



Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Koncentrátory napětí v blízkosti bimateriálových rozhraní

Tomáš Profant



Úvod

- Použití dostupných matematických prostředků lineární lomové mechaniky (faktor intenzity napětí, T -napětí) k popisu chování trhlin v kompozitních materiálech tvořených křehkou maticí.
- Aplikace vhodných matematických modelů trhlin v interakci s různými typy prostředí, jako jsou např. další trhliny, volné povrchy, rozhraní nebo částice druhé fáze.
- Využití a kombinování předností analytického a numerického modelování trhlin.



Vyjádření napětí a posuvů pomocí komplexních potenciálů

Izotropní materiál - Muschelišviliho komplexní potenciály

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\Re\{\varphi'(z)\},$$

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)],$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},$$

kde

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$$

je tzv. *Kolosovova konstanta*, λ a μ jsou Lamého konstanty.

Vyjádření napětí a posuvů pomocí komplexních potenciálů

Anizotropní materiál - L.E.S. formalismus

$$\sigma_{ix} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \quad \sigma_{iy} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

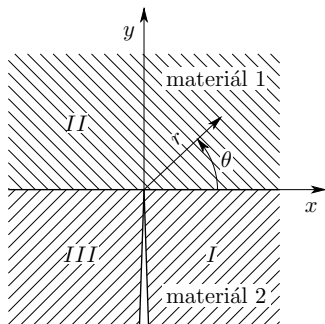
kde $\phi = [\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]^T$ je tzv. *funkce napětí*, která se spolu s vektorem posuvů u_i dá vyjádřit pomocí komplexních potenciálů $f_i(z_i)$ závisejících na $z_i = x + p_i y$ ($i = 1, 2, 3$) takto

$$\mathbf{u} = 2\Re \{ \mathbf{A} \langle f(z_*) \rangle \mathbf{q} \}, \quad \phi = 2\Re \{ \mathbf{B} \langle f(z_*) \rangle \mathbf{q} \}.$$

A_{ij} , B_{ij} a $\langle f(z_*) \rangle$ jsou 3×3 komplexní matice definované jako

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3], \quad \langle f(z_*) \rangle = \text{diag} [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3)].$$

Problém charakteristických čísel trhliny na rozhraní dvou materiálů



$$f_j^J(z_j^J) = \phi_j^J (z_j^J)^\delta,$$

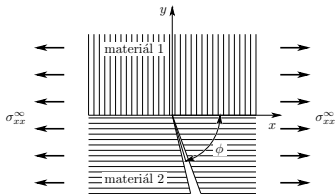
$$(j = 1, 2, J = I, II, III)$$

$$\varphi_j = 0 \quad \text{pro } \theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2},$$

$$u_j^I = u_j^{II}, \varphi_j^I = \varphi_j^{II} \quad \text{pro } \theta = 0,$$

$$u_j^{II} = u_j^{III}, \varphi_j^{II} = \varphi_j^{III} \quad \text{pro } \theta = \pi,$$

$$\mathbf{K}(\delta)\mathbf{v}^I = \mathbf{0}, \quad \det(\mathbf{K}(\delta)) = 0.$$



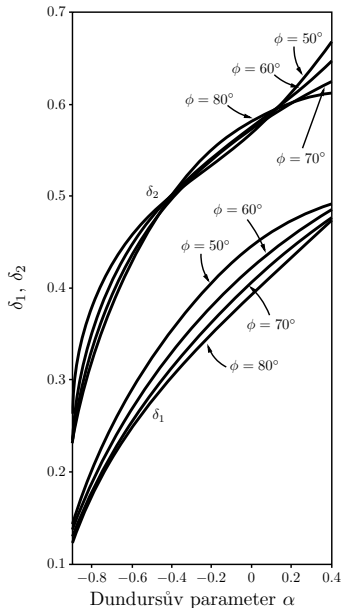
Materiálové charakteristiky:

