INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRUŽNOST A PEVNOST I

Učební text

Prof. RNDr. Ing. Jan Vrbka, DrSc.

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Fakulta strojního inženýrsví VUT v Brně

Brno, 2012

Tato publikace vznikla jako součást projektu CZ.1.07/2.2.00/07.0406 ”Zavedení problémově orientovaného vzdělávání do studijních plánů strojního inženýrství”, který je spolufinancován evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Obsah

PRUŽNOST A PEVNOST I

1 DEFINICE, LITERATURA, NÁVAZNOSTI

Pružnost a pevnost (PP) se zabývá určováním deformace, napjatosti a porušováním celistvosti tělesa v závislosti na vnějším zatížení. Součástí PP je rovněž formulace tzv. mezních stavů a stanovení bezpečnosti a spolehlivosti.

Doporučená literatura:

Janíček, Ondráček, Vrbka, Burša: Mechanika těles, Pružnost a pevnost I, CERM, 2004

Burša, Horníková, Janíček: Pružnost a pevnost, CERM 2003, rovněž interaktivní učební text VUT FSI 2002

Janíček, Florian: Mechanika Těles, Úlohy z pružnosti a pevnosti I, FSI VUT, 1995

Höschl: Pružnost a pevnost ve strojnictví, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1977

Gere, Timošenko. Mechanics of materials, Chapman and Hall, London, Glasgow, 1991

NÁVAZNOSTI

PPI navazuje na

a) statiku (podmínky statické rovnováhy, statická analýza atd.). PP je jeden z předmětů Mechaniky těles - statika, PP, kinematika, dynamika)

b) matematiku (matematická formulace úloh PP a jejich řešení - integrální a diferenciální počet, diferenciální rovnice atd.)

c) materiálové inženýrství (materiálové charakteristiky)

d) fyziku (atomová struktura látek, teorie dislokací, krystalická struktura atd.)

e) úvod do strojírenství (konstruování) (představa o základních strojních dílech a jejich funkci)

f) teorie systémů, teorie modelování, teorie experimentu (tvorba vhodných výpočtových modelů úloh atd.)

2 ZÁKLADNÍ POJMY

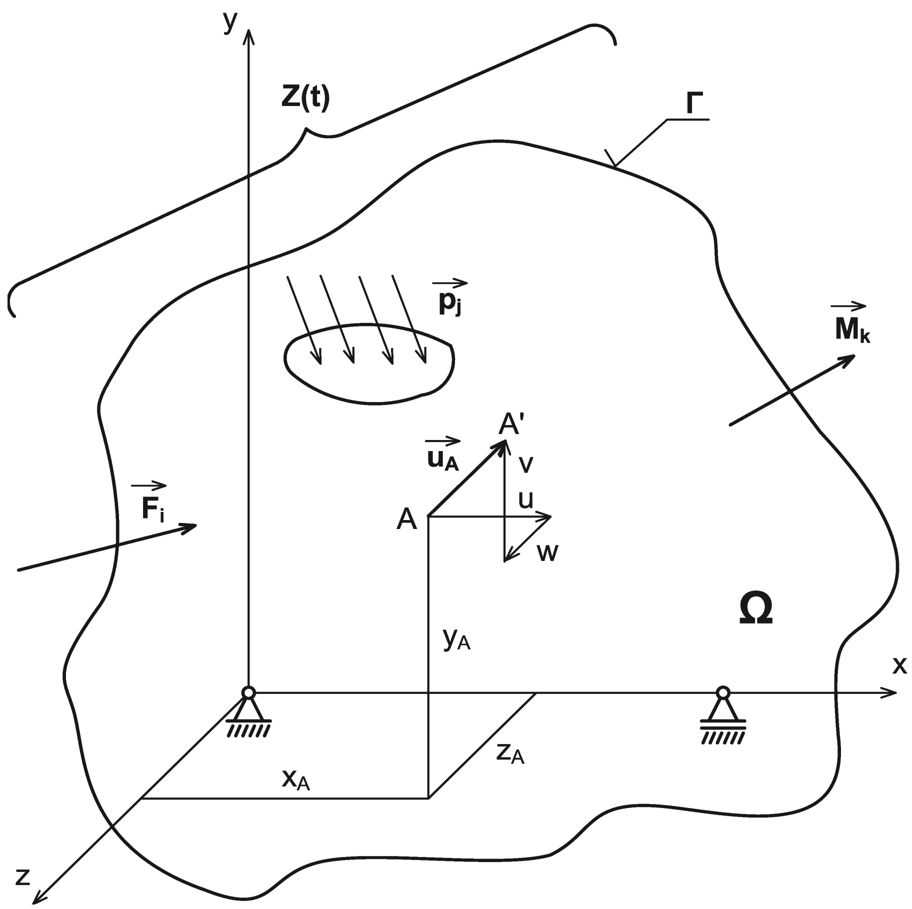
2.1 Deformace tělesa

Při deformaci tělesa se mění poloha bodů tělesa vzhledem ke vztažnému souřadnicovému systému (i vzdálenosti bodů) a tvar tělesa i jeho částí.

Deformace tělesa je matematicky popsána dvěma způsoby

a) posuvy $\vec{u}(u, v, w)$ ve všech bodech A $\in \Omega$
b) deformací všech elementů tělesa

ad a)

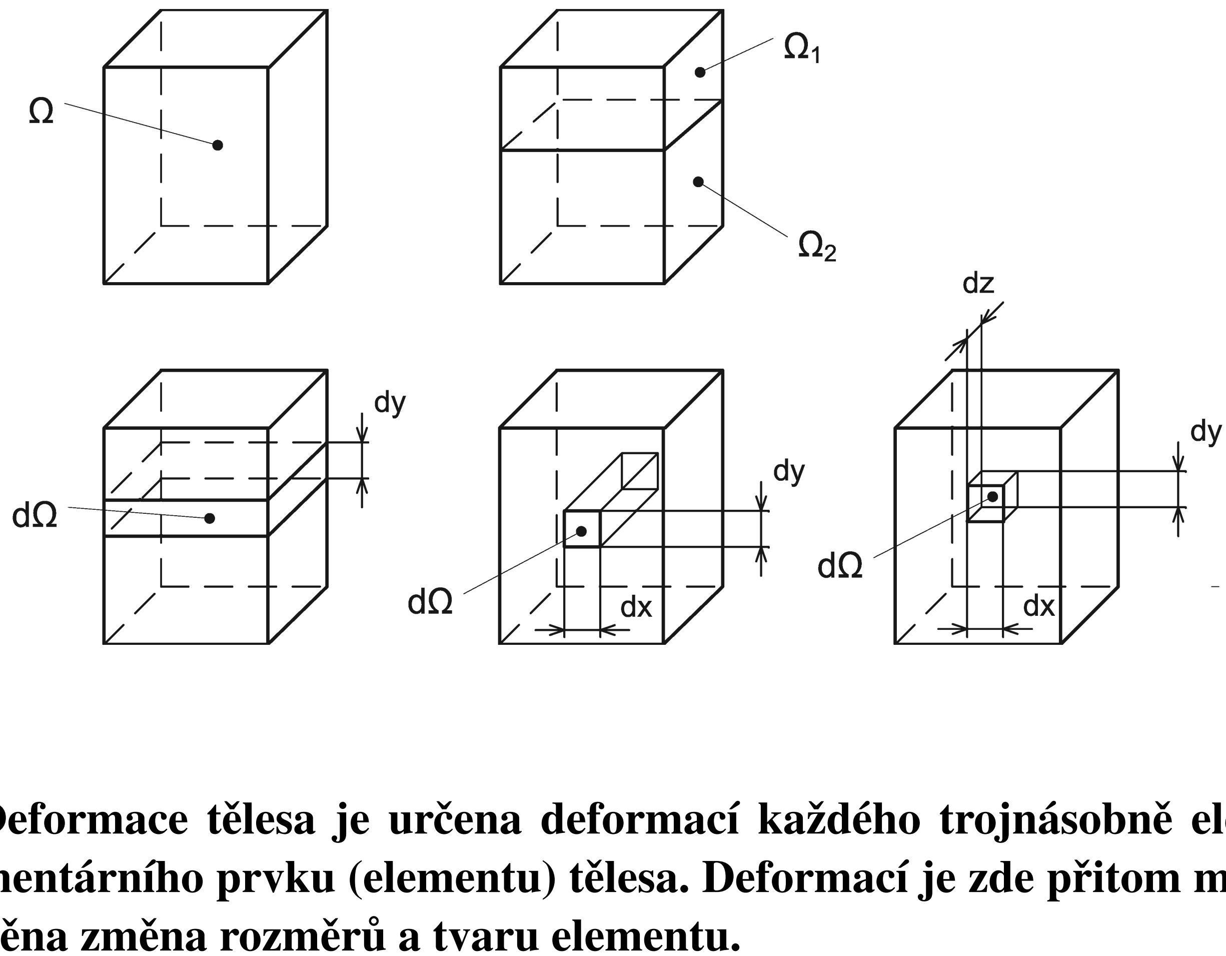


ad b)

Prvkem (elementem) tělesa rozumíme každou jeho oddělitelnou část.

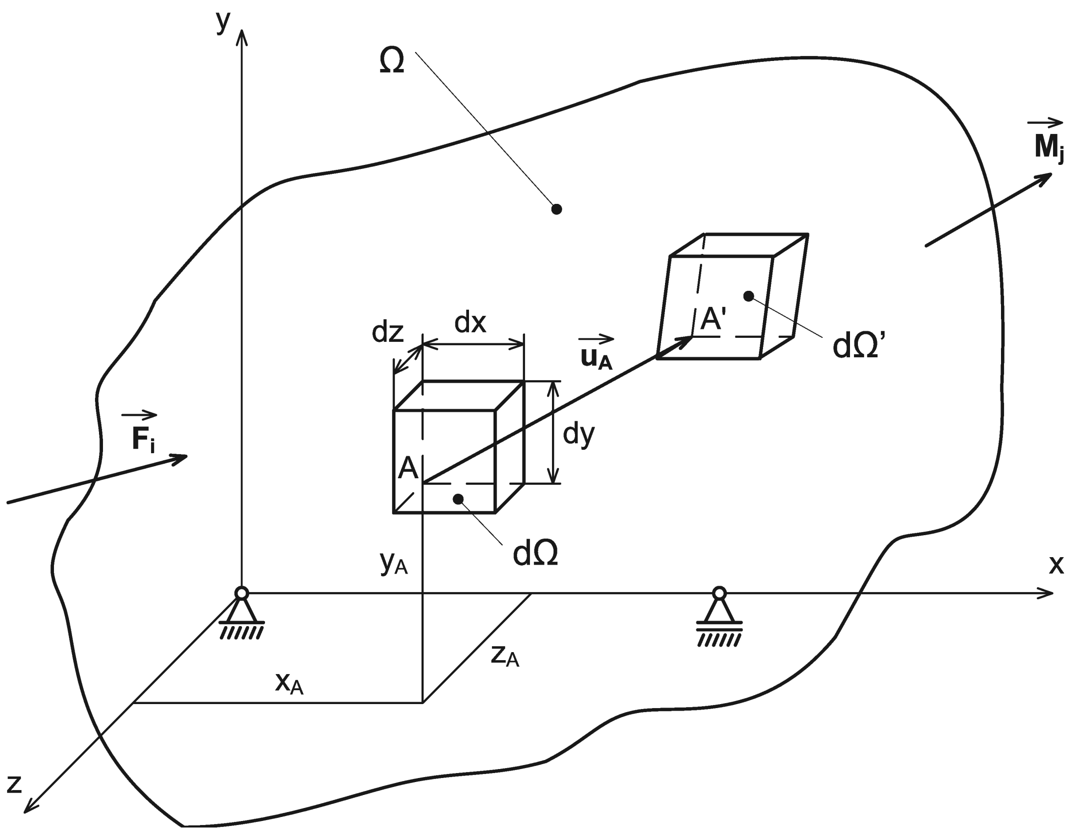
Konečný prvek - všechny rozměry prvku jsou konečné

Elementární prvek - alespoň jeden rozměr je infinitesimálně malý (jedno-, dvoj-, trojnásobně elementární prvek).

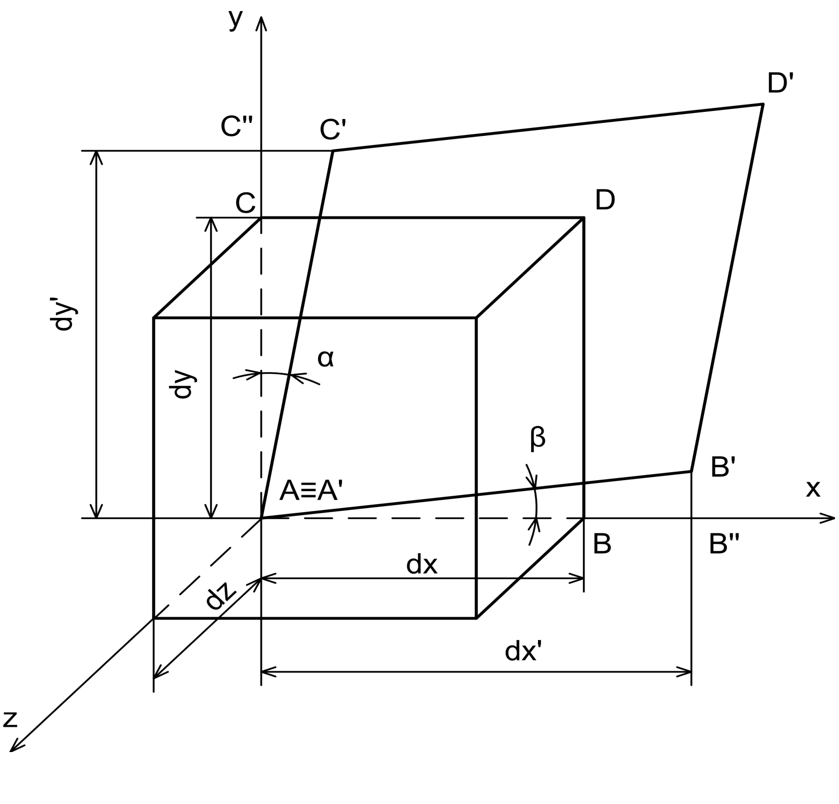


Deformace tělesa je určena deformací každého trojnásobně elementárního prvku (elementu) tělesa. Deformací je zde přitom míněna změna rozměrů a tvaru elementu.

Matematické vyjádření deformace elementu tělesa



Relativní změna rozměrů a tvaru elementu



Změna rozměrů elementu je popsána **délkovými přetvořeními ε_x, ε_y a ε_z**

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\mathrm{d}y' - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\mathrm{d}z' - \mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} \tag{2.1}$$

Změna tvaru elementu je popsána **úhlovými přetvořeními (zkosy)**, které geometricky představují změnu pravého úhlu

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \qquad \gamma_{yz} = \gamma + \delta \qquad \gamma_{zx} = \varepsilon + \psi \tag{2.2}$$

Pozn: uvedené vztahy (1) platí pro malá přetvoření $\varepsilon < 0{,}05$.

Deformace v obecném bodě A tělesa je popsána deformací elementárního prvku, který tento bod obsahuje. Deformace je určena tzv. **tenzorem přetvoření T_ε**.

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

který je symetrickým tenzorem druhého řádu, který obsahuje 6 nezávislých prvků.

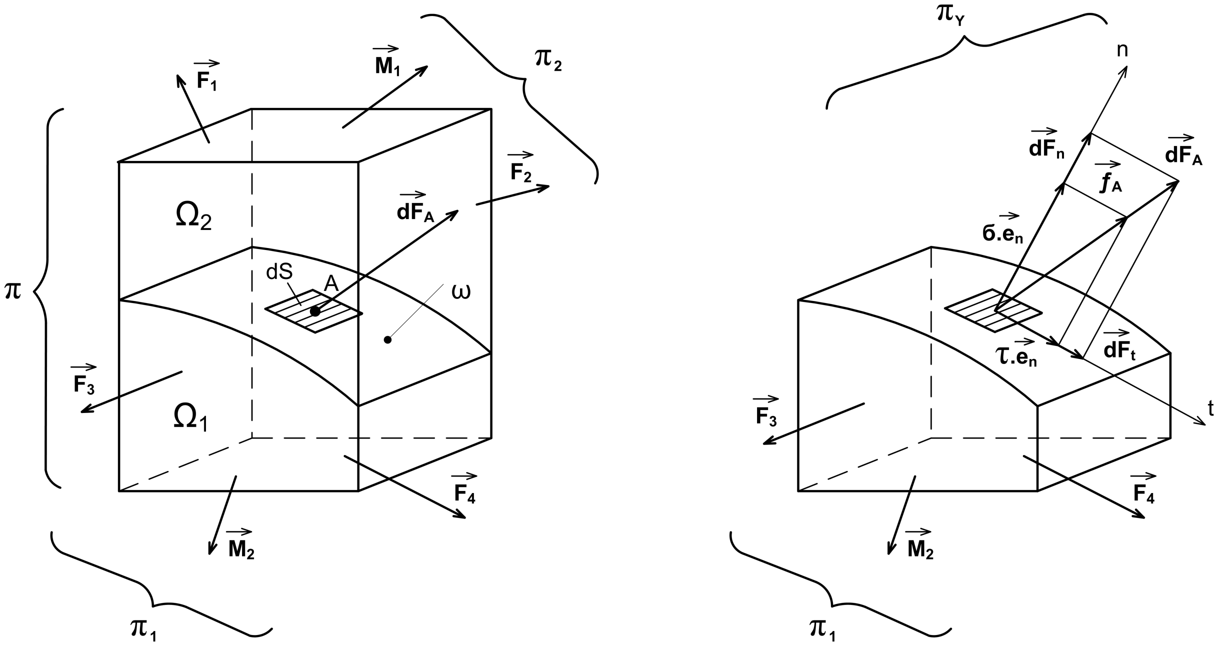
Deformace tělesa je **homogenní**, pokud je ve všech bodech A tělesa Ω stejná, tj. tenzor přetvoření T_ε je ve všech bodech A stejný.

Deformaci považujeme za **nehomogenní**, je-li v různých bodech A tělesa různá. Deformace může být i po částech nehomogenní.

2.2 Napjatost tělesa

Definice: Napjatostí v bodě tělesa A rozumíme množinu obecných napětí $\vec{f}_A$ a jeho složek σ, τ, které působí ve všech řezech ω, které bodem A procházejí.

Základním krokem ke stanovení obecných napětí $\vec{f}$ a jeho složek σ a τ je uvolnění prvku tělesa Ω_1 řezem ω a zavedení účinků vzájemného působení, tzv. plošných sil.



