



Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Některé základní úlohy teorie lomové mechaniky

Tomáš Profant



Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky



É. Goursat

1884

Démonstration du théorème de Cauchy.



Sergej. A. Čaplygin

1907

Napjatost v okolí eliptického otvoru.



Gury. V. Kolosov

1909

Zavedení komplexních potenciálů $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ do matematické teorie rovinné pružnosti.



L. Euler

1707-1783

Leonhard Euler (1707-1783)
dokázal

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (1)$$

Začíná se používat *komplexní
rovina*.

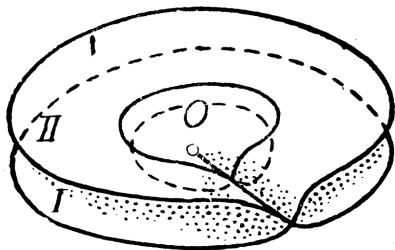
$$z_i^\delta =$$

$$= r^\delta \sqrt{[(\cos \theta + \Re \{\mu_i\} \sin \theta)^2 + (\Im \{\mu_i\} \sin \theta)^2]}^\delta \times \\ \times \exp \left(i\delta \arctan \left(\frac{\Im \{\mu_i\} \sin \theta}{\cos \theta + \Re \{\mu_i\} \sin \theta} \right) \right).$$

Funkce

$$w = z^2 \quad (2)$$

je jednomačná pro body s $y > 0$
nebo $y < 0$, tj.



$$\pi k < \varphi < \pi(k+1), \\ (k = 0, 1)$$

kde φ je polární souřadnice bodu
 z . Inverzní funkce

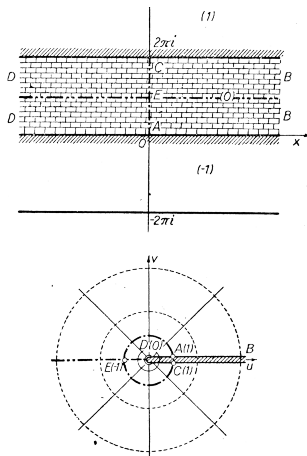
$$w = \sqrt{z} \quad (3)$$

Riemannova plocha funkce $w = z^2$
s body větvení druhého řádu
 $w = 0$ a $w = \infty$.

představuje tzv. *mnohoznačnou analytickou funkci*.



Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky



Zobrazení pásů $-\infty < x < \infty$,
 $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ pro
 $k = 0, \pm 1, \dots$ funkcí $w = e^z$.

Exponenciální funkce

$$w = e^z \quad (4)$$

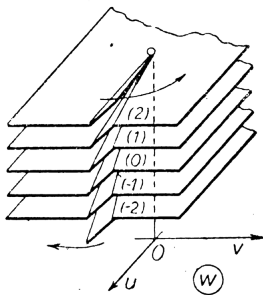
je jednoznačná pro body

$$-\infty < x < \infty,$$

Logaritmická funkce

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \quad (5)$$

je *nekonečně mnohoznačná* a zobrazuje Riemannovu plochu funkce $z = e^w$ na rovinu w .



Riemannova plocha funkce $w = e^z$
s body větvení $w = 0$ a $w = \infty$.

Rovinné vektorové pole

- *Rychlostní pole proudění kapaliny*

- rovinné pole bodového zdroje (zřídla)

$$\mathbf{V} = \frac{Q}{2\pi} \frac{z}{|z|^2},$$

- rovinné výřivé pole

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma i}{2\pi} \frac{z}{|z|^2}.$$

- *Intenzita rovinného pole bodového náboje*

$$\mathbf{E} = \frac{2qz}{|z|^2}.$$

Komplexní potenciál v elektrostatičce

V jednoduše souvislé oblasti vyhovují *potenciál* elektrostatičceho pole $V(x, y)$, pro který platí

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad (6)$$

a *silová funkce* $U(x, y)$ elektrostatičceho pole, pro kterou platí

$$E_x = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (7)$$

tzv. *Cauchy-Riemannovým podmínkám* (rovnícím), čímž splňují *podmínku regularity* a umožňují jejich zápis ve formě *komplexního potenciálu* elektrostatičceho pole,