$$\lambda_1 = s_{11}^{(1)} / s_{22}^{(1)} = 0.1,$$

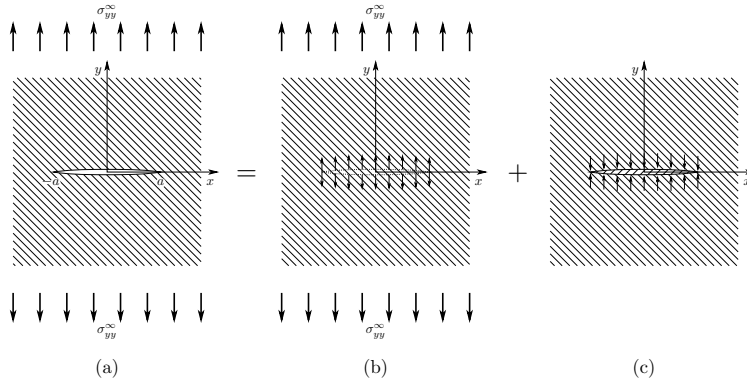
$$\rho_1 = \frac{2s_{12}^{(1)} + s_{66}^{(1)}}{2\sqrt{s_{11}^{(1)} s_{22}^{(1)}}} = 2,$$

$$\lambda_2 = 1, \rho_2 = 1, \beta = 0,$$

$$E_2 = 60\,000 \text{ MPa}, \nu_2 = 0.238.$$

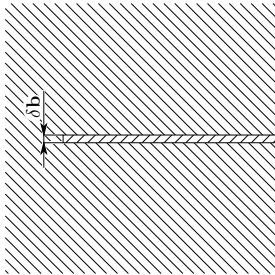


Metoda spojitě rozložených dislokací

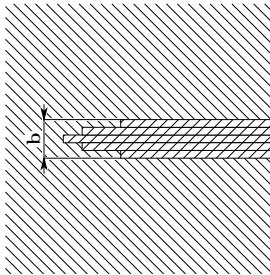


Buecknerův princip rozdělí původní úlohu (a), na úlohu (b) o homogenním neporušeném a v nekonečnu zatíženém prostředí a úlohu (c) o nezatíženém nekonečném prostředí s trhlinou, jejíž líce jsou zatížena tzv. *korekčním napětím*.

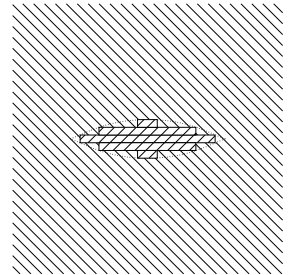
Metoda spojitě rozložených dislokací



(a)

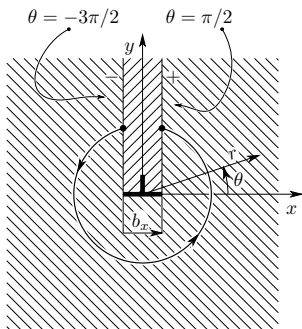


(b)



(c)

Princip modelu trhliny pomocí vkládání a odstraňování tenkých pásů materiálu.



Dislokace jako Greenova funkce

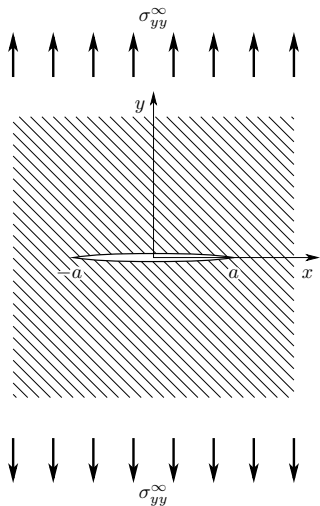
Izotropní materiál

$$\varphi(z) = -i\lambda b \ln(z - z_0),$$

$$\psi(z) = i\lambda \bar{b} \ln(z - z_0) - i\lambda \bar{b} \frac{\bar{z}_0}{z - z_0}.$$

Anizotropní materiál

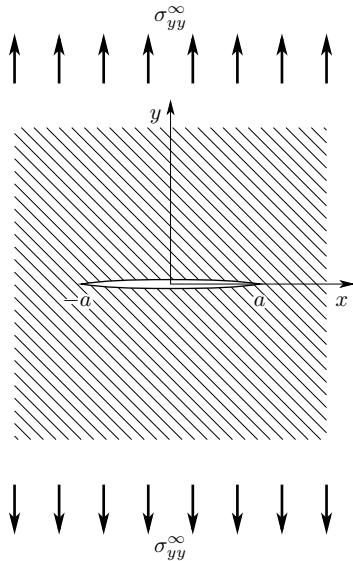
$$f_i(z_i) = q_i \ln(z_i - \xi_i).$$



Integrační rovnice trhliny v homogenním izotropním materiálu

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) = \sigma_{xy}(x, 0) = 0 & \quad |x| < a, \\ \sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{\infty} & \quad x, y \rightarrow \pm\infty, \end{aligned}$$

$$-\frac{\kappa + 1}{2\mu} \sigma_{yy}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a B_y(\xi) \frac{1}{x - \xi} d\xi \quad |x| < a.$$