Elementární sílu vzájemného působení v místě A označíme $\mathrm{d}\vec{F}_A$

$$\mathrm{d}\vec{F}_A = \vec{f}_A \,\mathrm{d}S \tag{2.4}$$

$$\vec{f}_A = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_A}{\mathrm{d}S} \tag{2.5}$$

kde $\vec{f}_A$ je tzv. **obecné napětí**.

$$\mathrm{d}\vec{F}_A = \mathrm{d}\vec{F}_n + \mathrm{d}\vec{F}_t \tag{2.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}_A}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_n}{\mathrm{d}S} + \frac{\mathrm{d}\vec{F}_t}{\mathrm{d}S}$$

$$\vec{f}_A = \vec{f}_n + \vec{f}_t = \sigma\vec{e}_n + \tau\vec{e}_t \tag{2.7}$$

σ - **normálové napětí** [$\mathrm{Nm}^{-2} = \mathrm{Pa}$] [$\mathrm{Nmm}^{-2} = \mathrm{MPa}$]
τ - **smykové napětí** [$\mathrm{Nm}^{-2} = \mathrm{Pa}$] [$\mathrm{Nmm}^{-2} = \mathrm{MPa}$]

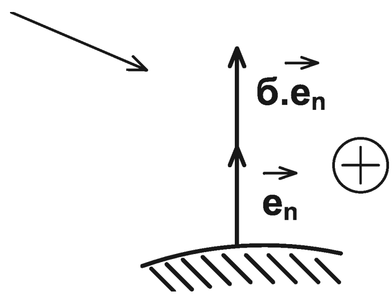
Vztahy mezi obecným napětím a jeho složkami

$$f = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \qquad \sigma = \sqrt{f^2 - \tau^2} \qquad \tau = \sqrt{f^2 - \sigma^2} \tag{2.8}$$

Znaménková konvence pro složky napětí

$\sigma > 0$ napětí má směr vnější normály
(tahové)

$\sigma < 0$ napětí má směr vnitřní normály
(tlakové)



Znaménková konvence pro τ má smluvní charakter ve vazbě na použitý souřadnicový systém.

Naší snahou je nyní určit $\vec{f}_A$ ve všech bodech A řezu ω.

Provedeme statický rozbor silové soustavy působící na prvek tělesa Ω_1, sestávající z podsoustavy vnějších sil π_1 a soustavy vnitřních sil π_v.

Počet neznámých parametrů $\quad \mu = \infty$

Počet použitelných podmínek statické rovnováhy $\quad \nu = 6$

Stupeň statické neurčitosti $\quad s = \mu - \nu = \infty$

Úloha stanovení obecných napětí $\vec{f}_A$ v řezu σ je obecně úlohou **nekonečněkrát staticky neurčitou** a není ji tedy možné řešit v rámci statiky.

V rámci **obecné** Pružnosti a pevnosti se problém řeší dvěma přístupy:

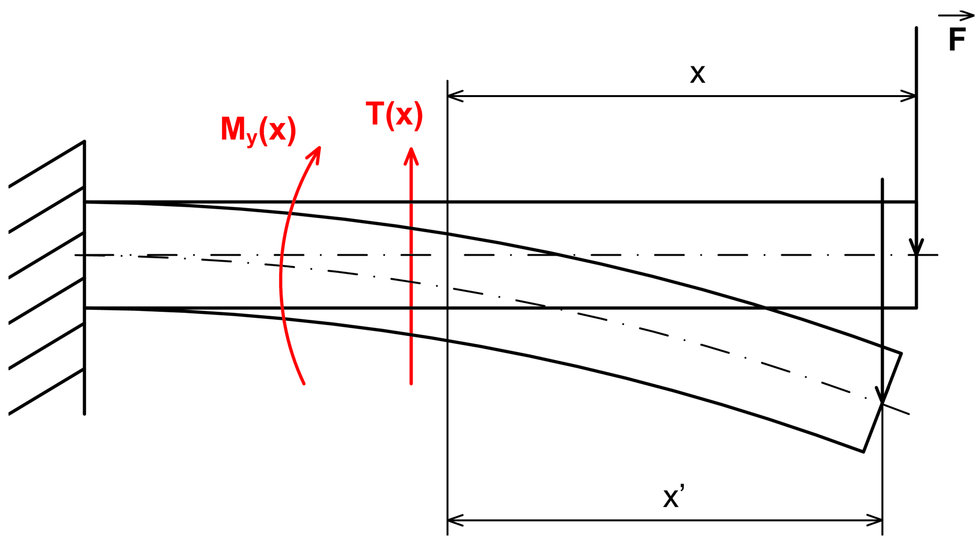
a) **diferenciálním** přístupem pomocí vztahů obecné pružnosti, které sestávají z diferenciálních podmínek rovnováhy pro uvolněný trojnásobně elementární prvek, geometrických podmínek, konstitutivních vztahů (Hookeova zákona) a okrajových podmínek. Analyticky v uzavřeném tvaru je tato úloha řešitelná pouze v jednoduchých případech. Numerické řešení např. metodou sítí je často nestabilní.

b) **integrálním** přístupem pomocí variačních principů (Lagrangeův variační přístup) resp. pomocí principu virtuálních prací. Numerické řešení úlohy zejména pomocí Metody konečných prvků (MKP).

V rámci **prosté** Pružnosti a pevnosti se úloha zjednodušuje zavedením určitých předpokladů o průběhu deformace resp. napětí v charakteristických řezech, které vyplývají z praktických zkušeností, hovoříme o **pracovních předpokladech**.

Základní otázkou však zůstává, v jakém stavu je nutné uvolňovat prvek tělesa. Korektně bychom měli uvolňovat v zatíženém, tj. ve zdeformovaném stavu, ale deformaci dopředu neznáme. Navíc tento postup vede obecně k nelineární závislosti mezi napjatostí a deformací (PP druhého řádu).

Ve většině případů se naštěstí ukazuje, že napjatost ($\vec{f}_A$, resp. vnitřní silové účinky) nezávisí podstatně na deformaci tělesa a můžeme tedy prvek tělesa uvolňovat v nezdeformovaném stavu. **Pro lineárně pružné těleso potom jde o lineární závislost mezi vnitřními silovými účinky a deformací tělesa (PP prvého řádu).**



PP I. řádu

$$M_y(x) = -Fx$$

PP II. řádu

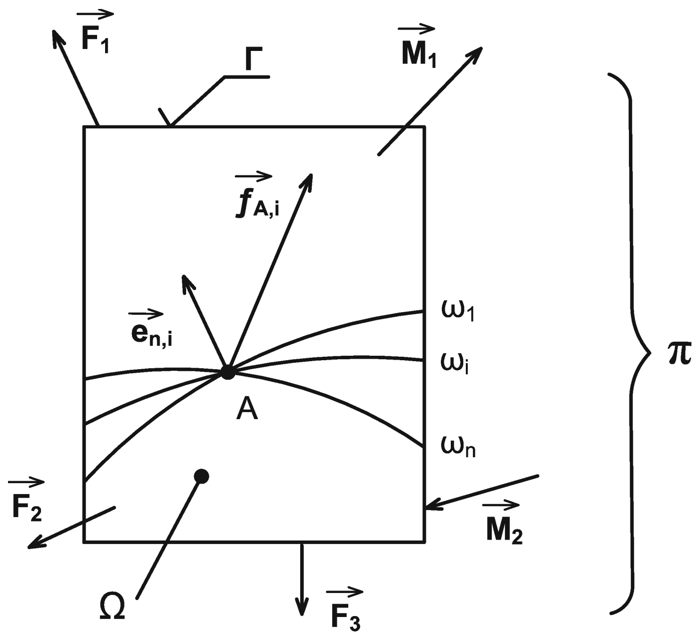
$$M_y(x) = -Fx'$$

Hodnotu x' dopředu neznáme, je to výsledek řešení (například iterační postup).

VĚTY O NAPĚTÍ A NAPJATOSTI

Problematikou určováním napjatosti a deformace v tělesech v závislosti na vnějším zatížení se budeme zabývat v průběhu celého předmětu PPI. Již na začátku je ale zapotřebí znát jisté závislosti, které si uvedeme formou vět.

a) Obecné napětí $\vec{f}_A$ závisí na tvaru tělesa Ω, zatížení π, poloze bodu A, řezu ω a materiálových charakteristikách



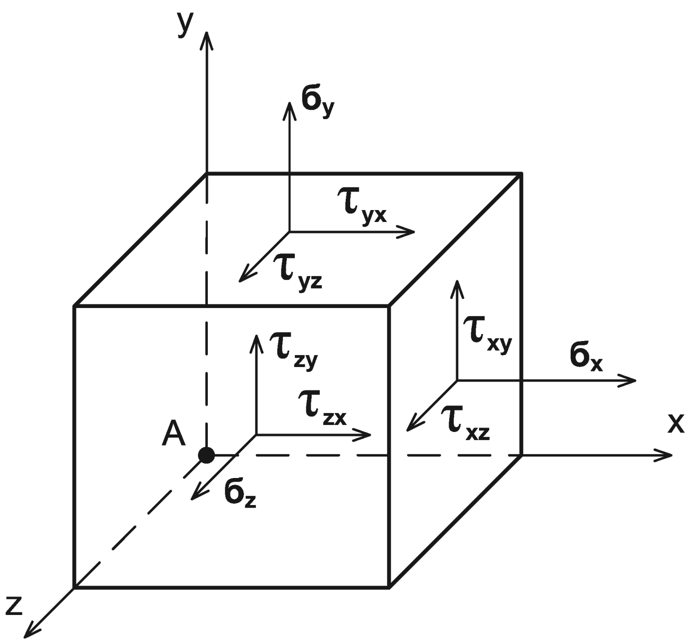
b) Obecné napětí $\vec{f}_A$ v řezech ω_i je stejné, pokud tyto řezy mají stejnou normálu $\vec{e}_n$

c) Obecné napětí $\vec{f}_A$ je lineární kombinací jednotkového vektoru normály $\vec{e}_n$ v tomto bodě

$\vec{f}_A = T_\sigma \vec{e}_n$ resp. v maticovém tvaru $\{f_A\} = [T_\sigma]\{\alpha_n\}$

kde $[T_\sigma]$ je tzv. tenzor napětí definovaný následovně

$$[T_\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



Jde o symetrický tenzor druhého řádu obsahující 6 nezávislých prvků.

d) Nahradíme-li silovou soustavu π silovou soustavou staticky ekvivalentní π_e, pak obecné napětí $\vec{f}_A$ v bodech A je pro obě silové soustavy obecně různé.

Z definice napjatosti v bodě tělesa A a vztahu ad c) plyne, že napjatost v bodě tělesa je určena tenzorem napětí $[T_\sigma]$ v tomto bodě. Napjatost tělesa je potom dána napjatostí ve všech bodech tělesa.

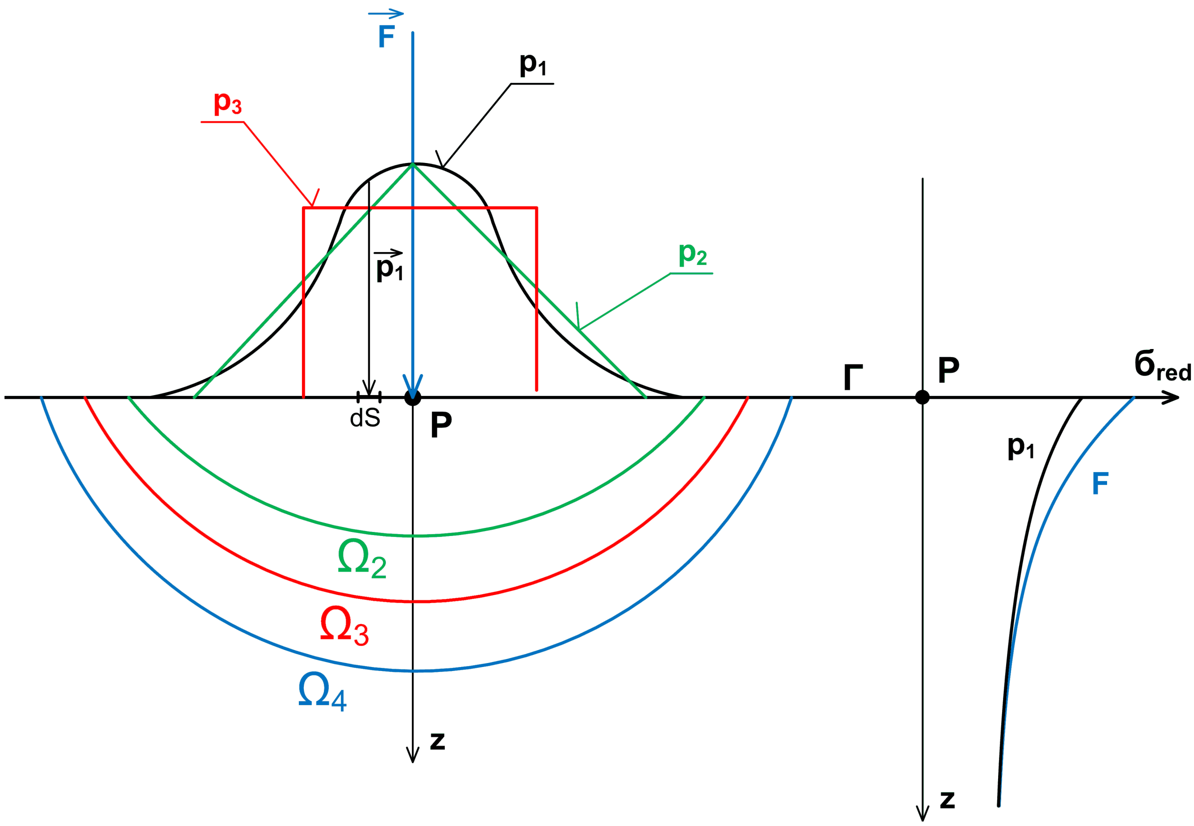
Napjatost v tělese je **homogenní**, pokud je ve všech bodech A tělesa stejná, tzn. že ve všech bodech A tělesa je tenzor napětí $[T_\sigma]$ stejný.

Napjatost v tělese je **nehomogenní**, je-li v různých bodech různá. Napjatost může být i po částech nehomogenní.

SAINT-VENANTŮV PRINCIP

Z praktických zkušeností vyplývá, že staticky ekvivalentní náhradou π_e silové soustavy π je ovlivněna napjatost pouze v bezprostředním okolí náhrady. Tuto skutečnost poprvé intuitivně formuloval Saint-Venant.

Nahradíme-li silové působení π v okolí bodu P na povrchu Γ jiným, staticky ekvivalentním zatížením π_e, pak napjatost v tělese bude pro obě zatížení prakticky stejná s výjimkou bezprostředního okolí bodu P.

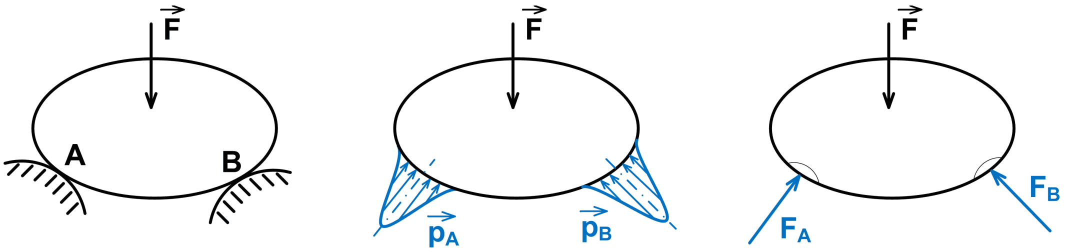


$$\int\limits_{\Gamma_{p_1}} p_1 \,\mathrm{d}S = \int\limits_{\Gamma_{p_2}} p_2 \,\mathrm{d}S = \int\limits_{\Gamma_{p_3}} p_3 \,\mathrm{d}S = \int\limits_{\Gamma_{p_i}} p_i \,\mathrm{d}S = F$$

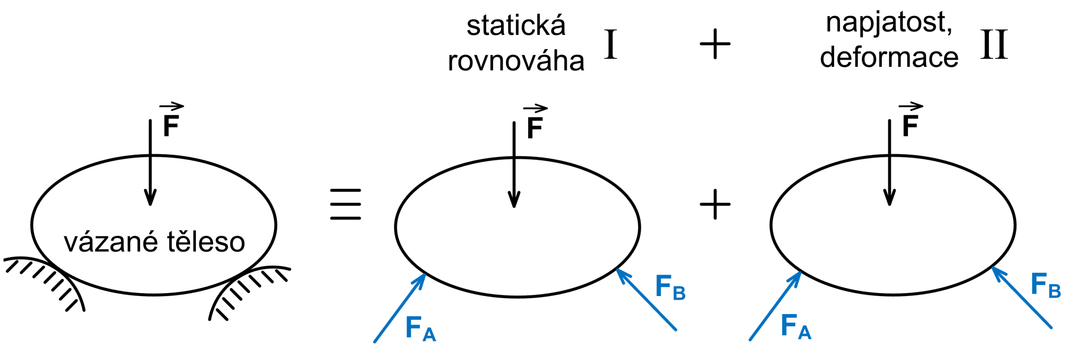
Saint-Venantův princip umožňuje

a) zavedení veličiny osamělé síly $\vec{F}$ v Pružnosti a pevnosti

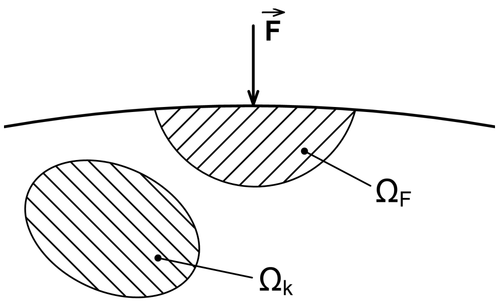
b) vytvářet výpočtové modely styku těles (redukce počtu neznámých parametrů)



c) rozdělit řešení napjatosti a deformace vázaného tělesa na řešení rovnováhy tělesa jako celku a pak napjatosti a deformace uvolněného tělesa



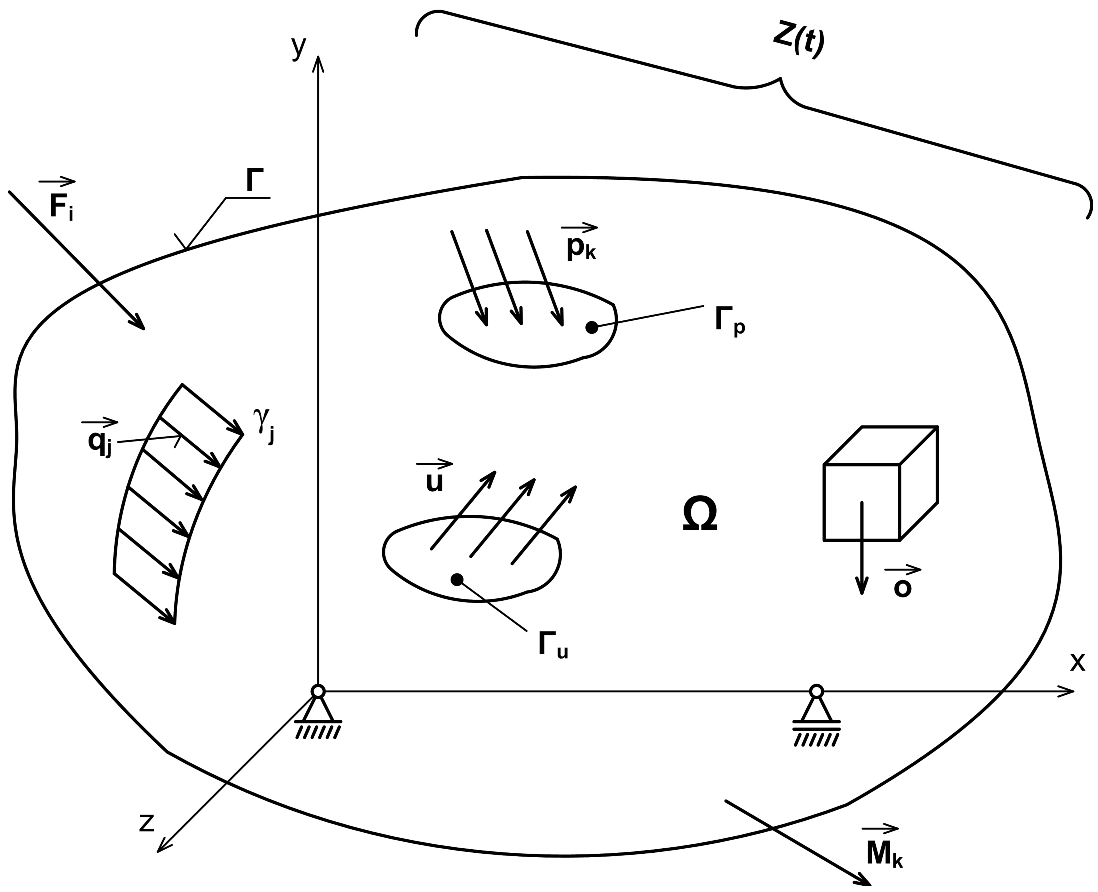
POZOR: Saint-Venantův princip je možné použít pouze tehdy, je-li oblast špatně stanovené napjatosti Ω_F mimo kritickou oblast Ω_k, která rozhoduje o bezpečnosti. Nelze např. použít u kontaktních úloh.