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y). \quad (8)$$

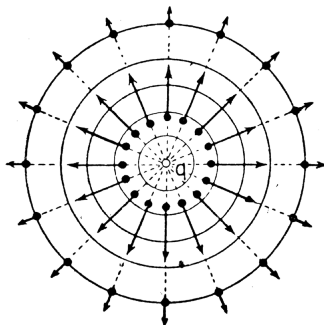
Komplexní potenciál v elektrostati

Znalost *komplexního potenciálu* dovoluje vyjádření všech základních veličin spojených s pojmem pole. Např. pro vektor intenzity elektrostatičkého pole platí

$$\mathbf{E} = E_x + iE_y = -i\overline{F'(z)}. \quad (9)$$

Pomocí komplexního potenciálu $F(z)$ lze sestavit jeho silové a ekvipotenciální čáry elektrostatičkého pole.

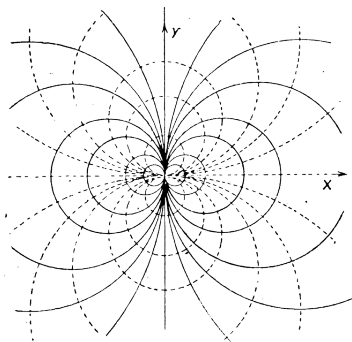
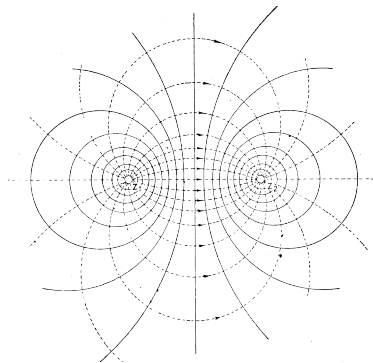
Komplexní potenciál v elektrostatičce - *pole bodového náboje*



Pro komplexní potenciál bodového náboje velikosti q platí

$$F(z) = 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{z}. \quad (10)$$

Komplexní potenciál v elektrostatice - *pole dvou bodových nábojů a pole dipólu*



Pro komplexní potenciál dvou bodových nábojů q a momentu dipólu p platí

$$F(z) = 2qi \operatorname{Ln} \frac{z - z_2}{z - z_1}, \quad F(z) = 2pi \frac{1}{z}. \quad (11)$$

Komplexní potenciál v hydromechanice

Pro oblast D , ve které nejsou ani zřídla ani víry při stacionárním proudění, platí pro *potenciál* φ vyjadřující *cirkulaci vektoru rychlosti* Γ podél uzavřené křivky C ,

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \Gamma = \oint_C d\varphi(x, y). \quad (12)$$

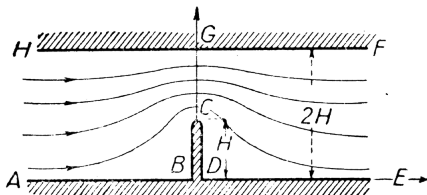
Trajektorie pohybujících se částic jsou dány *proudovou funkcí* ψ definující také *tok* Q ,

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad Q = \oint_C d\psi(x, y). \quad (13)$$

Pro *komplexní potenciál* proudění pak platí,

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (14)$$

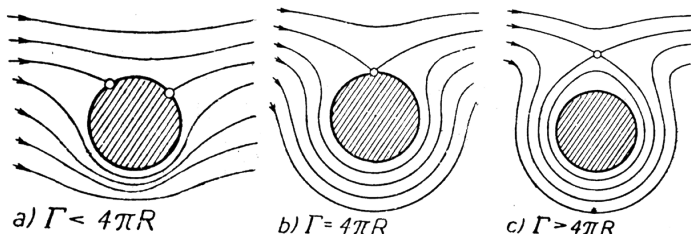
Komplexní potenciál v hydromechanice - *proudění ideální kapaliny v přímé trubici*



Pro zadaný potenciální spád Q platí

$$\Phi(z) = \frac{2Q}{\pi} \text{Ln} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi z}{4H} + \sqrt{\cosh \frac{\pi z}{2H}} \right). \quad (15)$$

