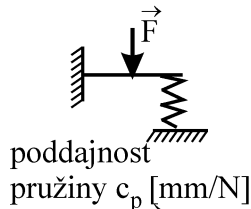
$$w_B = c_p F_B \quad \text{nehomogenní} \\ \text{silově závislá}$$



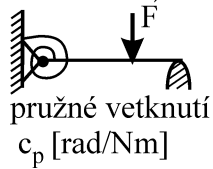
$$\phi_A = c_p M_A \quad \text{nehomogenní} \\ \text{silově závislá}$$



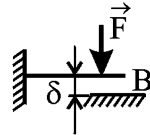
$$\begin{aligned} \nu &= 3 \\ \mu &= 6 \\ s &= 3 \end{aligned}$$



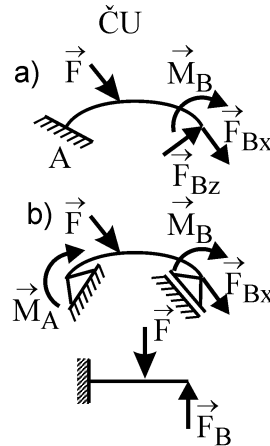
$$\begin{aligned} \nu &= 3 \\ \mu &= 4 \\ s &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \nu &= 3 \\ \mu &= 4 \\ s &= 1 \end{aligned}$$



a) pro $w_B \leq \delta$
 $\nu = 3, \mu = 3, s = 0$

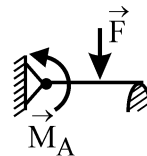


deformační podmínky

$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ w_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

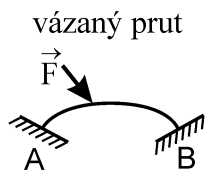
$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

$$w_B = c_p F_B \text{ nehomogenní} \\ \text{silově závislá}$$

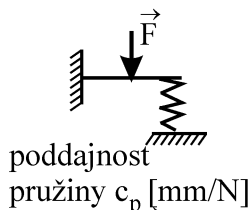


$$\phi_A = c_p M_A \text{ nehomogenní} \\ \text{silově závislá}$$

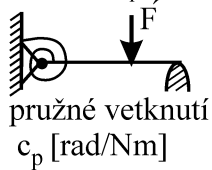
podmíněně staticky určité



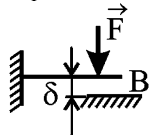
$$\begin{aligned} v &= 3 \\ \mu &= 6 \\ s &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v &= 3 \\ \mu &= 4 \\ s &= 1 \end{aligned}$$

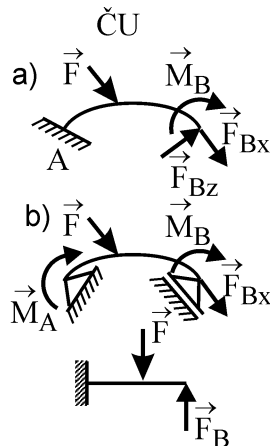


$$\begin{aligned} v &= 3 \\ \mu &= 4 \\ s &= 1 \end{aligned}$$



a) pro $w_B \leq \delta$
 $v=3, \mu=3, s=0$

b) pro $w_B > \delta$
 $v=3, \mu=4, s=1$



deformační podmínky

$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ w_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

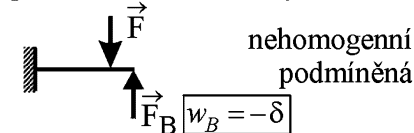
$$\left. \begin{aligned} u_B &= 0 \\ \phi_B &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \right\} \text{homogenní}$$

$$w_B = c_p F_B \text{ nehomogenní silově závislá}$$

$$\phi_A = c_p M_A \text{ nehomogenní silově závislá}$$

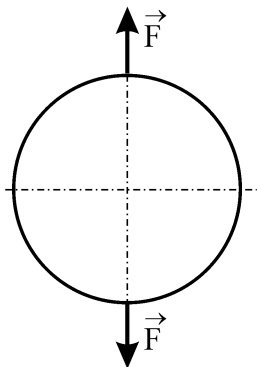
podmíněně staticky určité

podmíněně 1x staticky neurčité



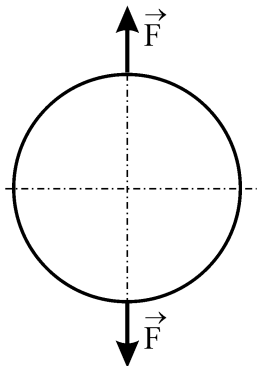
6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