2.3 Zatížení tělesa

Zatížení tělesa je způsobeno interakcí tělesa s okolím nebo vnitřními procesy, které v tělesa probíhají. Výsledkem je vznik napjatosti a deformace s možností vzniku porušení celistvosti tělesa. Do zatěžovacího působení patří:

– **silové zatěžování** (osamělé síly $\vec{F}_i$ [N], liniové síly $\vec{q}_j$ [Nm^{-1}], plošné síly $\vec{p}_k$ [Nm^{-2}], objemové síly $\vec{o}$ [Nm^{-3}]



– **deformační zatěžování** (předepsaný posuv $\vec{u}$ na povrchu tělesa γ_u- realizace např. dotažením matice o jistý počet otáček, nasazením objímky na hřídel atd.)

– **objemové zatěžování** (nehomogenní teplota, změna objemu v průběhu fázových změn (austenit - martenzit) atd.). Zatížení od nehomogenní teploty se obvykle nazývá teplotní zatížení

Charakteristické působení - působení, které samo nevede ke vzniku napjatosti, ale které může ovlivnit vznik mezních stavů - teplota, korozivní prostředí atd.

Zavádíme následující pojmy:

zatěžovací stav - $Z(t)$

výchozí stav - $Z(0)$. Většinou předpokládáme, že napjatost je v tomto stavu nulová.

historie zatěžování - $Z(t)$ pro $t \in < 0, t >$

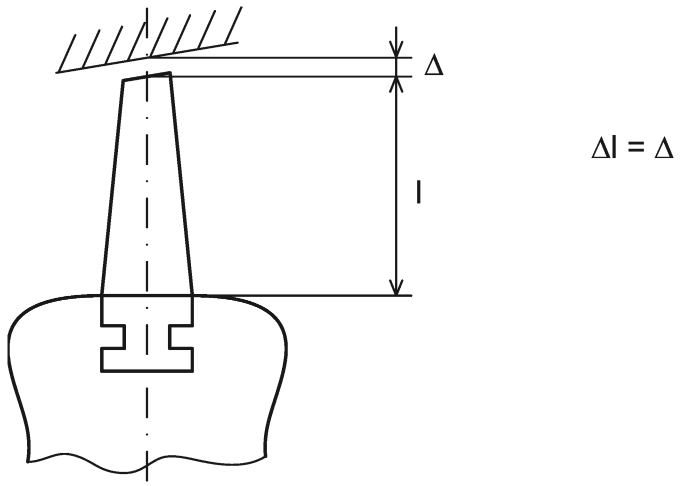
vlastní napjatost - napjatost v tělese bez vnějšího zatížení $Z(t) = 0$. Tato napjatost je způsobena celou historií zatěžování (kalení, tváření za studena, montážní operace, vznik lokální plastické deformace v průběhu zatěžování atd.

2.4 Mezní stavy tělesa

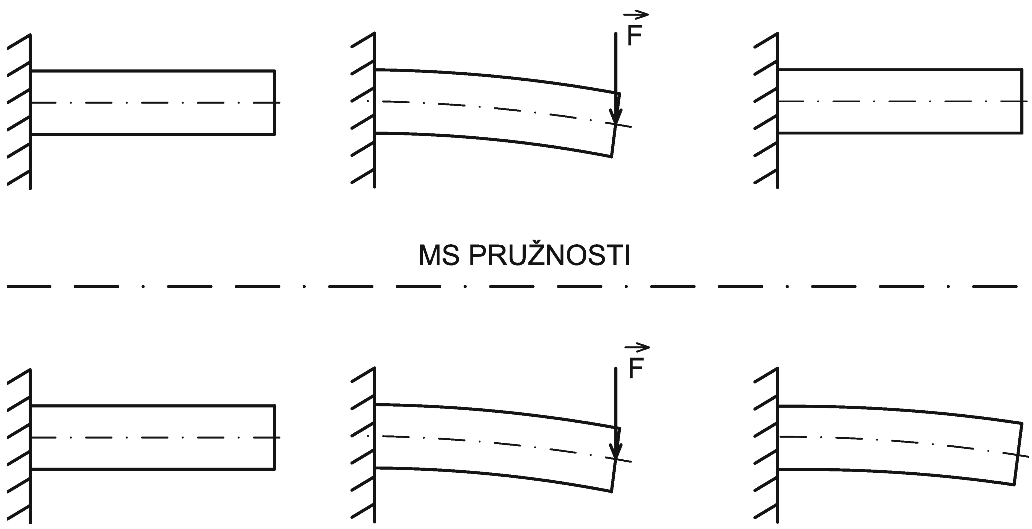
Mezním stavem (MS) rozumíme stav, kdy se mění charakteristická vlastnost tělesa.

1. Mezní stavy související s deformací tělesa

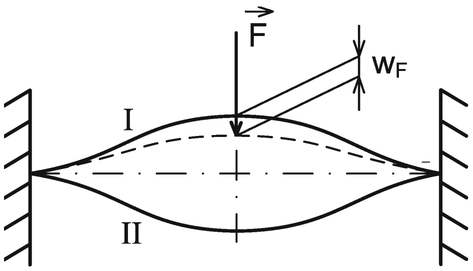
a) **Mezní stav deformace** je takový MS, po jehož překročení ztrácí součástka svoji funkční způsobilost. Příklad: turbínové lopatky

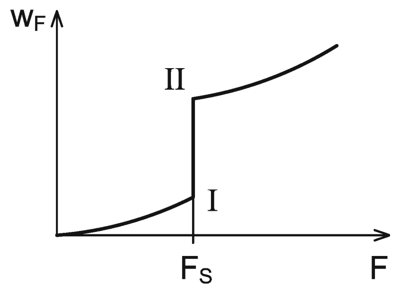


b) **Mezní stav pružnosti**. S tělesem provedeme zátěžný cyklus, spočívající v zatížení a následném odtížení. Po překročení MS pružnosti zůstávají v tělese trvalé (plastické) deformace.



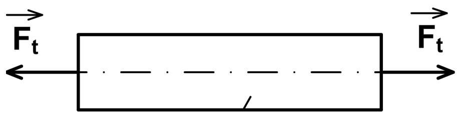
c) **Mezní stav deformační stability**. Geometrická konfigurace stabilní do tohoto stavu se stává labilní a stabilní se stává jiná geometrická konfigurace (při stejném způsobu namáhání).



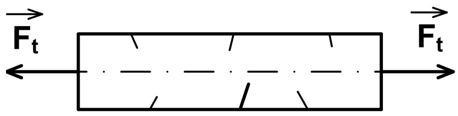


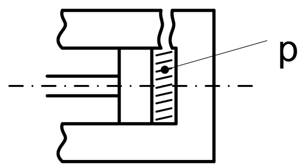
2. Mezní stavy související s porušováním celistvosti tělesa

Mezní stav porušení - vznikají první trhlinky zjistitelné dostupnými prostředky.

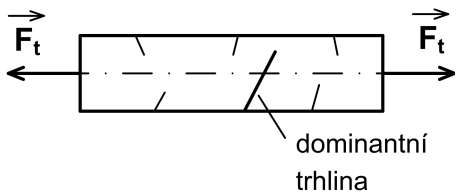


Mezní stav trhlin - porušení funkčně přípustné se mění na funkčně nepřípustné.

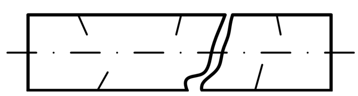




Mezní stav stability trhlin - trhlina přestává být stabilní a šíří se bez příjmu energie z vnějšku (bez vnějšího zatížení).



Mezní stav lomu - těleso se rozpadá na dvě či více částí.



2.5 Deformačně pevnostní spolehlivost

Základním požadavkem na každou konstrukci je, aby plnila svoji funkci

a) v realizovaném stavu (po montáži)

b) za běžných a některých mimořádných podmínek

c) po požadovanou dobu

Schopnost konstrukce za těchto podmínek pracovat se nazývá **spolehlivost**, která se kvantitativně vyjadřuje **charakteristikami spolehlivosti** a to různým způsobem

a) **slovně** (spolehlivost dostatečná, malá, vyhovující, přiměřená)

b) **jednoduchou relací** ve tvaru

$$\alpha \lesseqqgtr \alpha_M(\alpha_D) \qquad \sigma \lesseqqgtr \sigma_K(\sigma_D) \qquad \sigma_{red} \lesseqqgtr \sigma_K(\sigma_D)$$

kde α je veličina charakterizující spolehlivost ve vyšetřovaném stavu a $\boldsymbol{\alpha_M}$ je **mezní hodnota** této veličiny. S ohledem na výpočtové nepřesnosti vycházíme v praxi z **hodnot dovolených** - $\boldsymbol{\alpha_D}$, které jsou větší než 1.

$$\alpha \leqq \alpha_D \qquad \text{– vyhovující}$$

$$\alpha > \alpha_D \qquad \text{– nevyhovující}$$

c) **koeficientem bezpečnosti**, zkráceně **bezpečností** k_M vůči aktuálnímu meznímu stavu

$$k_M = \frac{\alpha_M}{\alpha} \qquad k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma} \qquad k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{red}}$$

$$k_M \geqq k_D \qquad \text{– vyhovuje}$$

$$k_M < k_D \qquad \text{– nevyhovuje}$$

Pozn: Konkrétní velikost dovolených bezpečností k_D závisí na druhu namáhání a vychází z praktických zkušeností.

d) **životnost** - doba, resp. **počet zatěžovacích cyklů** do vzniku mezního stavu

relace	$t < t_f$	$N < N_f$	vyhovuje
	$t \geqq t_f$	$N \geqq N_f$	nevyhovuje

kde - t,N je doba, resp. počet cyklů, které jsou požadovány z důvodu správné funkce konstrukce

t_f,N_f je doba, resp. počet cyklů do vzniku mezního stavu (většinou lomu)

TYPY ÚLOH V PRUŽNOSTI A PEVNOSTI

1. **Úlohy pomocné**. Určují se veličiny, které nejsou pružnostně pevnostními charakteristikami, ale jsou důležité pro výpočet napjatosti a deformace pomocí příslušných vztahů.

   – průřezové charakteristiky prutů
   – výsledné vnitřní silové účinky u prutů

2. **Úlohy o kontrole**. Úloha je zadána úplně (známe geometrii tělesa, materiálové charakteristiky, silové působení, vazby k rámu). Úkolem je většinou stanovit bezpečnost vůči aktuálnímu meznímu stavu.

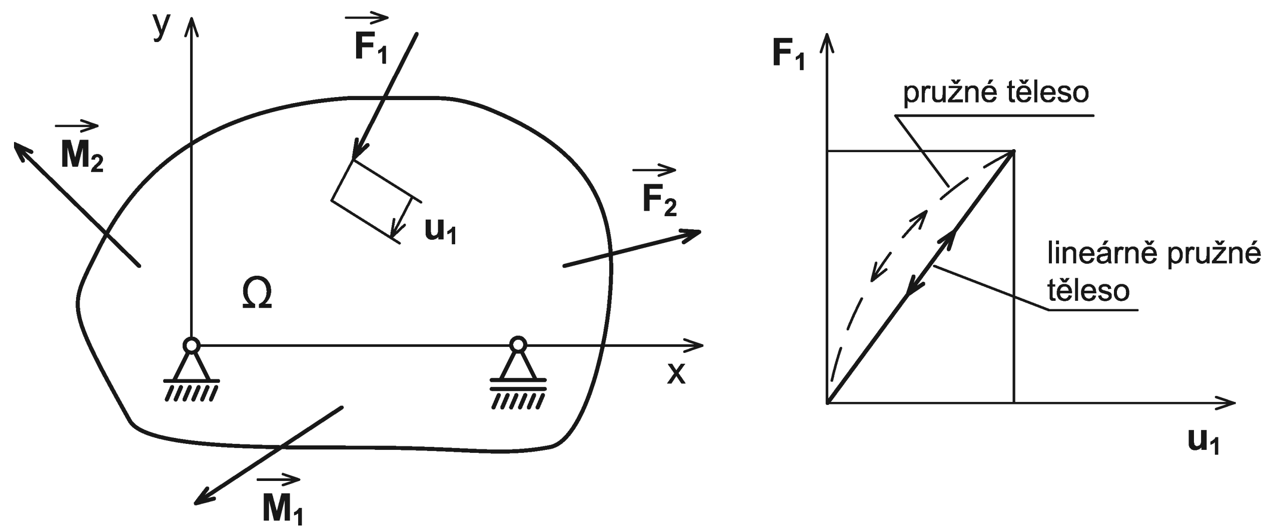
3. **Úlohy o určování parametrů**. Úloha je zadána neúplně. Úkolem je určit nezadané parametry (často rozměry), aby spolehlivě nenastal mezní stav.

4. **Úlohy o optimalizaci**. Úloha je zadána neúplně. Úkolem je stanovit nezadané parametry tak, aby spolehlivě nenastal aktuální mezní stav a současně byla splněna optimalizační podmínka (např. minimální hmotnost).

5. **Úlohy o odvozování a dokazování**. Požaduje se odvození jistých vztahů, závislostí, vět o silovém působení, napjatosti a deformaci. Jde o úlohy teoretického charakteru.

3 OBECNÉ VLASTNOSTI A OBECNÉ VĚTY LINEÁRNĚ PRUŽNÉHO TĚLESA

Charakteristickou vlastností lineárně pružného tělesa je lineární závislost mezi zatížením, napětími, deformacemi a posuvy.



V případě pružného tělesa je tato závislost nelineární, ale po odtížení se dostáváme do původního stavu.

U pružného tělesa (a samozřejmě i v lineárně pružném případě) závisí napjatost a deformace pouze na zatížení, které na těleso v daném okamžiku působí a nejsou tedy závislé na historii zatěžování.

Pro **pružné těleso** platí zákon **zachování energie** v následujícím tvaru:

Při zatěžování tělesa v pružném stavu je přírůstek energie napjatosti $\mathrm{d}W$ roven přírůstku deformační práce $\mathrm{d}A$ všech sil, působících na těleso.