Komplexní potenciál v hydromechanice - *úloha o úplném obtékání*



Proudění ideální kapaliny kolem kružnice $|z| = R$ rychlostí $V_\infty = 1$ je dáno komplexním potenciálem

$$\Phi(z) = z + \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z. \quad (16)$$

Harmonické funkce

Reálná a imaginární část regulární funkce komplexní proměnné

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (17)$$

v nějaké oblasti jsou *harmonické funkce* v této oblasti, tj. vyhovují parciálním diferenciálním rovnicím druhého řádu

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0. \quad (18)$$

Tyto funkce se také nazývají sdružené, protože jsou svázané tzv. Cauchy-Riemannovými rovnicemi

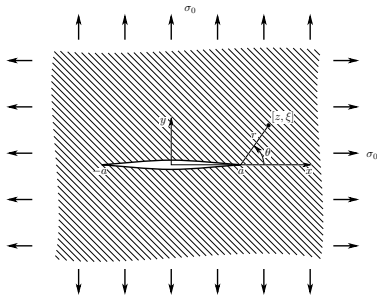
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (19)$$



1888-1950

Harald M. Westergaard popsal pomocí komplexního potenciálu řešení případu trhliny v homogenním poli napětí (1937).

Harald. M. Westergaard



Řešení Westergaarda

Funkce napětí $\psi(z)$ má tvar

$$\psi(z) = \frac{\sigma_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (20)$$

přičemž pro napětí platí

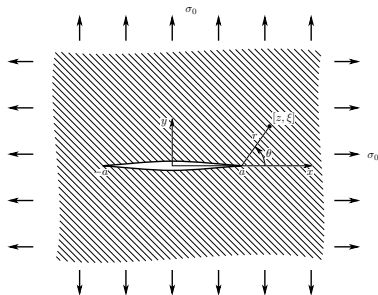
$$\sigma_{xx} = \Re\{\psi(z)\} - y\Im\{\psi'(z)\},$$

$$\sigma_{yy} = \Re\{\psi(z)\} + y\Im\{\psi'(z)\},$$

$$\sigma_{xy} = -y\Re\{\psi'(z)\}.$$

Řešení Westergaarda

Před čelem trhliny platí



$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right),$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right),$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}.$$



Niko I. Muschelišvili

1891-1976

Kolosovův žák, formuloval
matematickou teorii rovinné
izotropní pružnosti (1953) pomocí
dvou komplexních potenciálů,
Goursatových funkcí, $\varphi(z)$ a $\psi(z)$.

Komplexní vyjádření biharmonické funkce

Každá biharmonická funkce $W(x, y)$ (tj. integrál biharmonické rovnice) může být vyjádřen pomocí dvou analytických funkcí komplexní proměnné $z = x + iy$. Vyjádření biharmonické funkce pomocí analytických funkcí komplexní proměnné $\varphi(z)$ a $\chi(z)$ je dáno tzv. *Goursatovou formulí*,

$$W(x, y) = \Re \{ \bar{z}\varphi(z) + \chi(z) \}. \quad (21)$$

Funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z) = \chi'(z)$ se nazývají *Goursatovými funkcemi*, příp. *Muschelišviliho komplexními potenciály*.

Komplexní vyjádření biharmonické funkce

Z Goursatovy formule se lehce dostanou další dvě formule, které v definitivním tvaru vyjádřil N. I. Muschelišvili,

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i \frac{\partial W}{\partial y} = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (22)$$

$$2\mu (u_x + i u_y) = \kappa \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (23)$$

kde

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \quad (24)$$

je tzv. *Kolosovova konstanta*, λ a μ jsou Lamého konstanty.

Komplexní vyjádření biharmonické funkce

Muschelišviliho komplexní potenciály se váží na složky tenzoru napětí podle vztahů,

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\Re \{ \varphi'(z) \}, \quad (25)$$

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\sigma_{xy} = 2 [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]. \quad (26)$$

Tyto vztahy dovolují převést základní problémy teorie rovinné pružnosti na okrajové úlohy teorie analytických funkcí.