a) volné



6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

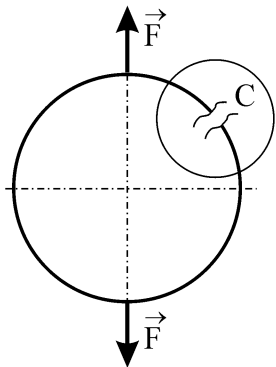
a) volné



$$\nu = 0$$

6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

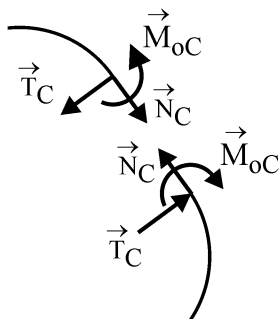
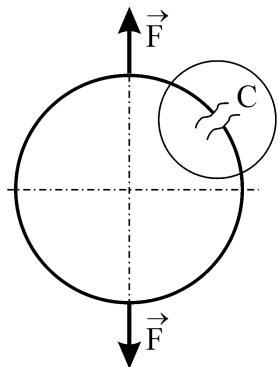
a) volné



$$\nu = 0$$

6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

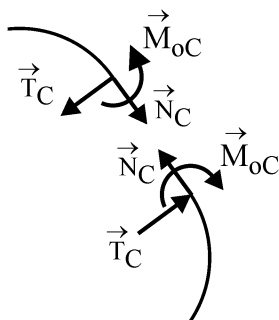
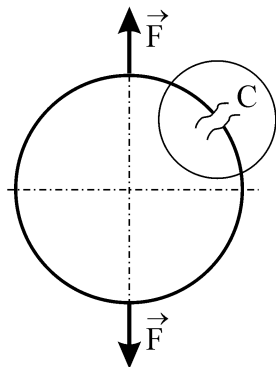
a) volné



$$\nu = 0$$

6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

a) volné

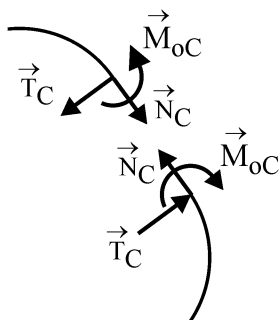
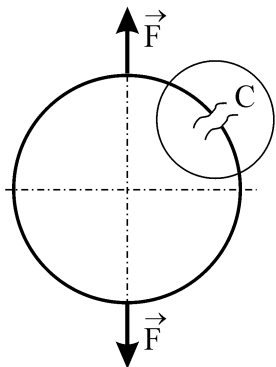