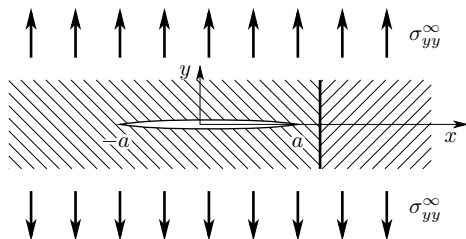


Integrační rovnice trhliny v homogenním izotropním materiálu - vyjádření faktoru intenzity napětí

$$B_y(s) = w(s)g(s), \quad w(s) = (1 - s^2)^{-1/2},$$

$$2x = (b - a)s + (b + a),$$

$$K_I(\pm a) = \pm 2\mu\sqrt{\pi a} (\kappa + 1)^{-1} g(\pm 1)$$

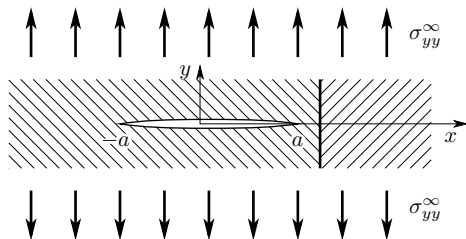


Integrační rovnice trhliny v nehomogenním izotropním materiálu

$$-\frac{\kappa + 1}{2\mu} \sigma_{yy}^{appl.} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a B_y(\xi) \frac{1}{x - \xi} d\xi + \int_{-a}^a B_y(\xi) K_{yy}(x, \xi) d\xi,$$

$$\sigma_{xx} - \frac{\kappa + 1}{2\mu} \sigma_{xx}^{appl.} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a B_y(\xi) \frac{1}{x - \xi} d\xi + \int_{-a}^a B_y(\xi) K_{xx}(x, \xi) d\xi,$$

$$|x| < a.$$

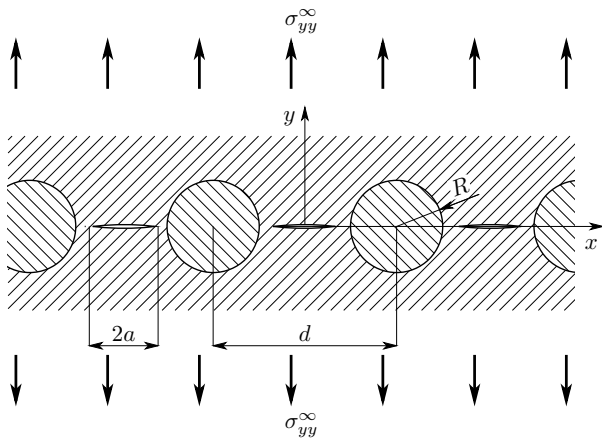


Integrální rovnice trhliny v nehomogenním izotropním materiálu - vyjádření T -napětí

$$\sigma_{xx} = \int_{-a}^a B_y(\xi) [K_{xx}(x, \xi) - K_{yy}(x, \xi)] d\xi + \frac{\kappa + 1}{2\mu} [\sigma_{xx}^{appl.} - \sigma_{yy}^{appl.}], |x| < a,$$

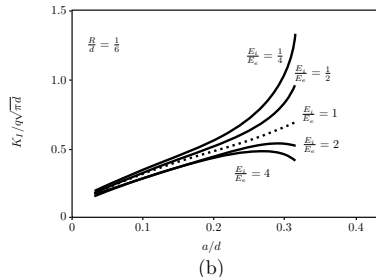
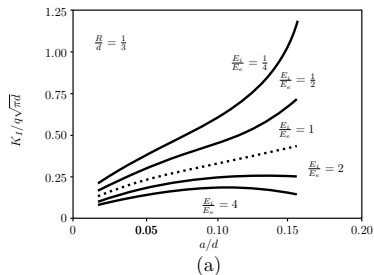
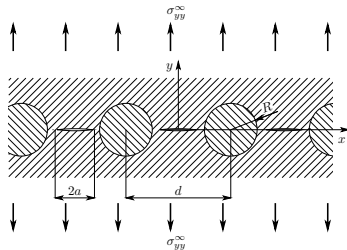
$$T = \lim_{x \rightarrow a^\pm} \sigma_{xx}(x).$$