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}A \tag{3.1}$$

Při zatěžování z nezatíženého stavu bez vnitřní napjatosti platí příslušná rovnost pro celkové hodnoty

$$W = A \tag{3.2}$$

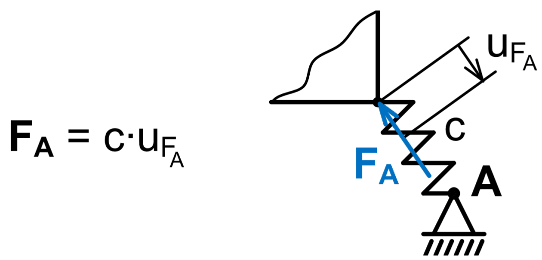
V dalším se omezíme na **lineárně pružné těleso**. K tomu je zapotřebí, aby bylo splněno několik podmínek:

a) materiál tělesa je lineárně pružný. Konstitutivní vztahy popisující vazbu mezi napětími a deformacemi jsou popsány tzv. Hookeovým zákonem. V případě isotropického materiálového modelu je mechanické chování materiálu určeno dvěma nezávislými materiálovými konstantami, jmenovitě **modulem pružnosti $\boldsymbol{E}$ a Poissonovým číslem $\boldsymbol{\mu}$**

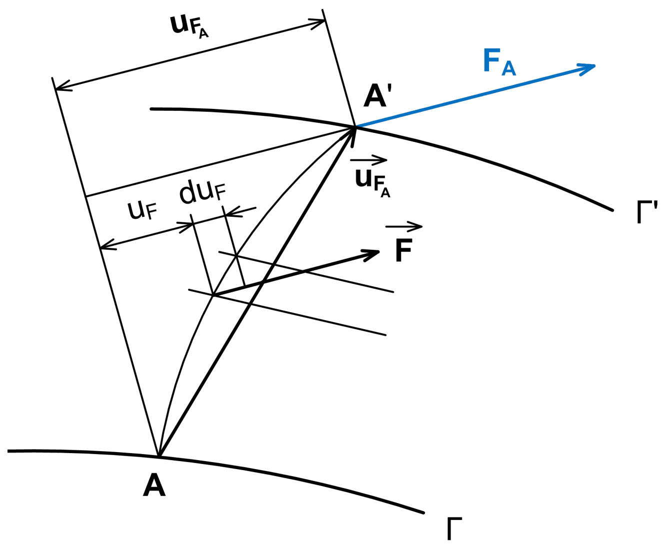
b) deformační posuvy $\vec{u}$ jsou malé a neovlivňují napjatost a deformaci

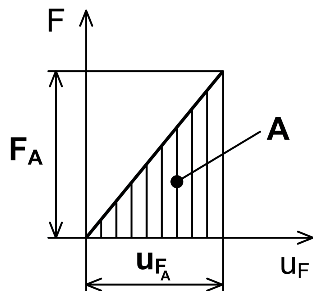
c) složky tenzoru přetvoření T_ε jsou malé ($\varepsilon < 0,05$)

d) okrajové podmínky jsou lineární



Deformační práce osamělé síly F



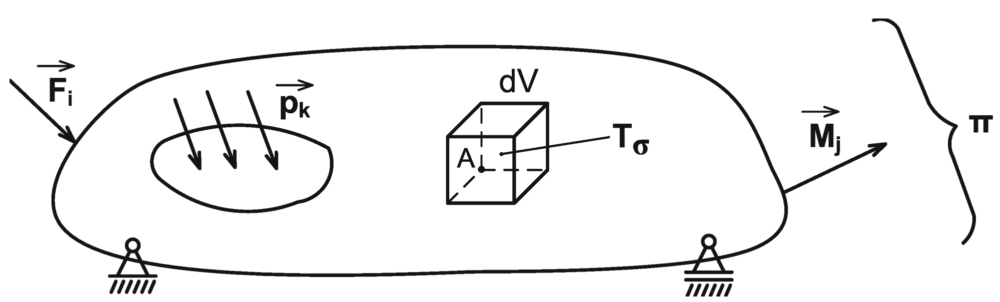


$$A = \int_0^{u_{F_A}} F\,\mathrm{d}u_F = \left| \begin{array}{lcl} F & = & c\,u_F \\ F_A & = & c\,u_{F_A} \end{array} \right| = \int_0^{u_{F_A}} c\,u_F\,\mathrm{d}u_F =$$

$$= \frac{c\,u_{F_A}^2}{2} = \frac{\overbrace{c\,u_{F_A}}^{F_A}\;u_{F_A}}{2} = \frac{F_A\,u_{F_A}}{2} = \frac{1}{2}F_A\;\underbrace{u_{F_A}}_{\substack{\text{složka}\\ \text{posuvu}}} \tag{3.3}$$

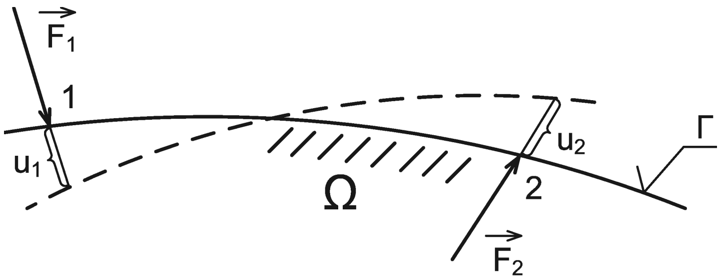
Věta o superposici napjatosti a deformace

Napjatost a deformace tělesa, způsobená silovou soustavou Π je rovna součtu napjatostí a deformací způsobených jednotlivými silovými účinky, přičemž nezávisí na pořadí zatěžování.

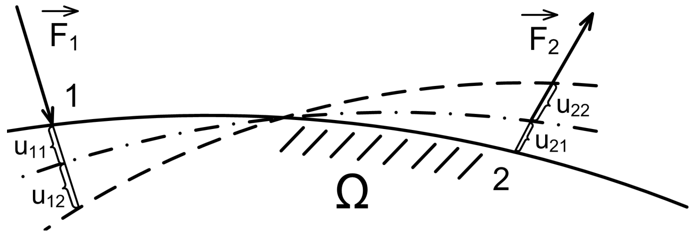


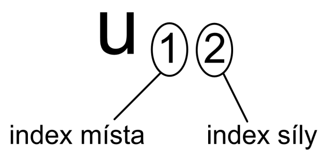
Věta o vzájemnosti prací

Současné zatěžování silami $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ $\qquad 0 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2$



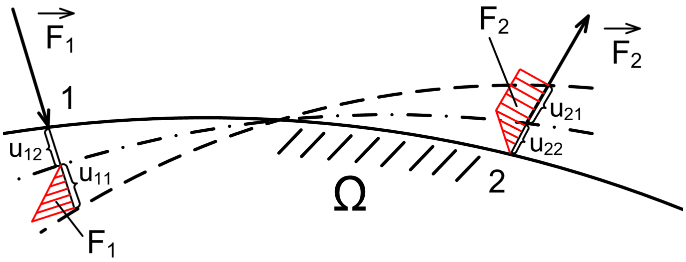
Postupné zatěžování I $\qquad 0 \rightarrow \vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2$





$$A_I = \frac{1}{2}F_1 u_{11} + F_1 u_{12} + \frac{1}{2}F_2 u_{22} \tag{3.4}$$

Postupné zatěžování II $\qquad 0 \rightarrow \vec{F}_2 \rightarrow \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2$



$$A_{II} = \frac{1}{2}F_2 u_{22} + \frac{1}{2}F_1 u_{11} + F_2 u_{21} \tag{3.5}$$

V souladu s předchozí větou o superposici platí

$$A_I = A_{II}$$

A z porovnání vztahů (4) a (5) dostáváme

$$F_1 u_{12} = F_2 u_{21} \tag{3.6}$$

Předchozí vztah je možné vyjádřit slovně ve formě tzv. Bettiho věty o vzájemnosti prací

Práce síly $\boldsymbol{F_1}$ na posuvu $\boldsymbol{u_{12}}$ způsobeném v místě 1 silou $\boldsymbol{F_2}$ je rovna práci síly $\boldsymbol{F_2}$ na posuvu $\boldsymbol{u_{21}}$ způsobeném v místě 2 silou $\boldsymbol{F_1}$.

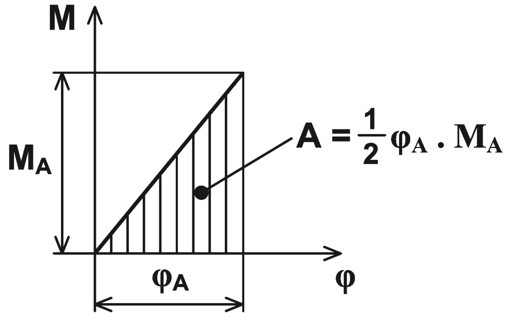
Věta o vzájemnosti posuvů

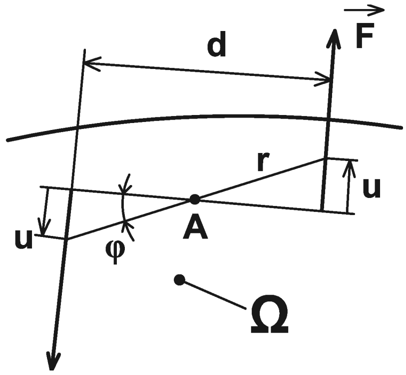
Působí-li v místech 1 a 2 jednotkové síly $\vec{e}_1$ a $\vec{e}_2$, potom pro složky posuvů platí:

$$\eta_{12} = \eta_{21} \tag{3.7}$$

Veličiny η_{12} a η_{21} se nazývají **příčinkoví součinitelé**.

Deformační práce silové dvojice

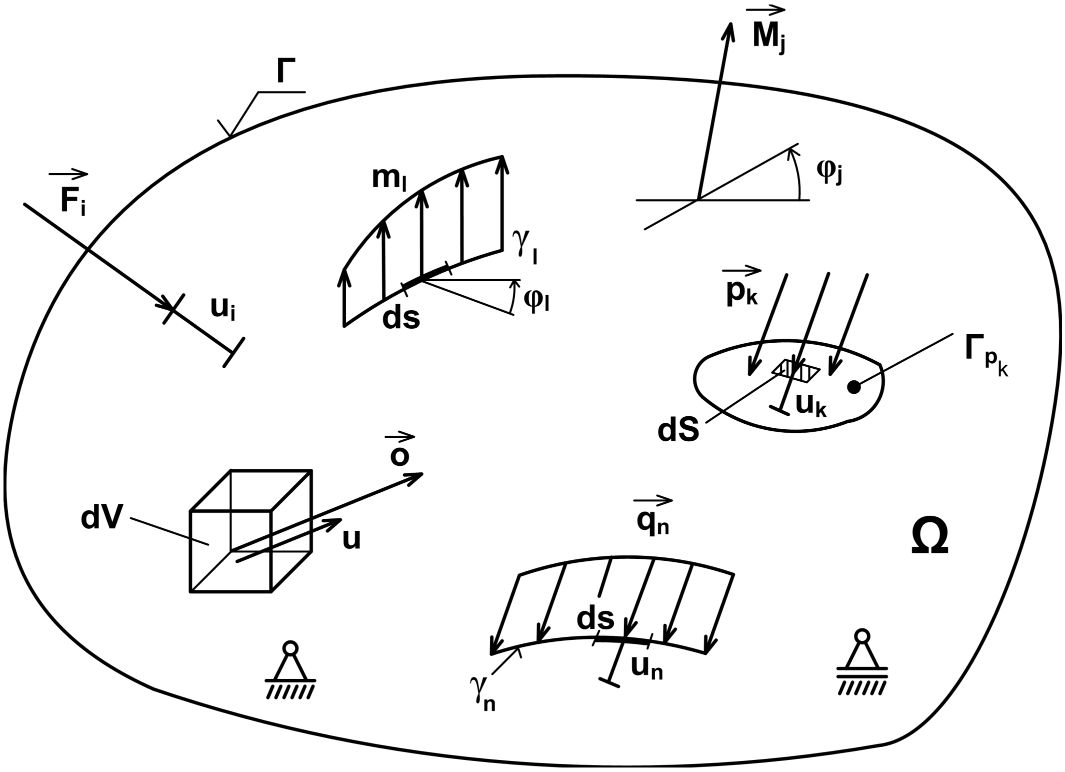




$$A = \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{2} F_i u_i = \frac{1}{2} F u + \frac{1}{2} F u =$$

$$= \frac{1}{2} F r \varphi + \frac{1}{2} F r \varphi = \frac{1}{2} \underbrace{F \cdot 2r}_{Fd} \varphi = \frac{1}{2} M \varphi \qquad (3.8)$$

Věta o deformační práci silové soustavy

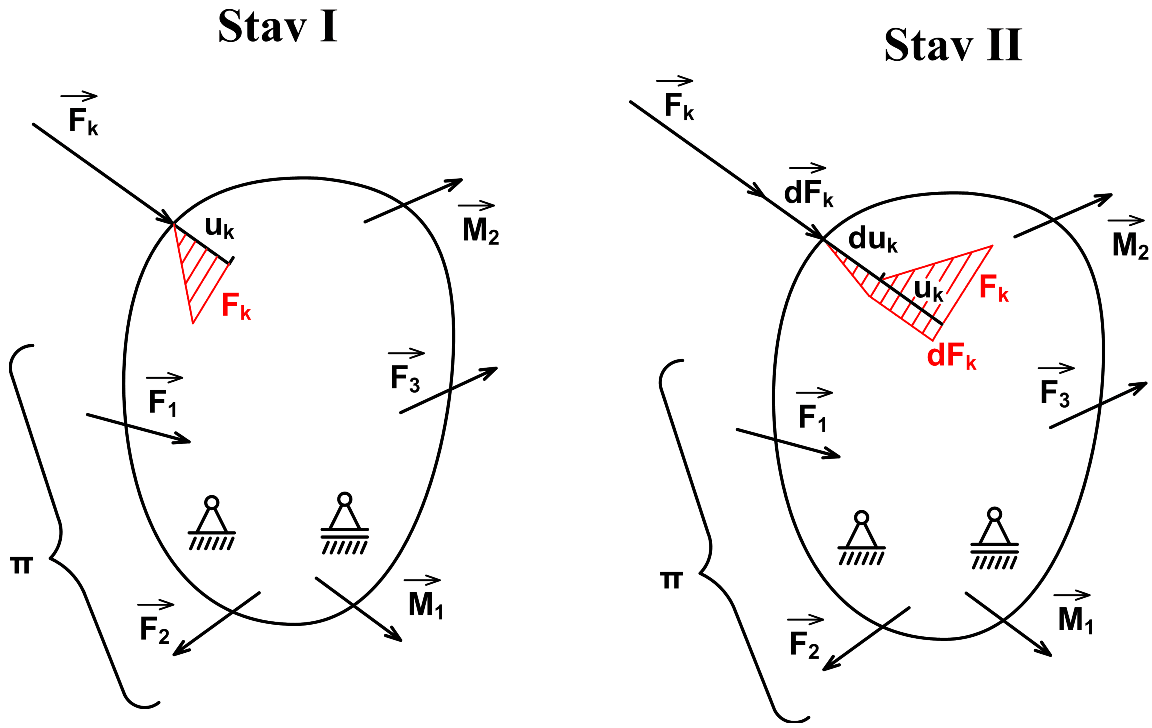


$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_i} F_i u_i + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n_n} \int_{\gamma_n} q_n u \,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_k} \int_{\Gamma_{p_k}} p_k u \,\mathrm{d}S +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega} ou \; dV + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_j} M_j \varphi_j + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n_l} \int_{\gamma_l} m_l \varphi_l \,\mathrm{d}s \qquad (3.9)$$

Castiglianova věta

Naším cílem je stanovit složku posuvu u_k působiště síly F_k, která leží na povrchu lineárně pružného tělesa



Stav I	-	zatížení tělesa silovou soustavou	$\pi \cup \vec{F}_k$
Stav II	-	zatížení tělesa silovou soustavou	$\pi \cup \vec{F}_k \cup d\vec{F}_k$ resp. $\pi \cup d\vec{F}_k \cup \vec{F}_k$

$$A_I = A_\pi + \frac{1}{2} F_k u_k$$

$$A_{II} = A_\pi + \underbrace{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}F_k\,\mathrm{d}u_k}_{\to 0} + \frac{1}{2} F_k u_k + \mathrm{d}F_k u_k$$

Přírůstek práce vnějších sil

$$\mathrm{d}A = A_{II} - A_I = \mathrm{d}F_k u_k \tag{3.10}$$

Z čistě matematického pohledu je práce A silové soustavy π složenou funkcí zatížení

$$A(\pi) = A(F_i, M_j)$$

Totální diferenciál (přírůstek) je potom roven

$$\mathrm{d}A = \sum_{i=1}^{n_i} \frac{\partial A}{\partial F_k}\,\mathrm{d}F_i + \sum_{j=1}^{n_j} \frac{\partial A}{\partial M_j}\,\mathrm{d}M_j \tag{3.11}$$

V našem případě, kdy působí pouze $\mathrm{d}F_k$ platí

$$dA = \frac{\partial A}{\partial F_k}\,\mathrm{d}F_k \tag{3.12}$$

Z porovnání (10) a (12) s přihlédnutím k (2) dostáváme
tzv. **Castiglianovu větu pro posuv** ve směru působící síly ve tvaru

$$u_k = \frac{\partial A}{\partial F_k} = \frac{\partial W}{\partial F_k} \tag{3.13}$$

Znaménková konvence - je-li $u_k > 0$, potom se posuv realizuje ve směru působící síly,pokud je $u_k < 0$, dochází k posuvu proti směru působící síly.

Analogickým postupem je možné odvodit **Castiglianovu větu pro natočení** φ_l v místě působení silové dvojice

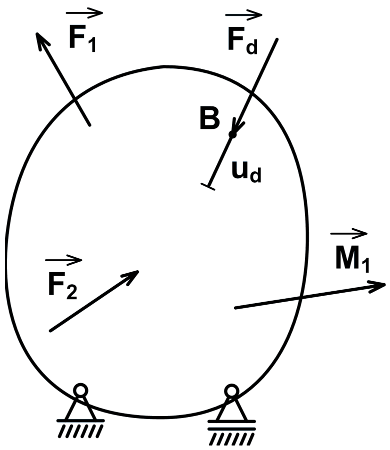
$$\varphi_l = \frac{\partial A}{\partial M_l} = \frac{\partial W}{\partial M_l} \tag{3.14}$$

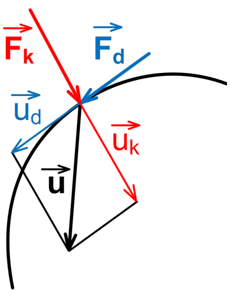
Znaménková konvence - je-li $\varphi_l > 0$, potom se natočení realizuje ve směru působení silové dvojice M_l, v případě $\varphi_l < 0$ dochází k natočení proti směru působení M_l.

Pozn: Pokud chceme stanovit posunutí resp. natočení v místech, kde nepůsobí žádná osamělá síla resp. silová dvojice, zavádíme do těchto míst veličiny doplňkové F_d resp. M_d . Potom pro posuv resp. úhel natočení dostáváme

$$u_d = \frac{\partial W}{\partial F_d} \;\; ; \;\; \varphi_d = \frac{\partial W}{\partial M_d} \tag{3.15}$$

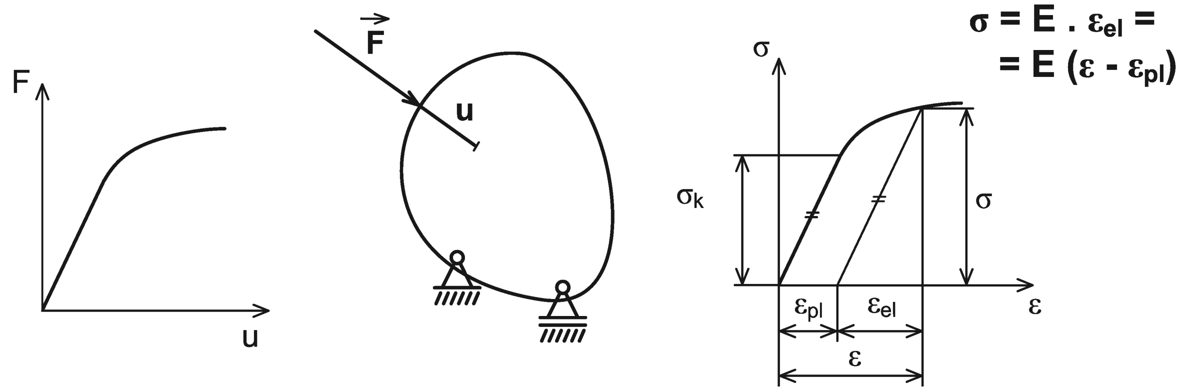
Celý postup provádíme s obecnými hodnotami F_d resp. M_d, jejichž hodnoty před závěrečnou matematickou operací položíme rovny 0.





ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI PRUŽNĚ PLASTICKÉHO MATERIÁLU A TĚLESA

Jestliže po zatížení a následném odtížení zůstanou v tělese trvalé deformace, potom bylo těleso (materiál) pod zatížením ve stavu elasticko-plastickém



Určování napjatosti a deformace je v tomto případě značně obtížnější než u lineárně pružného tělesa. Touto problematikou se zabývá speciální část mechaniky těles, s názvem **plasticita**.