$$\nu = 0$$

$$NP = \{N_C, T_C, M_{oC}\}$$

6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

a) volné



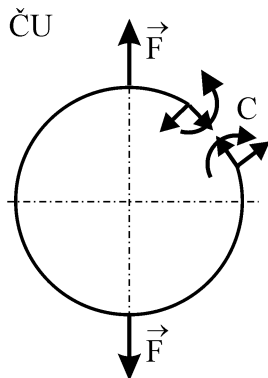
$$\nu = 0$$

$$NP = \{N_C, T_C, M_{oC}\}$$

$$\mu = 3 \rightarrow s = \mu - \nu = 3$$

6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

a) volné



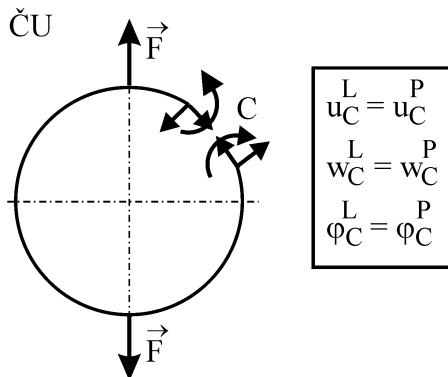
$$\nu = 0$$

$$NP = \{N_C, T_C, M_{oC}\}$$

$$\mu = 3 \quad \rightarrow \quad s = \mu - \nu = 3$$

6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

a) volné



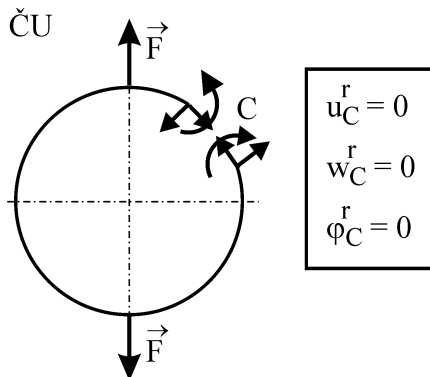
$$\nu = 0$$

$$NP = \{N_C, T_C, M_{oC}\}$$

$$\mu = 3 \quad \rightarrow \quad s = \mu - \nu = 3$$

6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

a) volné



$$\nu = 0$$

$$NP = \{N_C, T_C, M_{oC}\}$$

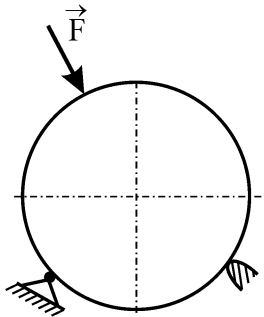
$$\mu = 3 \rightarrow s = \mu - \nu = 3$$

deformační podmínka:

spojitost a hladkost střednice prutu

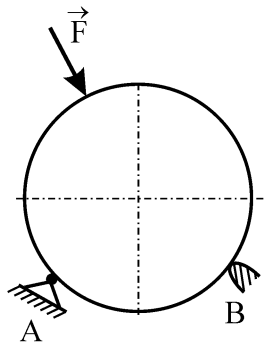
6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

b) vázané



6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

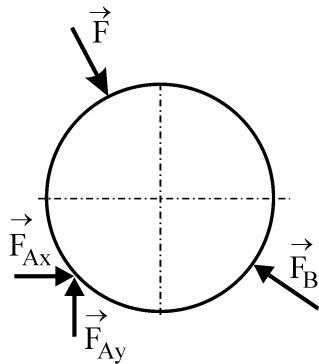
b) vázané



$$s = 0$$

6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

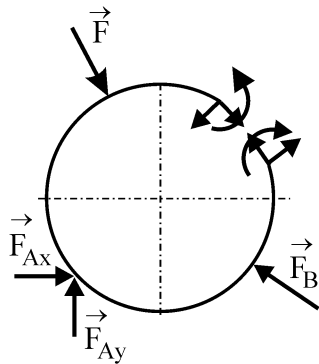
b) vázané



$$\begin{aligned} s &= 0 & \rightarrow & \quad SR : F_{Ax}, F_{Ay}, F_B \\ s_i &= 3 \end{aligned}$$

6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

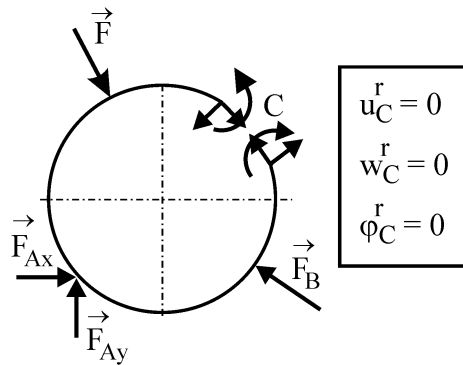
b) vázané



$$\begin{aligned} s &= 0 & \rightarrow & \quad SR : F_{Ax}, F_{Ay}, F_B \\ s_i &= 3 \end{aligned}$$

6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

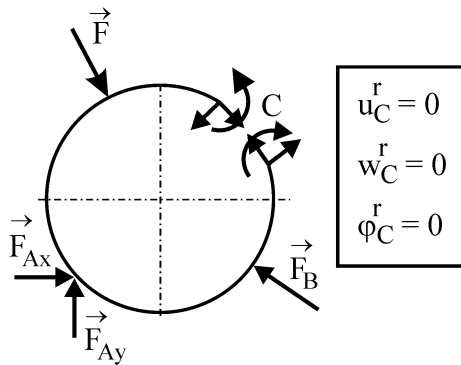
b) vázané



$$\begin{aligned} s &= 0 & \rightarrow & \quad SR : F_{Ax}, F_{Ay}, F_B \\ s_i &= 3 \end{aligned}$$

6.3.2. Uzavřené pruty (rámy)

b) vázané



$$s = 0 \rightarrow SR : F_{Ax}, F_{Ay}, F_B$$

$$s_i = 3$$

podmínky spojitosti a hladkosti střednice