Komplexní vyjádření biharmonické funkce

První hraniční problém,

$$\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu(g_1 + ig_2), \quad (27)$$

druhý hraniční problém,

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1 + if_2 + b, \quad b = konst., \quad (28)$$

kde

$$f_1 + if_2 = i \int_{s_0}^s (t_x + it_y) ds, \quad (29)$$

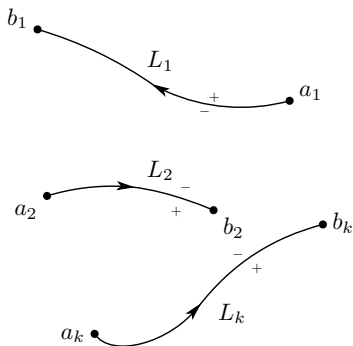
t_x a t_y jsou složky vektoru napětí působící podél hranice L v bodě $z = z(s)$. Konstantu b je nutné zvolit tak, aby posunutí byla jednoznačná.

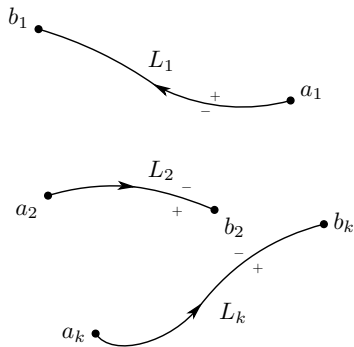
Hilbertův problém

Hilbertův problém formuluje úlohu o nalezení funkce $F(z)$ jejíž limitní hodnoty vyhovují rovnici

$$F^+(s) - gF^-(s) = f(s), \quad (30)$$

kde g je obecně komplexní konstanta a s je bod na oblouku L , který může být tvořen konečným počtem oblouků L_k , kde $k = 1, \dots, n$. Bod s v rovnici (30) nenabývá žádného z koncových bodů oblouku L .





Hilbertův problém

Daná komplexní funkce $f(s)$ splňuje tzv. *Hölderovu podmínku* na L , tj. pro libovolné dva body s_1 a s_2 křivky L platí

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq c |s_1 - s_2|^\gamma,$$

kde c a γ jsou kladné konstanty, přičemž $0 < \gamma \leq 1$.

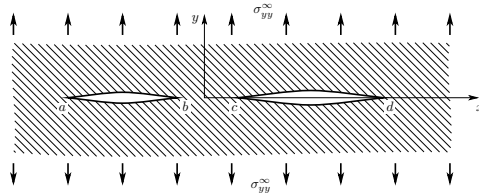
Hilbertův problém

Řešení Hilbertova problému popsal Muschelišvili a pro $g \neq 1$ se může psát ve tvaru

$$F(z) = \frac{\chi_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(s)ds}{\chi_0^+(s)(s-z)} + \chi_0(z)p_n(z), \quad (31)$$

kde $p_n(z)$ je polynom stupně n . Funkce $\chi_0(z)$ je tzv. *Plemeljova funkce* mající tvar

$$\chi_0(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{-\delta} (z - b_j)^{\delta-1}, \quad \delta = \frac{1}{2} \ln g. \quad (32)$$

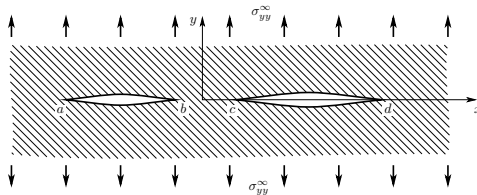


Hilbertův problém

Napětí na ose x může být popsáno integrálem

$$\sigma_{yy} = \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{x - \xi} + \sigma_{yy}^{\infty}, \quad (33)$$

kde $f(x)$ je neznámá funkce, kterou je třeba určit na základě okrajových podmínek.