Základní vlastnosti pružně-plastického tělesa je možné shrnout následovně:

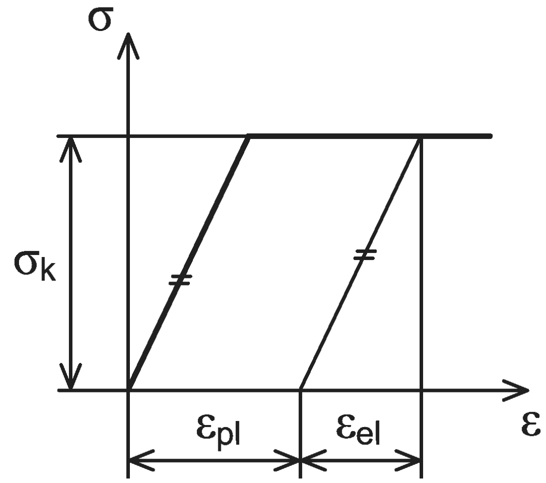
a) závislost mezi zatížením a deformačními posuvy resp. mezi napětím a deformací je v pružně-plastickém stavu nelineární. Jedním z důsledků je i to, že napjatost a deformace závisejí na celé historii zatěžování

b) neplatí princip superposice

c) plastická deformace nastává po překročení jisté mezní hodnoty napětí - meze kluzu σ_K

d) odlehčíme-li těleso z pružně plastického stavu při nehomogenní napjatosti, potom vzniknou v těles zbytková napětí (vlastní napjatost).

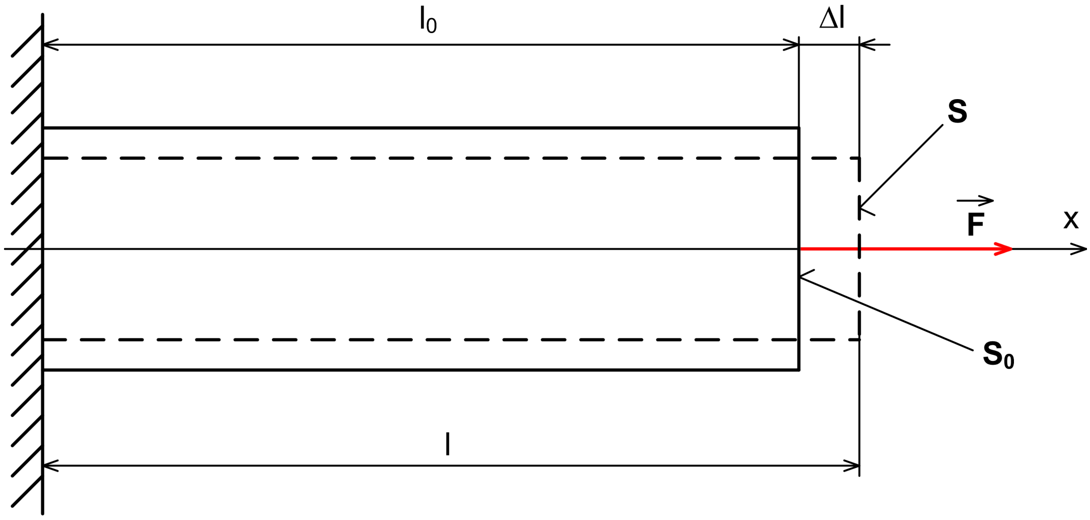
Nejjednodušším materiálovým výpočtovým modelem je zde tzv. **ideální pružně-plastický materiál**.

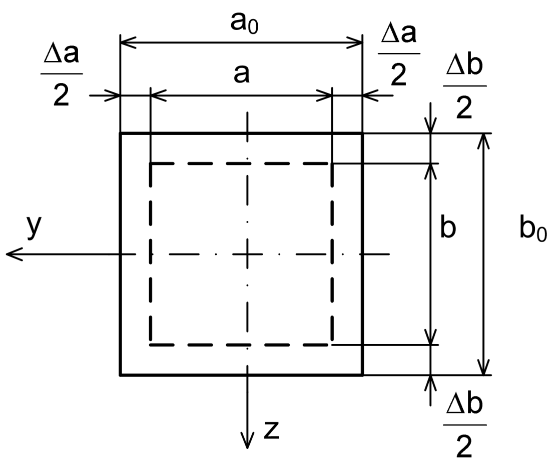


4 ZÁKLADNÍ MATERÁLOVÉ CHARAKTERISTIKY, TAHOVÁ A TLAKOVÁ ZKOUŠKA

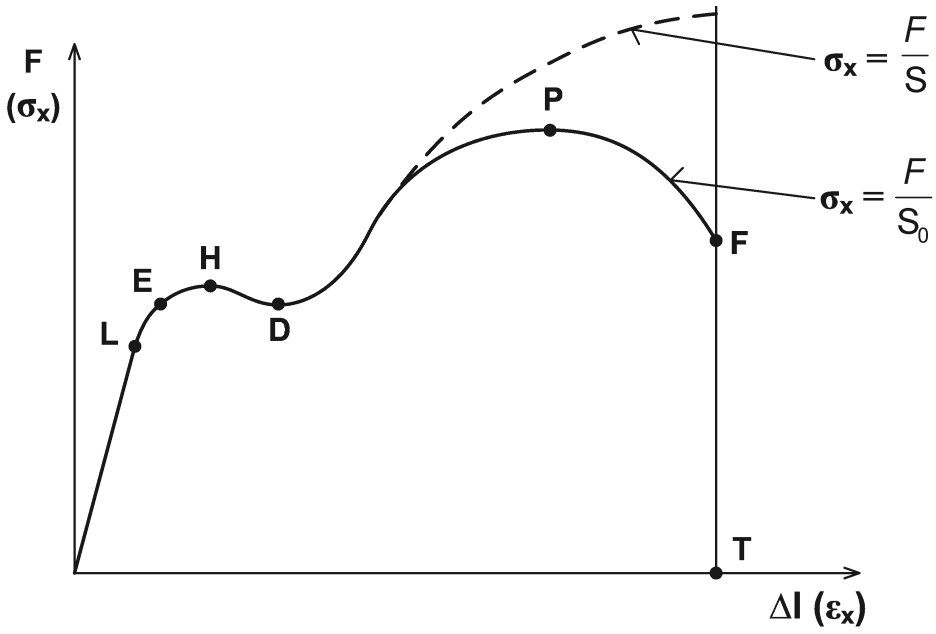
Pro řešení úlohy pružnosti a pevnosti jak v rámci obecné tak i prosté PP je nezbytné znát **konstitutivní vztahy materiálu**, které popisují závislost mezi napjatostí a deformací. Ty lze stanovit pouze experimentálně na základě vhodně uspořádaných zkoušek. Získané silově deformační charakteristiky se převedou na obecnější napjatostně-deformační charakteristiky, na základě kterých se formulují potřebné konstitutivní vztahy.

Základním experimentem v rámci PPI je tahová a tlaková zkouška





Tahový diagram pro ocel



Charakteristické body na tahovém diagramu

L - mez lineárního chování materiálu
E - mez pružného chování materiálu
H - horní mez kluzu
D - dolní mez kluzu
P - mez únosnosti (smluvní mez pevnosti)
F - počátek lomu
T - konec lomu

Smluvní napětí

$$\sigma_x = \frac{F}{S_0} \tag{4.1}$$

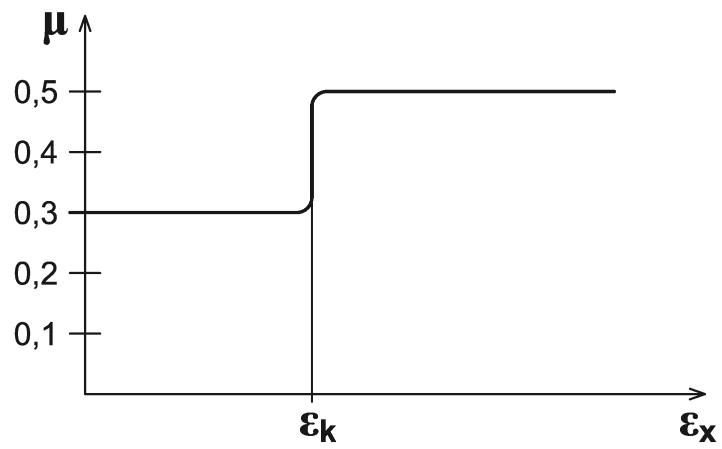
Poměrné deformace (poměrná přetvoření)

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a_0} \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta b}{b_0} \tag{4.2}$$

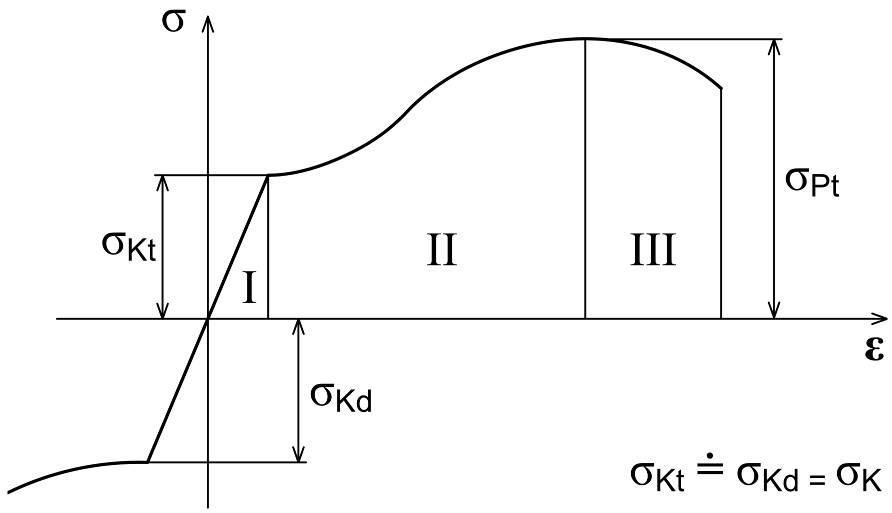
Poissonovo číslo (součinitel příčné kontrakce)

$$\mu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \tag{4.3}$$

Poissonovo číslo pro ocel



Pro pružnostně-pevnostní výpočet tahový diagram zjednodušujeme, vytváříme tzv. **výpočtový model materiálu**.



kde σ_{kt} je tzv. modelová mez kluzu.

Výpočtový model tahového diagramu vykazuje tři charakteristické oblasti

I **Oblast pružných deformací** (na inženýrské rozlišovací úrovni oblast **lineárně pružných deformací**), kde platí jednoduchá lineární závislost (Hookeův zákon)

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \qquad (\sigma = E\varepsilon) \tag{4.4}$$

E - **modul pružnosti v tahu**, ocel E $= (1,9 - 2,1) \cdot 10^5$ MPa

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x \tag{4.5}$$

μ - **Poissonovo číslo**, ocel μ = 0,3

Chování izotropního materiálu je popsáno dvěma nezávislými konstantami E a μ

Poměrné objemové přetvoření e (do $\sim 5\%$)

$$e = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{lab - l_0a_0b_0}{l_0a_0b_0} =$$

$$\frac{(l_0 + \overbrace{\Delta l}^{l_0\varepsilon_x})(a_0 + \overbrace{\Delta a}^{a_0\varepsilon_y})(b_0 + \overbrace{\Delta b}^{b_0\varepsilon_z}) - l_0a_0b_0}{l_0a_0b_0} =$$

$$= \frac{l_0(1+\varepsilon_x)a_0(1-\mu\varepsilon_x)b_0(1-\mu\varepsilon_x) - l_0a_0b_0}{l_0a_0b_0} =$$

$$= (1+\varepsilon_x)(1-\mu\varepsilon_x)(1-\mu\varepsilon_x) - 1 =$$

$$= \varepsilon_x - \mu\varepsilon_x - \mu\varepsilon_x - \underbrace{\mu\varepsilon_x^2 - \mu\varepsilon_x^2}_{\text{malé, zanedbáme}} \doteq$$

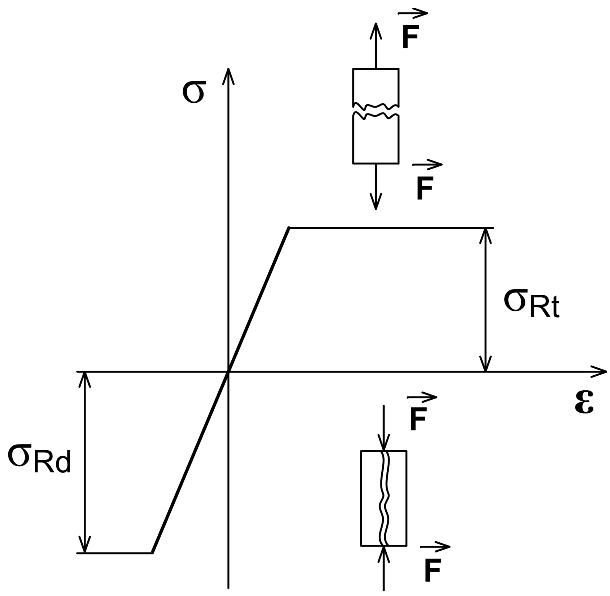
$$\doteq \varepsilon_x(1 - 2\mu) \tag{4.6}$$

Z předchozího vztahu vyplývá následující omezení pro hodnotu μ

$$\mu \leqq 0,5 \tag{4.7}$$

Tato relace je důsledkem podmínky, že při tahovém namáhání musí dojít ke zvětšení objemu, tedy $e \geqq 0$. V případě krajní hodnoty μ = 0,5 hovoříme o tzv. nestlačitelném materiálu.

Uvedený tvar tahového diagramu odpovídá materiálu ve **stavu tvárném**. Tahový diagram materiálu ve **stavu křehkém** má jiný charakteristický tvar:



Zavádí se tu součinitel $\varkappa$

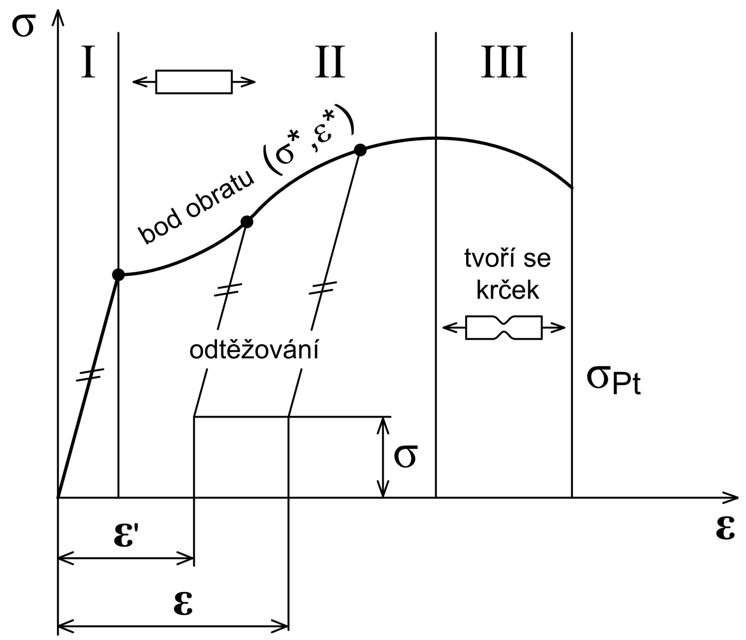
$$\varkappa = \frac{\sigma_{Rt}}{\sigma_{Rd}} \qquad \text{Litina } 0,25 \div 0,3 \tag{4.8}$$

$\boldsymbol{\sigma_{Rt}}$ **- křehká mez pevnosti v tahu**
$\boldsymbol{\sigma_{Rd}}$ **- křehká mez pevnosti v tlaku**

Tahový diagram má v tomto případě přibližně lineární charakter.

II **Oblast rovnoměrných pružně-plastických deformací**

Ve sledované oblasti se vzorek zužuje po celé délce rovnoměrně. Monotonní zatěžování se děje po tahové křivce, odtěžování probíhá po přímce se stejným sklonem jako v oblasti I



Napětí při odtěžování je dáno vztahem

$$\sigma = \sigma^* - E(\varepsilon^* - \varepsilon) \tag{4.9}$$

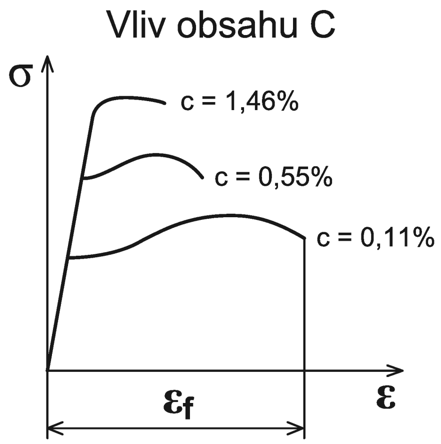
Deformace v této oblasti závisí na historii zatěžování

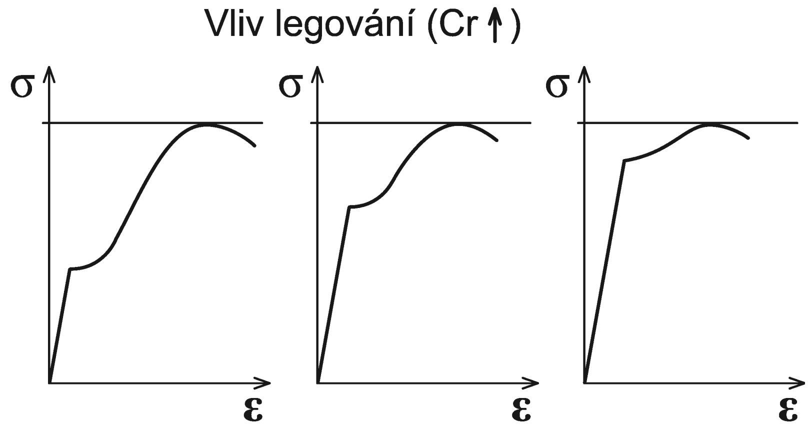
III **Oblast nerovnoměrných pružně-plastických deformací**

Dochází k lokální koncentraci plastické deformace a vzniká zúžení - krček. V rámci prosté PP nedokážeme určit napjatost a deformaci.