Příklady aplikace metody spojitě rozložených dislokací

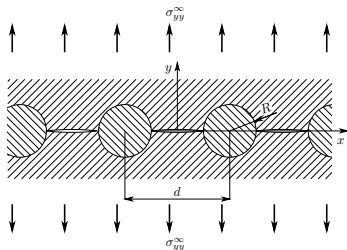


$$K_I = \frac{2\mu_e}{(1 + \kappa_e)} \left[d \tan \left(\frac{\pi a}{d} \right) \right]^{1/2} g(1)$$

Příklady aplikace metody spojitě rozložených dislokací



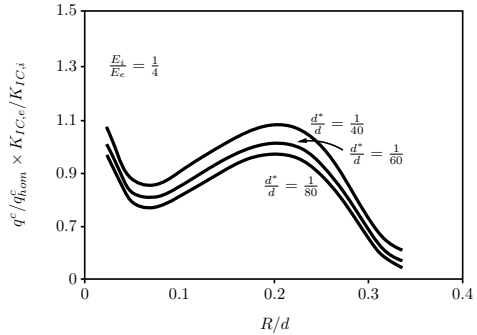
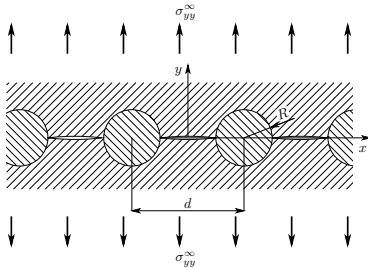
Příklady aplikace metody spojitě rozložených dislokací

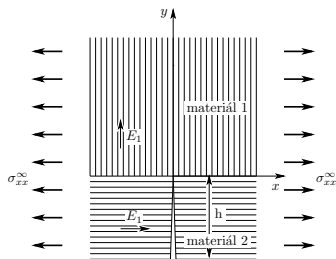


$$H_I = (2\pi)^{1/2-\lambda} \mu^* \left[d \tan \left(\frac{\pi a}{d} \right) \right]^\lambda g(1)$$

$$\mu^* = \frac{2\mu_e(1+\alpha)}{(1+\kappa_e)(1-\beta^2)} \frac{1+2\beta(1-\lambda)}{\sin(\pi\lambda)}$$

Příklady aplikace metody spojitě rozložených dislokací





Příklady aplikace metody spojitě rozložených dislokací

Konečnoprvkové řešení σ_{yy} v tenké vrstvě

Materiálové charakteristiky:

$$h = 4 \text{ mm}, E_1 = 137 \text{ GPa},$$

$$E_2 = E_3 = 10.8 \text{ GPa}, G_{23} = 3.36$$

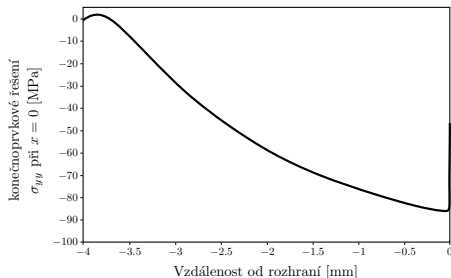
$$\text{GPa}, G_{31} = G_{12} = 5.65 \text{ GPa},$$

$$\nu_{23} = \nu_{32} = 0.49,$$

$$\nu_{31} = \nu_{21} = 0.238,$$

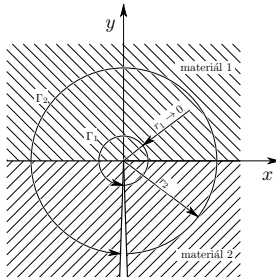
$$\nu_{13} = \nu_{12} = 3.019,$$

$$\sigma_{xx}^{\infty} = 100 \text{ MPa } \delta = 0.3$$



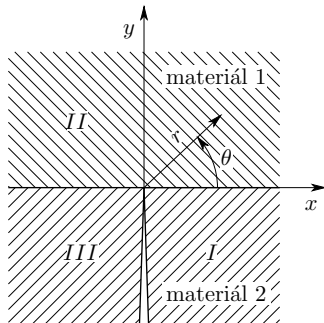
Hodnota T -napětí metodou spojitě rozložených dislokací $T = -48.1 \text{ MPa}$.