Hilbertův problém

Z podmínky, že $\sigma_{yy} = 0$ na lícech trhlin, se dostane

$$\int_L \frac{f(\xi) d\xi}{x - \xi} = -\sigma_{yy}^\infty \quad \text{pro } x \in L, \quad (34)$$

$$f(x) = 0 \quad \text{pro } x \notin L. \quad (35)$$

Hilbertův problém

Rozšířením původního integrálu do komplexní roviny funkcí

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_1(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad (36)$$

se dostane následující Hilbertův problém

$$F_+(x) + F_-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f_1(\xi) d\xi}{\xi - x} = 2\sigma_{yy}^\infty \quad \text{pro } x \in L, \quad (37)$$

$$F_+(x) - F_-(x) = f_1(x) = 0 \quad \text{pro } x \notin L. \quad (38)$$

Hilbertův problém

Řešení tohoto Hilbertova problému se může psát ve tvaru

$$f(x) = -\frac{\chi_0(x)}{2\pi i} \int_L \frac{\sigma_{yy}^\infty d\xi}{\chi_0^+(\xi) (\xi - x)} + \chi_0(x) p_1(x) \quad \text{pro } x \in L, \quad (39)$$

kde

$$\chi_0(z) = [(z - a)(z - b)(z - c)(z - d)]^{\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

Pro napětí před čelem trhlin a faktor intenzity napětí platí

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{x - \xi} + \sigma_{yy}^\infty, \quad (41)$$

$$K_I^{a,b,c,d} = \lim_{x \rightarrow a^-, b^+, c^-, d^+} \left[\sqrt{2\pi (x - b)} \sigma_{yy}(x, 0) \right]. \quad (42)$$



Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

.!!!!.
 .?????????
 ??????????
 !?????????
 ??????????
 !?????????
 .?????????
 .?????????
 ??????????????????
 ??????????????????
 ??????????????????

S. G. Lechnickij

19??-19??

Sergej G. Lechnickij zobecnil Muschelišviliho formalismus na případ *anizotropních materiálů* (1950,1957).



Alan N. Stroh

1926-1962

Alan N. Stroh byl studentem J. D. Eshelbyho. Podobně jako Lechnitskij položil základ matematického formalismu pro popis rovinné pružnosti anizotropních materiálů

Lechnického - Eshelbyho - Strohův (L.E.S.) formalismus

V L.E.S. formalismu je materiál charakterizován šesti charakteristickými (vlastními) čísly p_i , která jsou řešením problému vlastních čísel soustavy algebraických rovnic

$$\{ \mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2 \mathbf{T} \} \mathbf{a} = 0, \quad (43)$$

kde $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ a $\mathbf{T}$ jsou matice 3×3 , jejichž prvky závisí na elastických koeficientech

$$Q_{ik} = C_{i1k1}, \quad R_{ik} = C_{i1k2}, \quad T_{ik} = C_{i2k2}. \quad (44)$$

Z energetických úvah vyplývá, že p_i ($i = 1, \dots, 6$) jsou komplexní a jelikož soustava (43) je reálná, jsou tato čísla navzájem komplexně sdružená.

L.E.S. formalismus

Napětí a posuvy lze vyjádřit pomocí komplexních potenciálů $f_i(z_i)$, kde $z_i = x + p_i y$ ($i = 1, 2, 3$). Zavedením tzv. *funkce napětí* $\phi = [\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]^T$ tak, že

$$\sigma_{ix} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \quad \sigma_{iy} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (45)$$

se vektor posuvů u_i a vektoru funkce napětí dá vyjádřit jako

$$\mathbf{u} = 2\Re \{ \mathbf{A} \langle f(z_*) \rangle \mathbf{q} \}, \quad \phi = 2\Re \{ \mathbf{B} \langle f(z_*) \rangle \mathbf{q} \}. \quad (46)$$

A_{ij} , B_{ij} a $\langle f(z_*) \rangle$ jsou 3×3 komplexní matice definovány jako

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3], \quad \langle f(z_*) \rangle = \text{diag} [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3)].$$

L.E.S. - anizotropní materiál

- vlastní čísla a vektory materiálu

$$p_1 \neq p_2 \neq p_3$$

$$\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{a}_3$$

- matice komplexních potenciálů

$$\begin{bmatrix} f_1(z_1) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(z_2) & 0 \\ 0 & 0 & f_3(z_3) \end{bmatrix}$$

L.E.S. - izotropní materiál

- vlastní čísla a vektory materiálu

$$p_1 = p_2 = p_3 = i$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{a}_3$$