Vlivy na tahový diagram

1) Vlivy metalurgické (chemické složení materiálu)





$C \uparrow \quad \sigma_{Kt} \uparrow \quad \varepsilon_f \downarrow$

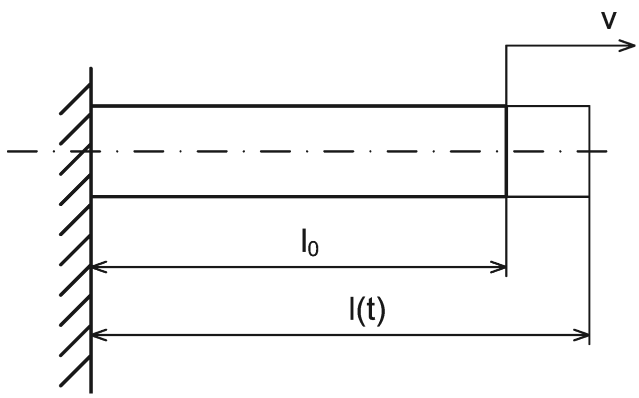
$Cr \uparrow \quad \sigma_{Kt} \uparrow$

2) Vliv teploty

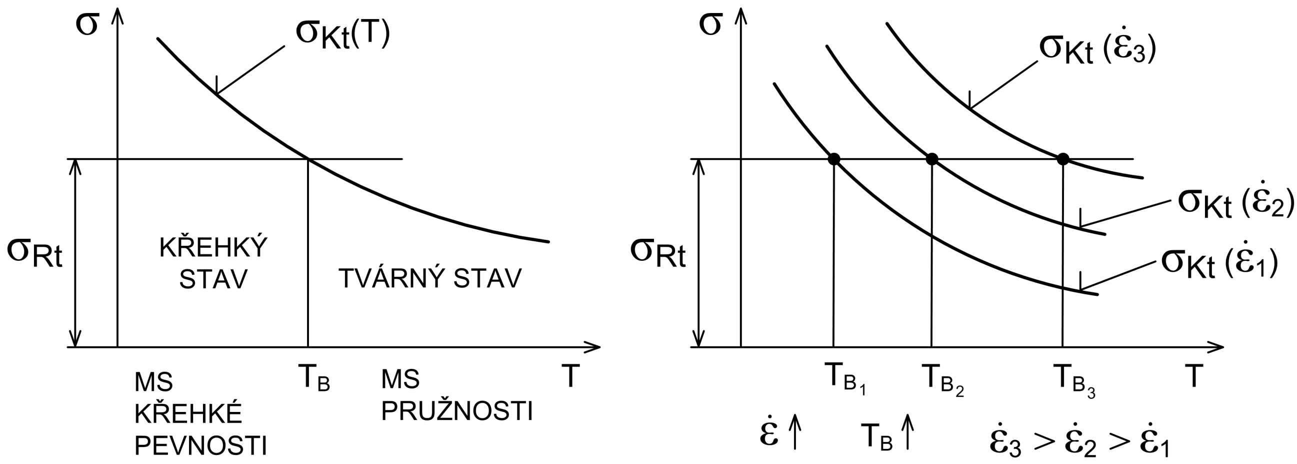
$T \uparrow \quad \sigma_{Kt} \downarrow \quad \varepsilon_f \uparrow$

3) Rychlost zatěžování

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varepsilon = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{l - l_0}{l_0} \doteq \frac{v}{l_0} = \frac{\text{rychlost čela tyče}}{\text{původní délka tyče}}$$

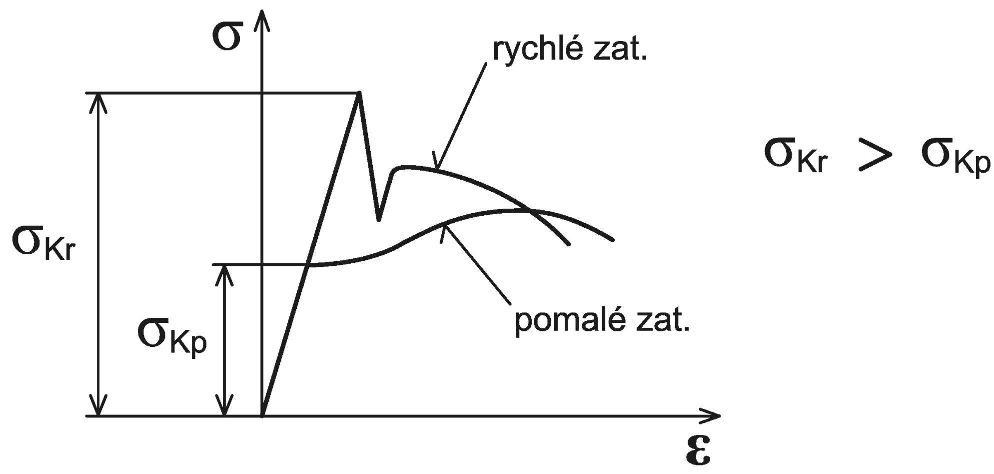


Vliv na transitní teplotu křehkosti T_B



S růstem rychlosti přetvoření $\dot{\varepsilon}$ roste náchylnost ke křehkému lomu, jelikož transitní teplota T_B se zvyšuje.

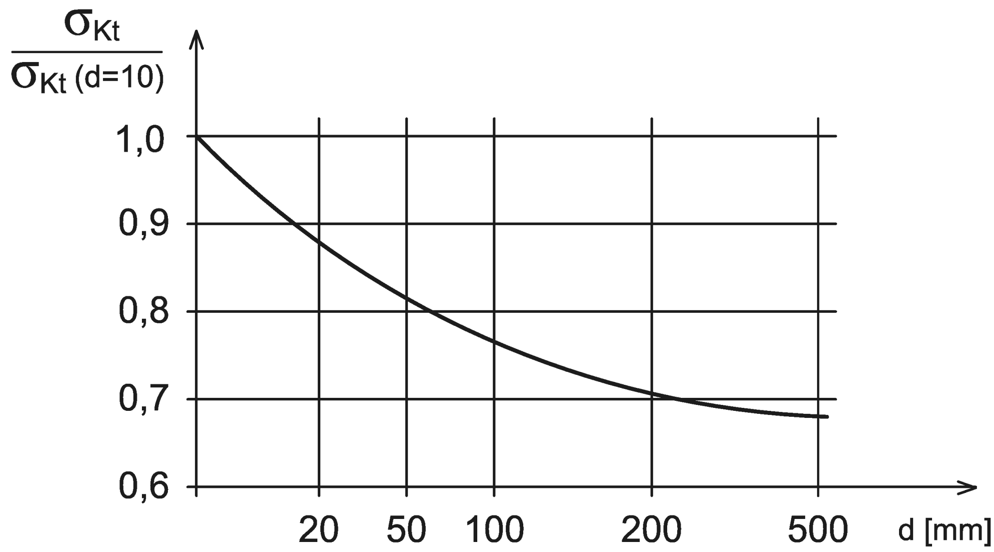
Tahový diagram při pomalém (statickém) a rychlém (dynamickém) zatěžování



4) Vliv velikosti tělesa

Tahový diagram $\sigma(\varepsilon)$ je materiálovou charakteristikou, která není podstatně závislá na velikosti zkušebních tyčí, pokud je zajištěna homogenita chemického složení, struktury, napjatosti, defektů, atd.
U některých mechanických charakteristik je závislost na velikosti vzorku menší (modul pružnosti E, Poissonovo číslo μ), u jiných větší (mez kluzu σ_K, křehká mez pevnosti σ_R, mez únavy σ_u, tranzitní teplota křehkosti T_B).

Pro ilustraci je v následujícím grafu uvedena závislost meze kluzu na velikosti zkušebního tělesa



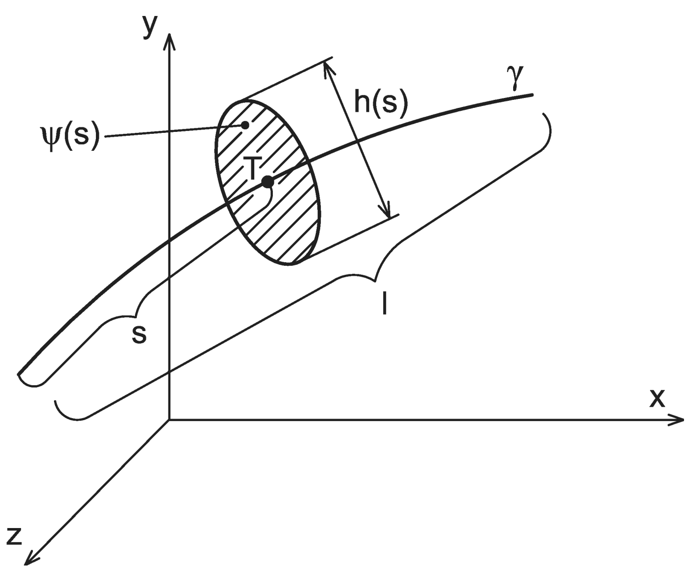
5 PRUT V PRUŽNOSTI A PEVNOSTI

5.1 Prutové předpoklady

Prut je nejjednodušším výpočtovým modelem reálného tělesa z hlediska vyšetřování deformace a napjatosti. Musí splňovat jisté **geometrické, deformační a napjatostní předpoklady**, které souhrnně nazýváme **prutovými předpoklady**.

a) Předpoklady geometrické

Prut je geometricky určen střednicí γ a příčným průřezem $\psi(s)$ v každém místě střednice s



- střednice γ je spojnice těžišť průřezů ψ ; střednice γ je spojitá křivka

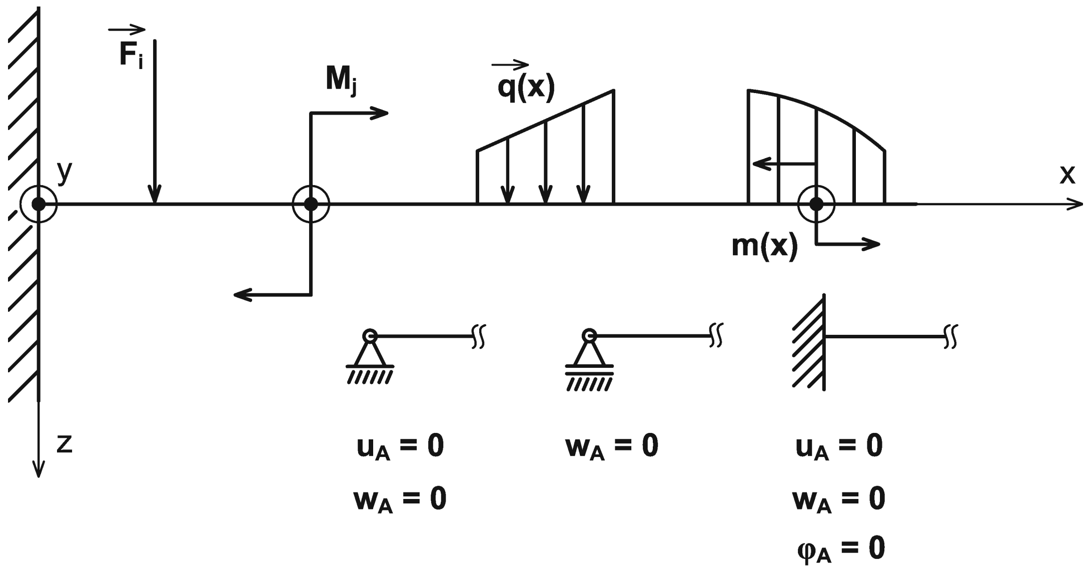
- průřez ψ je jedno- či vícenásobně souvislá oblast vymezená rovnicí hranice

- délka střednice l je minimálně stejně veliká jako největší rozměr h_{max} příčného průřezu, většinou $l \gg h_{max}$.

b) Předpoklady zatěžovací a vazbové

- zatížení působí na střednici

- vazby omezují posuv a natočení střednice

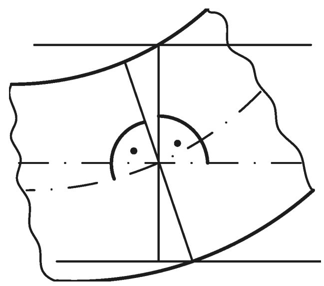


Uvažujeme vazby bodové (kloubová podpora pevná, posuvná) a vetknutí.

c) Předpoklady deformační

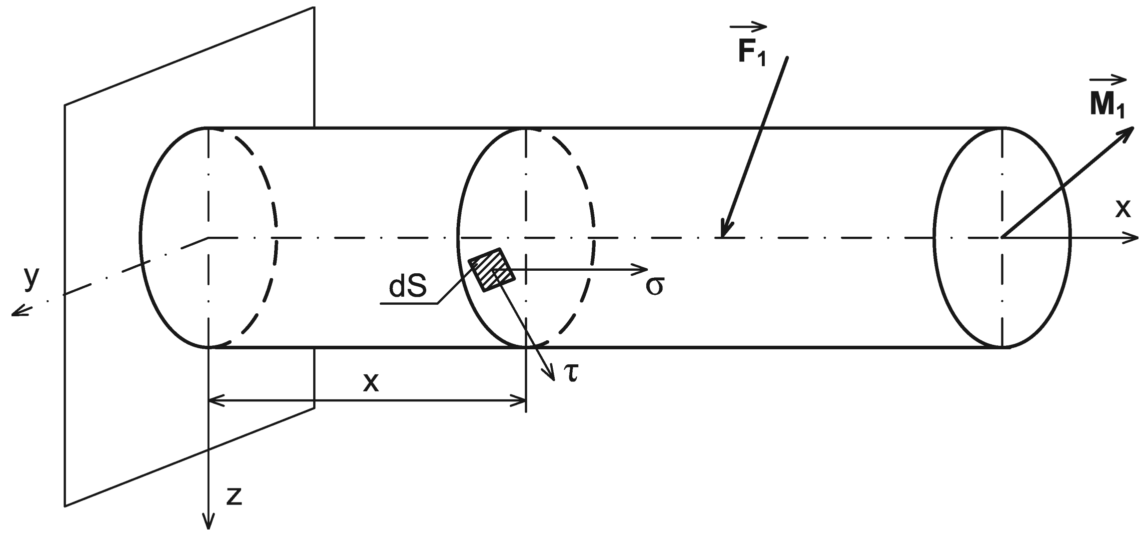
- střednice γ zůstává po zatížení spojitou křivkou

- příčné průřezy ψ zůstávají i po deformaci rovinnými a kolmými ke zdeformované střednici



d) Předpoklady napjatostní

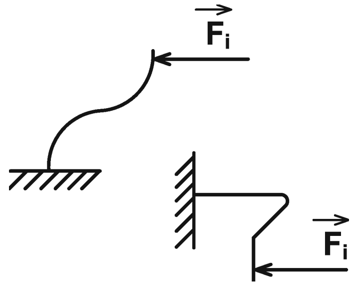
- napjatost u prutu je určena normálovým napětím σ a smykovým napětím τ v příčném průřezu



5.2 Klasifikace prutů

5.2.1 Hledisko geometrické

a) Dle křivosti střednice



- pruty přímé

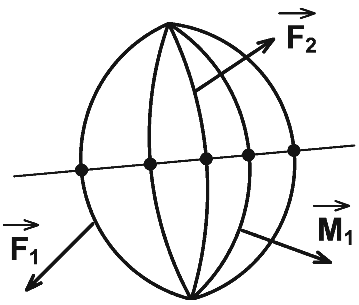
- pruty křivé - rovinné, prostorové

b) Dle uzavřenosti střednice

- pruty otevřené

- pruty uzavřené

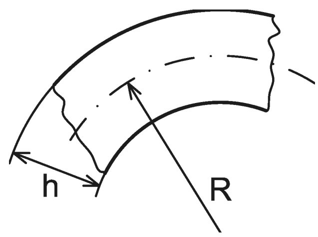
Def. Prut považujeme za **n-krát uzavřený**, můžeme-li ho rozdělit na dvě části řezem, obsahujícím **n+1 bodů střednice**



c) Dle poměru rozměru příčného průřezu a poloměru křivosti střednice

- pruty slabě zakřivené $\frac{h}{R} \leq \frac{1}{5}$

- pruty silně zakřivené $\frac{h}{R} > \frac{1}{5}$



c) Dle proměnlivosti průřezu

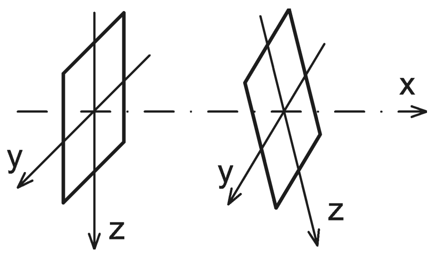
- pruty konstantního průřezu - prismatické

- pruty proměnlivého průřezu - spojitá změna, skoková změna (vrub)

c) Dle natočení průřezu

- pruty nešroubové - hlavní centrální osy kvadratických momentů průřezů se nenatáčejí

- pruty šroubové



5.2.2 Hledisko vazeb

- pruty volné

- pruty vázané

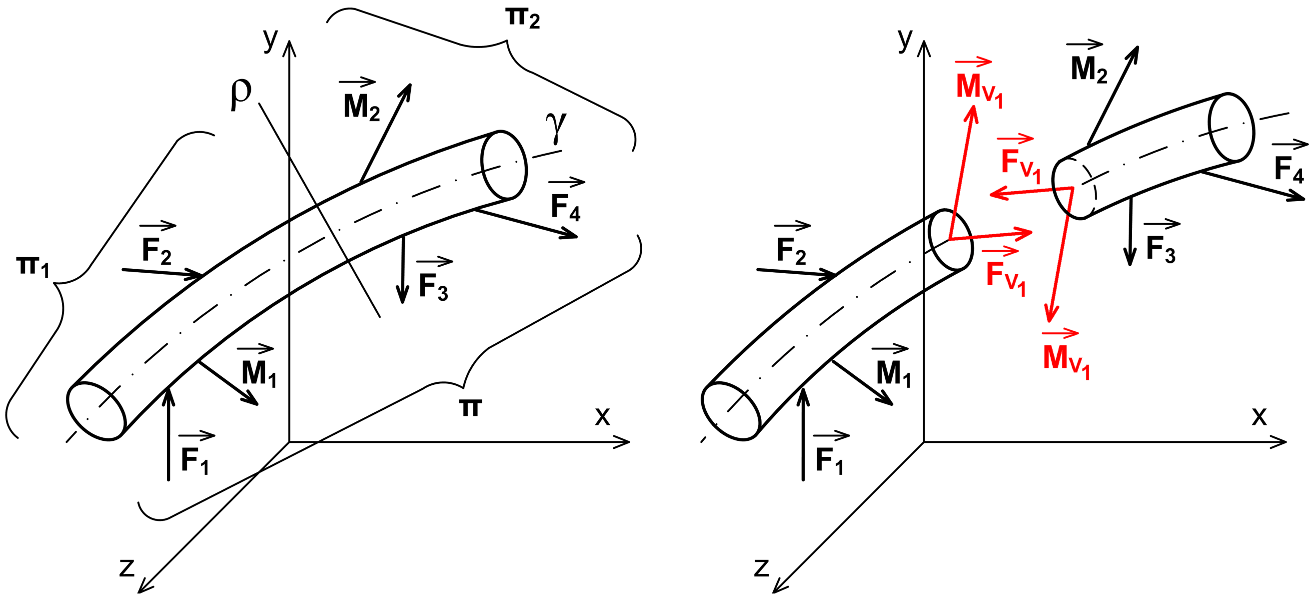
a) staticky určité - stykové výslednice je možné stanovit na základě statických podmínek rovnováhy

b) staticky neurčité - stykové výslednice se stanoví na základě statických podmínek rovnováhy a příslušného počtu deformačních podmínek

5.3 Určování napjatosti a deformace v příčném průřezu

Úlohu řešíme ve dvou krocích. Nejprve stanovíme v řezu **výsledné vnitřní (silové) účinky** (VVU) a následně **napjatost a deformaci**.