Metoda dvoustavových integrálů



$$\Psi(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_{\Gamma} [\sigma_{ij}(\mathbf{U})n_i V_j - \sigma_{ij}(\mathbf{V})n_i U_j] ds.$$

\mathbf{U} , \mathbf{V} jsou různá přípustná pole posuvů a n_i vnější normála k integrační křivce Γ .



Problém charakteristických čísel trhliny na rozhraní dvou materiálů

$$f_j(z_j) = v_j (z_j)^\delta,$$

$$\mathbf{K}(\delta)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \det(\mathbf{K}(\delta)) = 0.$$

$$\Downarrow$$

regulární řešení	pomocné řešení
------------------	----------------

δ, v_j	$-\delta, v_{-1}$
---------------	-------------------



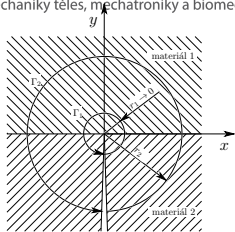
Metoda dvoustavových integrálů

$$U(r, \theta) = H_1 r^{\delta_1} \mathbf{u}_1(\theta) + H_2 r^{\delta_2} \mathbf{u}_2(\theta) + Tr \mathbf{u}_3(\theta) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} k_i r^{\delta_i} \mathbf{u}_i(\theta),$$

$$\mathbf{V}(r, \theta) = r^{\delta-i} \mathbf{u}_{-i}(\theta).$$

Ψ -integrál je *nezávislý* na integrační cestě Γ a dále pro něj platí

$$\Psi \left(r^{\delta_i} u_i(\theta), r^{-\delta_j} u_{-j}(\theta) \right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ \textit{konst.} \neq 0 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

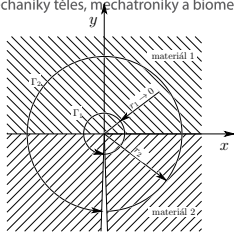


Metoda dvoustavových integrálů - vyjádření faktoru intenzity napětí a T -napětí

$$H_1 = \frac{\Psi \left(\mathbf{U}^{MKP}, r^{-\delta_1} \mathbf{u}_{-1}(\theta) \right)}{\Psi \left(r^{\delta_1} \mathbf{u}_1(\theta), r^{-\delta_1} \mathbf{u}_{-1}(\theta) \right)},$$

$$H_2 = \frac{\Psi \left(\mathbf{U}^{MKP}, r^{-\delta_2} \mathbf{u}_{-2}(\theta) \right)}{\Psi \left(r^{\delta_2} \mathbf{u}_2(\theta), r^{-\delta_2} \mathbf{u}_{-2}(\theta) \right)},$$

$$T = \frac{\Psi \left(\mathbf{U}^{MKP}, r^{-1} \mathbf{u}_{-3}(\theta) \right)}{\Psi \left(r \mathbf{u}_3(\theta), r^{-1} \mathbf{u}_{-3}(\theta) \right)}.$$



Metoda dvoustavových integrálů - vyjádření faktoru intenzity napětí a T -napětí

$$H_1 = \frac{\Psi \left(\mathbf{U}^{MKP}, r^{-\delta_1} \mathbf{u}_{-1}(\theta) \right)}{\Psi \left(r^{\delta_1} \mathbf{u}_1(\theta), r^{-\delta_1} \mathbf{u}_{-1}(\theta) \right)},$$

$$H_2 = \frac{\Psi \left(\mathbf{U}^{MKP}, r^{-\delta_2} \mathbf{u}_{-2}(\theta) \right)}{\Psi \left(r^{\delta_2} \mathbf{u}_2(\theta), r^{-\delta_2} \mathbf{u}_{-2}(\theta) \right)},$$

$$T = \frac{\Psi \left(\mathbf{U}^{MKP}, r^{-1} \mathbf{u}_{-3}(\theta) \right)}{\Psi \left(r \mathbf{u}_3(\theta), r^{-1} \mathbf{u}_{-3}(\theta) \right)}.$$