- matice komplexních potenciálů

$$\begin{bmatrix} f_1(z_1) & df_1(z_1)/dp_1 & 0 \\ 0 & f_1(z_1) & 0 \\ 0 & 0 & f_3(z_3) \end{bmatrix}$$

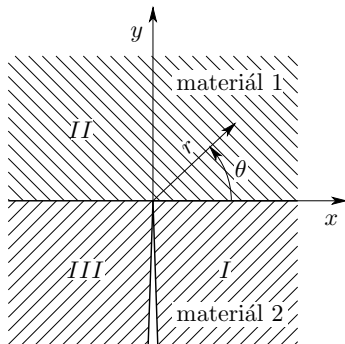


T. C. T. Ting



Chyanbin Hwu

Vzhledem k předčasnému Strohovu úmrtí nebyla teorie, jíž položil základy, ucelena a řádně publikována. Thomas C. T. Ting (1996) a později také jeho student Chyanbin Hwu (2010) ji shrnuly, doplnili a knižně publikovali.



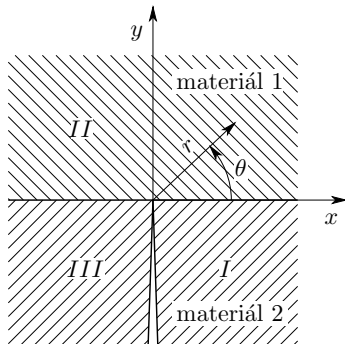
Trhlina kolmá na rozhraní

Potenciály $f_j(z_j)$ jsou v tomto případě hledány ve tvaru

$$f_j^J(z_j^J) = v_j^J (z_j^J)^\delta, \quad (47)$$

kde $j = 1, 2, 3$, $J = I, II, III$ a v_j^J jsou neznámé komplexní vektory, $\delta - 1$ je neznámý (obecně komplexní) exponent singularity napětí.

Trhlina kolmá na rozhraní



Vektory v_j^J a exponent singularity $\delta - 1$ se určí z následujících okrajových podmínek pro $\mathbf{u}$ a ϕ , ($i = 1, 2, 3$)

$$\varphi_i = 0 \quad \text{pro } \theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2},$$

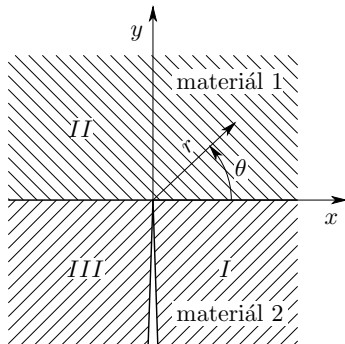
$$u_i^I = u_i^{II} \quad \text{pro } \theta = 0,$$

$$\varphi_i^I = \varphi_i^{II} \quad \text{pro } \theta = 0,$$

$$u_i^{II} = u_i^{III} \quad \text{pro } \theta = \pi,$$

$$\varphi_i^{II} = \varphi_i^{III} \quad \text{pro } \theta = \pi.$$

Trhlina kolmá na rozhraní



Splnění výše uvedených okrajových podmínek vede na problém hledání vlastních čísel a vektorů homogenního systému algebraických rovnic

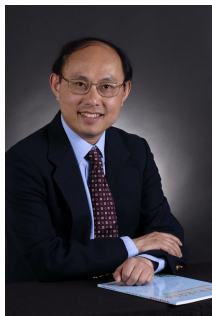
$$\mathbf{K}(\delta) \mathbf{v} = 0, \quad (48)$$

který vede na řešení nelineární rovnice vzhledem k neznámému δ ,

$$\det(\mathbf{K}(\delta)) = 0. \quad (49)$$



Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky



Zhigang Suo



Greenova funkce, Dirichletův problém

Dirichletův problém, nebo-li *prvý hraniční problém* harmonických funkcí, spočívá v konstrukci funkce $u(z)$, která je

1. harmonická v nějaké oblasti D ,
2. spojitá v uzavřené oblasti $\overline{D}$,
3. na hranici C oblasti D nabývá daných hodnot

$$u(\xi) = \tilde{u}(\xi). \quad (50)$$