VVU se stanoví na základě statických podmínek rovnováhy prvku prutu, uvolněného příčným řezem ρ.



Vnější síly a silové dvojice fyzicky působí na povrchu prutu, modelově však na střednici.

Statický rozbor pro volný otevřený prut:

$$VVU = \left\{F_{V_x}, F_{V_y}, F_{V_z}, M_{V_x}, M_{V_y}, M_{V_z}\right\}$$

$\mu = 6 \qquad \nu = 6$

$s = \mu - \nu = 0$

Stanovení složek VVU je v tomto případě úlohou staticky určitou, což platí i v rovinném případě.

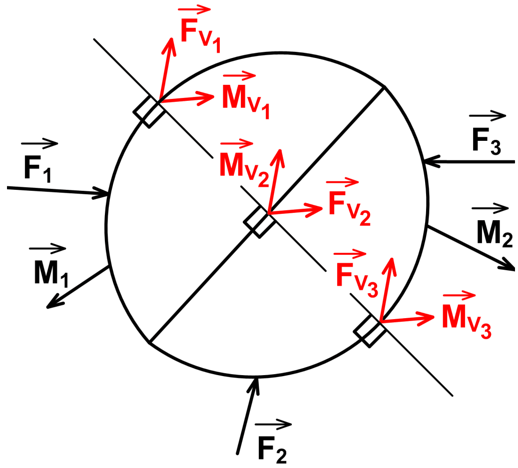
Statický rozbor pro uzavřený prut:

$\mu = 3 \cdot 6 = 18$

$\nu = 6$

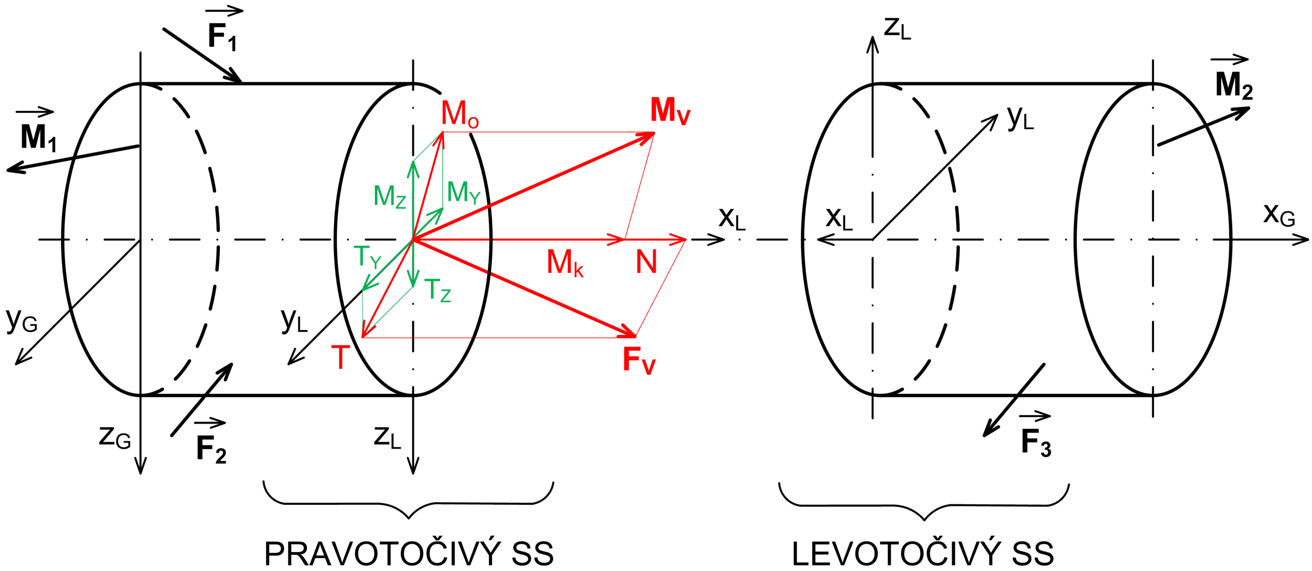
$s = 18 - 6 = 12$

obecně $s = 6 \cdot n$
kde n je stupeň uzavřenosti prutu



Stanovení složek VVU je v případě uzavřeného prostorového prutu úloha $6 \cdot n$ krát, u rovinného prutu potom $3 \cdot n$ krát staticky neurčitá.

Výslednou vnitřní sílu $\vec{F}_V$ a výsledný vnitřní moment $\vec{M}_V$ je možné rozdělit v souladu s lokálním souřadnicovým systémem (SS). Složky síly a momentu potom představují charakteristický způsob namáhání s jasným fyzikálním významem.



N - normálná síla $\quad$ T - posouvající síla
M_o - ohybový moment $\quad$ M_k - kroutící moment

$VVU = \{N, T_y, T_z, M_y, M_z, M_x\} = \{N, T, M_o, M_k\}$

Def: Jestliže v průřezu působí pouze jedna složka VVU,
potom jde o tzv. **jednoduché namáhání prutů**.

Příklady:

Jednoduchý tah $VVU = \{N_+, 0,\ 0,\ \ 0\}$

Jednoduchý tlak $VVU = \{N_-, 0,\ 0,\ \ 0\}$

Jednoduchý ohyb $VVU = \{\ 0\ \ , 0, M_o, 0\}$

Jednoduchý krut $VVU = \{\ 0\ \ , 0,\ 0, M_k\}$

Působí-li v řezu prutu více složek hovoříme o tzv. **kombinovaném namáhání prutů**. Typickým případem je kombinované namáhání na ohyb a krut s následujícím vektorem VVU

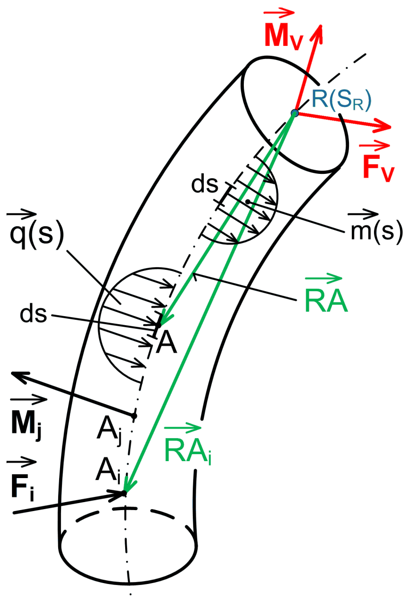
Kombinované namáhání na ohyb a krut $VVU = \{0, 0, M_o, M_k\}$

5.3.1 Algoritmus určování VVU, integrální a diferenciální vztahy mezi vnějším zatížením a složkami VVU

Integrální vztahy:

Řešíme podmínky statické rovnováhy prvku prutu uvolněného příčným rovinným řezem v místě S_R.

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$



$$\sum_i \vec{F}_i + \int_0^{S_R} \vec{q}(s)\,\mathrm{d}s + \vec{F}_v = 0 \qquad (5.1)$$

$$\vec{F}_v = -\sum_i \vec{F}_i - \int_0^{S_R} \vec{q}(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\sum M_R = 0$$

$$\sum_i \left(\overrightarrow{RA_i} \times \vec{F}_i\right) + \int_0^{S_R} \left(\overrightarrow{RA} \times \vec{q}(s)\right) \mathrm{d}s +$$

$$+\sum_j \vec{M}_j + \int_0^{S_R} \vec{m}(s)\,\mathrm{d}s + \vec{M}_v = 0 \qquad (5.2)$$

$$\vec{M}_v = -\sum_i \left(\overrightarrow{RA_i} \times \vec{F}_i\right) - \int_0^{S_R} \left(\overrightarrow{RA} \times \vec{q}(s)\right) \mathrm{d}s - \sum_j \vec{M}_j - \int_0^{S_R} \vec{m}(s)\,\mathrm{d}s$$

Vztahy (5.1) a (5.2) představují integrální relace mezi vnějšími a vnitřními silovými účinky. Lze je vyjádřit následovně

Výsledná vnitřní síla $\vec{F}_v$ je v rovnováze (resp. je rovna s opačným znaménkem) se součtem všech vnějších sil, působících na uvolněný prvek.

Výsledný vnitřní moment $\vec{M}_v$ je v rovnováze (resp. je roven s opačným znaménkem) se součtem momentů všech vnějších sil a momentů silových dvojic, působících na uvolněný prvek.

Analýzou vztahů (5.1) a (5.2) dospějeme k následujícím poznatkům

Skok v průběhu vnitřní síly $\vec{F}_v$ je tam, kde působí vnější osamělá síla.

Skok v průběhu vnitřního momentu $\vec{M}_v$ je tam, kde působí vnější silové dvojice.

Diferenciální vztahy (Schwedlerovy věty):

Dvěma příčnými rovinnými řezy uvolníme elementární prvek prutu, v řezech zavedeme příslušné složky VVU a formulujeme podmínky statické rovnováhy pro rovinnou silovou soustavu.

Znaménková konvence pro složky VVU:

Normálová síla $\boldsymbol{N}$ v řezu je kladná, je-li tahová.

Posouvající síla $\boldsymbol{T}$ v řezu je kladná, jestliže otáčí elementem v řezu ve směru hodinových ručiček .

Ohybový moment $\boldsymbol{M}$ je kladný, pokud namáhá spodní vlákna prutu tahově a horní tlakově.

$\sum F_x = 0$

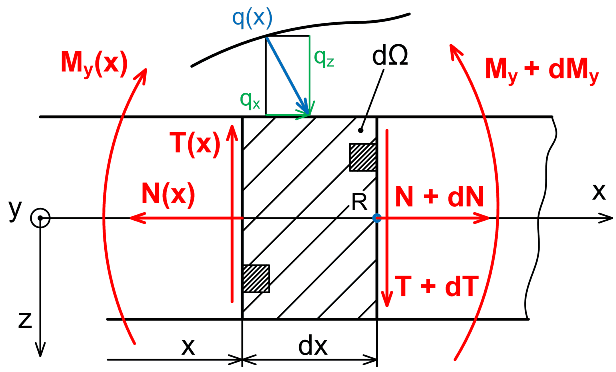
$N + \mathrm{d}N - N + q_x \mathrm{d}x = 0$

$q_x(x) = -\frac{\mathrm{d}N(x)}{\mathrm{d}x}$ (5.3)

$\sum F_z = 0$

$T + \mathrm{d}T - T + q_z\, \mathrm{d}x = 0$

$q_z(x) = -\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}$ (5.4)



$$\sum M_R = 0 \qquad M_y - M_y - \mathrm{d}M_y + T\,\mathrm{d}x - \overbrace{q_z\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}x}{2}}^{\doteq 0} = 0$$

$T(x) = \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x}$ (5.5)

$(3) \;\rightarrow\; (2) \;\; q_z(x) = -\frac{\mathrm{d}^2 M_y}{\mathrm{d}x^2}$ (5.6)

Předchozí vztahy 5.3 až 5.6 se nazývají **Schwedlerovy věty**.

Analýzou vztahů (5.3)-(5.5) dospějeme k následujícím poznatkům:

Zlom v průběhu normálové síly $N(x)$ je v místě skokové změny osové složky liniové síly $q_x(x)$.

Zlom v průběhu posouvající síly $T(x)$ je v místě skokové změny normálové složky liniové síly $q_z(x)$.

Zlom v průběhu ohybového momentu $M_y(x)$ je v místě skokové změny posouvající síly $T(x)$, tedy tam, kde působí osamělá síla (respektive její složka), kolmá k ose prutu.

Ze vztahu (5.5) dále vyplyne podmínka pro **lokální extrém** ohybového momentu $M_y(x)$

$$\frac{\mathrm{d}M_y(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \overset{(5.5)}{=} T(x)$$

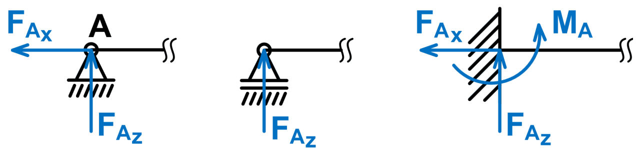
kterou je možné vyslovit následovně:

Lokální extrém ohybového momentu $M_y(x)$ je v tom místě x, kde je nulová hodnota posouvající síly $T(x)$, respektive kde posouvající síla mění své znaménko.

5.4 Pruty vázané

Prut uvolníme v místech vazeb, které nahradíme **stykovými výslednicemi** (reakcemi). Dále stanovíme celkový počet neznámých parametrů stykových výslednic

$$\mu = \sum \mu_i$$

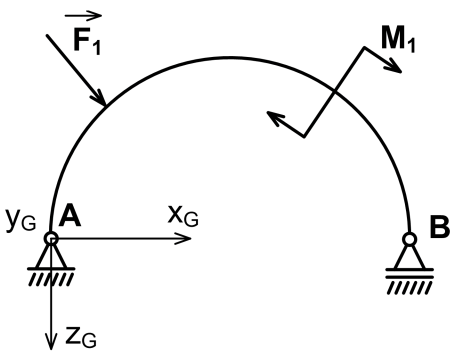


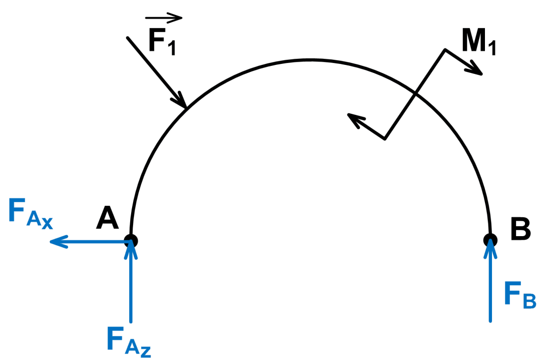
Provedeme statický rozbor silové soustavy

$$s = \mu - \nu \qquad \begin{aligned} &\nu = 3 \qquad 2-D \\ &\nu = 6 \qquad 3-D \end{aligned}$$

a) Prut je **staticky určitý** (nepohyblivý) (s = 0)

Stykové výslednice stanovíme na základě podmínek statické rovnováhy a dále při stanovování napjatosti a deformace postupujeme jako u prutu volného.





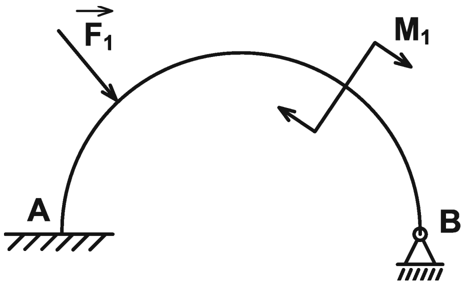
$$\mu = 3 \ ; \ \nu = 3$$
$$s = \mu - \nu = 3 - 3 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \ ; \ \sum F_z = 0 \ ; \ \sum M_A = 0$$

$$\Longrightarrow F_{Ax}, F_{Az}, F_B$$

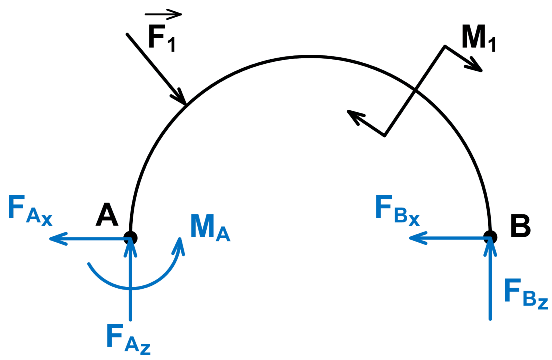
a) Prut je **staticky neurčitý** (nepohyblivý) ($s > 0$)

Stykové výslednice se určí pomocí podmínek statické rovnováhy a z **deformačních podmínek**



Algoritmus řešení:

1. Provedeme úplné uvolnění prutu z vazeb, které nahradíme staticky ekvivalentními silovými výslednicemi



Provedeme statický rozbor a napíšeme podmínky statické rovnováhy

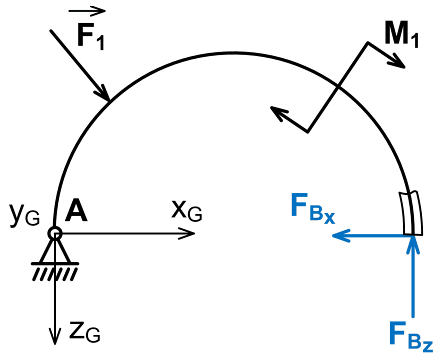
$$\mu = 5 \ ; \ \ \nu = 3 \ ; \ \ s = \mu - \nu = 5 - 3 = 2$$

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad \sum F_z = 0 \quad ; \quad \sum M_A = 0$$

Ze statického rozboru vyplývá, že jsou nutné 2 deformační podmínky.

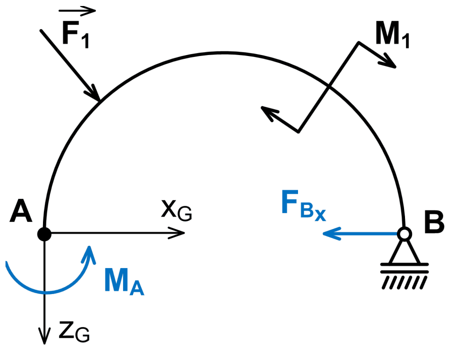
2. Provedeme **částečné uvolnění prutu** z vazeb na úroveň úlohy staticky neurčité (a nepohyblivé). Deformační podmínky formulujeme pro uvolněné vazby. Existuje více možností.

a)



$$u_B = 0$$
$$u_B = \frac{\partial W}{\partial F_{Bx}} = 0$$
$$w_B = 0$$
$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_{Bz}} = 0$$
$$W = W\left(F_1, M_1, \underline{F_{Bx}}, \underline{F_{Bz}}\right)$$

a)



$$u_B = 0$$
$$u_B = \frac{\partial W}{\partial F_{Bx}} = 0$$
$$\varphi_A = 0$$
$$\varphi_A = \frac{\partial W}{\partial M_A} = 0$$
$$W = W\left(F_1, M_1, \underline{F_{Bx}}, \underline{M_A}\right)$$

3. Deformační podmínky se řeší pomocí poznatků Pružnosti a pevnosti I, zejména použitím Castiglianovy věty. Z matematického pohledu představují tyto vztahy podmínky pro lokální extrém energie napjatosti $W(F_1, M_1, F_{Bx}, F_{Bz})$ jako složené funkce stykových výslednic, příslušejících uvolněným vazbám. Dostáváme soustavu lineárních rovnic, ze kterých se stanoví tyto stykové výslednice. Ostatní stykové výslednice určíme z podmínek statické rovnováhy.

6 NAMÁHÁNÍ NA TAH A TLAK

6.1 Základní vztahy

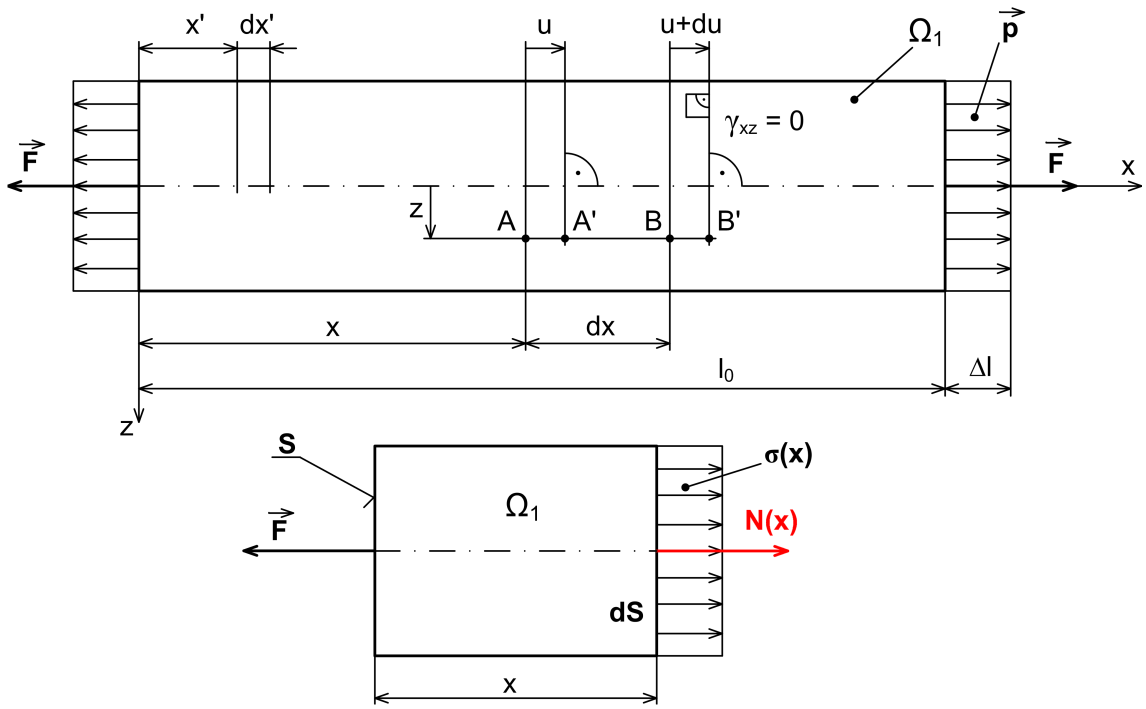
Základní vztahy pro napětí, deformaci a energii napjatosti odvodíme pro idealizovaný modelový případ **prostého tahu**.

Def: **Prostým tahem (tlakem)** nazýváme namáhání přímého prizmatického prutu, je-li splněno

a) platí obecné prutové předpoklady

b) příčné průřezy se vzájemně oddalují nebo přibližují, přičemž zůstávají rovinnými a kolmými ke střednici. Střednice zůstává přímková

c) jedinou nenulovou složkou VVU je normálová síla N



$$\sum F_x = 0 \qquad N(x) = F \tag{6.1}$$

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{(\mathrm{d}x + u + \mathrm{d}u - u) - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{6.2}$$

$\varepsilon_x(x) =$ konst. $\neq f(y, z)$!

S ohledem na předpoklad b) platí, že poměrné přetvoření ε_x v řezu x je konstantní a nezávisí na souřadnicích y a z. Pro zbylá dvě přetvoření ε_y, ε_z dostáváme v souladu s poznatky z tahové zkoušky

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x \qquad (6.3) \qquad \mu\text{- Poissonovo číslo}$$

Vzhledem k tomu, že v průběhu zatěžování nedochází ke změně pravých úhlů u elementů v řezu (viz obr.), jsou příslušné zkosy nulové, tedy

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \qquad (6.4) \qquad \text{(pro 3-D)}$$

Deformace u prostého tahu (tlaku) je prostorová (3-D).

Hookeův zákon pro prostý tah a prostý smyk

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \qquad (6.5) \qquad\qquad \tau = G\gamma \qquad (6.6)$$

Kde ***G*** je **modul pružnosti ve smyku**, definovaný vztahem

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad (6.7)$$

Vzhledem k tomu, že ε_x je po průřezu konstantní a zkosy jsou dle (6.4) nulové, platí v souladu s Hookeovým zákonem (6.5) a (6.6) pro složky napětí následující relace

$$\sigma_x = \sigma \;\; ; \;\; \sigma_y = \sigma_z = 0 \;\; ; \;\; \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \qquad (6.8)$$

Napjatost při prostém tahu (tlaku)je jednoosá - 1-D.

Vzhledem ke konstantnímu průběhu poměrného přetvoření ε_x v řezu a k platnosti Hookeova zákona (6.5) **je průběh napětí $\boldsymbol{\sigma_x}$ v řezu rovněž konstantní**.

Z podmínky statické ekvivalence a s ohledem na konstantní průběh napětí σ_x po průřezu dostáváme

$$N(x) = \int_{\psi} \sigma_x \, \mathrm{d}S = \sigma_x S$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)} = \frac{F}{S} \tag{6.9}$$

Posunutí u v místě x

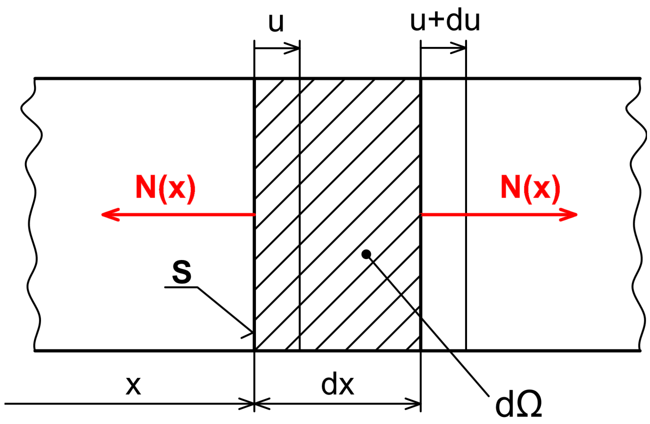
$$u(x) = \int_0^x \mathrm{d}u' = \int_0^x \varepsilon_x \, \mathrm{d}x' = \int_0^x \frac{\sigma(x')}{E} \, \mathrm{d}x' =$$

$$= \int_0^x \frac{N(x') \, \mathrm{d}x'}{ES(x)} = \frac{Nx}{ES} \tag{6.10}$$

Celkové prodloužení prutu Δl

$$u(l) = \Delta l = \frac{Nl}{ES} = \frac{Fl}{ES}$$

Energie napjatosti



Energie napjatosti elementárního prvku dΩ

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}A = -\frac{1}{2}Nu + \frac{1}{2}N(u+\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}N\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}N\varepsilon_x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}N\,\frac{\sigma_x}{E}\,\mathrm{d}x = \frac{N^2\,\mathrm{d}x}{2ES} \tag{6.11}$$

Energie napjatosti celého prutu

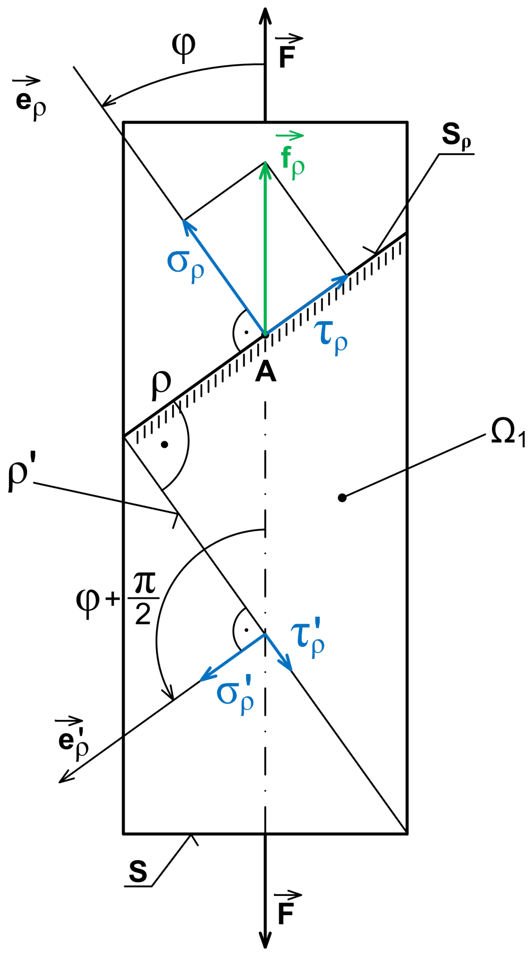
$$W = \int_\gamma \mathrm{d}W = \int_o^l \frac{N^2(x)\,\mathrm{d}x}{2ES(x)} = \frac{N^2 l}{2ES} = \frac{F^2 l}{2ES} \tag{6.12}$$

Měrná energie napjatosti při prostém tahu (tlaku)

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{N^2\,\mathrm{d}x}{2ESS\,\mathrm{d}x} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} \tag{6.13}$$

6.2 Napjatost v šikmém řezu, rozbor tahové napjatosti

Šikmým řezem ρ s plochou S_ρ uvolníme z tělesa Ω prvek Ω_1.



Z poznatků analytické geometrie vyplývá

$$S_\rho = \frac{S}{\cos\varphi} \tag{6.14}$$

Pro obecné napětí $\vec{f}_\rho$ v šikmém řezu ρ a jeho složky σ_ρ a τ_ρ dostáváme

$$f_\rho = \frac{F}{S_\rho} = \frac{F\cos\varphi}{S} = \sigma\cos\varphi \tag{6.15}$$

$$\sigma_\rho = f_\rho\cos\varphi = \sigma\cos^2\varphi = \frac{\sigma}{2}(1+\cos 2\varphi) \tag{6.16}$$

$$\tau_\rho = f_\rho\sin\varphi = \sigma\cos\varphi\sin\varphi = \frac{\sigma}{2}\sin 2\varphi \tag{6.17}$$

kde σ je normálové napětí v příčném řezu.

Maximální hodnoty složek napětí (6.16), (6.17) $\Longrightarrow$

$\sigma_{\rho,max} = \sigma \qquad \cos 2\varphi = 1 \qquad \varphi = 0, \pi, 2\pi$

$\tau_{\rho,max} = \frac{\sigma}{2} \qquad \sin 2\varphi = 1 \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} = 45°$

Maximální normálové napětí $\sigma_{\rho,max}$ je v příčném řezu (φ = 0)

Maximální smykové napětí $\tau_{\rho,max}$ je v řezu s úhlem normály φ = 45°

Složky napětí v kolmém řezu ρ':

Normála tohoto řezu je pod úhlem $\beta = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$\sigma_{\rho'} = \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\beta) = \frac{\sigma}{2}[1 + \cos(2\varphi + \pi)] =$$

$$= \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\varphi) \neq \sigma_\rho$$

$$\tau_{\rho'} = \frac{\sigma}{2}\sin 2\beta = \frac{\sigma}{2}\sin(2\varphi + \pi) =$$

$$= -\frac{\sigma}{2}\sin 2\varphi = -\tau_\rho$$

Předchozí vztahy je možné vyjádřit slovně formou tzv. **věty o sdruženosti smykových napětí**:

Smyková napětí ve dvou vzájemně kolmých rovinách, kolmá k společné průsečnici jsou stejně veliká a míří buď do společné průsečnice nebo od ní.

Tato věta platí obecně i v případě prostorové napjatosti.

Grafické znázornění tahové napjatosti v Mohrově rovině (σ_ρ, τ_ρ)

Algebraickou úpravou vztahů (6.16) a (6.17) dostáváme

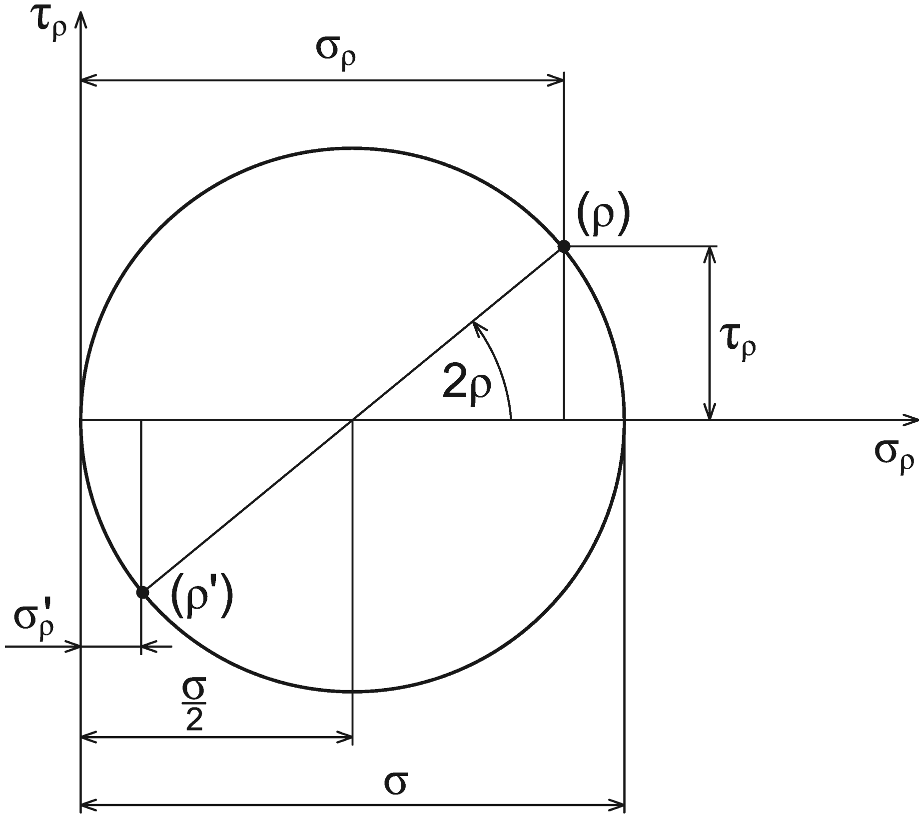
$$\sigma - \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma}{2}\cos 2\varphi \qquad /^2$$

$$\tau_\rho = \frac{\sigma}{2}\sin 2\varphi \qquad /^2$$

Umocněním a sečtením obou rovnic dostáváme následující rovnici

$$\left(\sigma - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau_\rho^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 \tag{6.18}$$

která představuje v **Mohrově rovině** se souřadnicovými osami σ_ρ a τ_ρ rovnici kružnice se středem v místě $\sigma = \frac{\sigma}{2}$ a s poloměrem $\frac{\sigma}{2}$. Uvedená kružnice má název **Mohrova kružnice**.



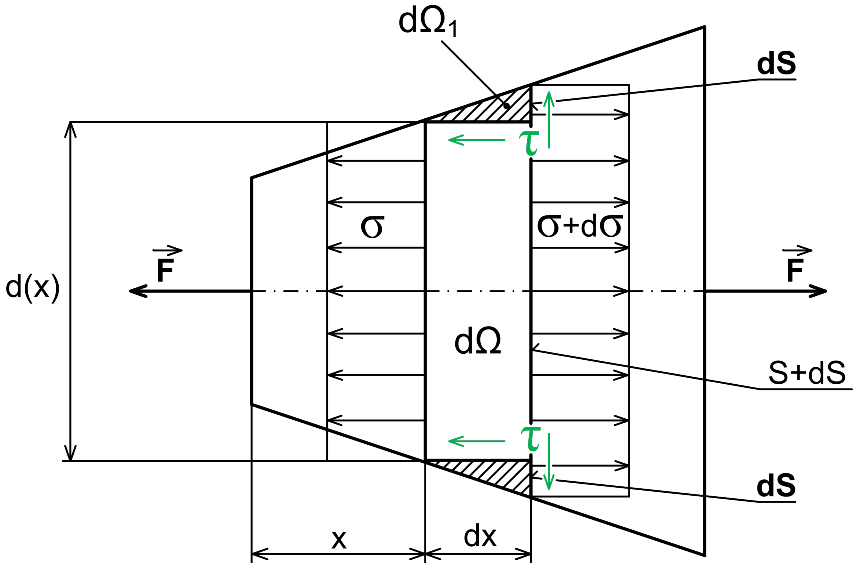
Mohrova kružnice je geometrické místo bodů, odpovídajících složkám napětí σ_ρ a τ_ρ ve všech řezech ρ, které procházejí bodem A. **Napjatost při prostém tahu je tedy geometricky určena Mohrovou kružnicí.**

Úhlu natočení φ mezi řezy ρ odpovídá dvojnásobný úhel mezi odpovídajícími body na Mohrově kružnici a to ve stejném smyslu.

Případ prostého tahu (tlaku) je ideálním modelovým případem, který prakticky neexistuje. Probereme si nyní vliv nejčastějších odchylek od tohoto případu.

6.2.1 Vliv změny příčného průřezu podél střednice

a) změna spojitá



Podmínka silové rovnováhy pro elementární prvek $d\Omega_1$ v axiálním směru

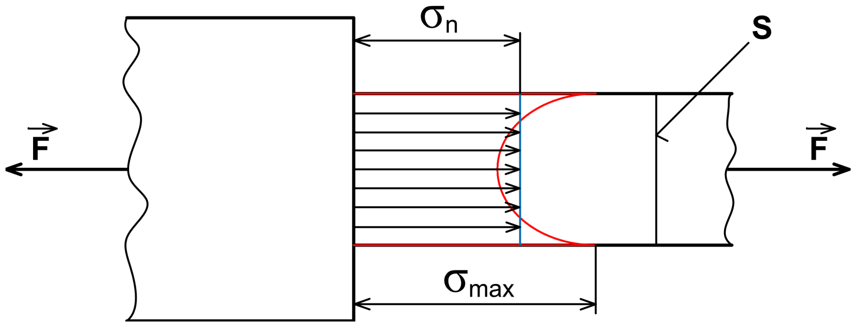
$$(\sigma + \overbrace{\mathrm{d}\sigma}^{\doteq 0})\mathrm{d}S - \tau \pi d(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

$$\tau = \frac{\sigma}{\pi d(x)} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \tag{6.19}$$

U veliké většiny praktických případů je symkové napětí τ velmi malé $\tau \ll \sigma$ a můžeme je vůči normálovému napětí σ zanedbat.

b) změna skoková (konstrukční vrub)

V místě vrubu vzniká prostorová napjatost a dochází zde ke koncentraci napětí. Vliv vrubu na napjatost vyjadřujeme smluvně **součinitelem koncentrace napětí α**.



σ_n - nominální napětí

$$\sigma_{max} = \alpha \sigma_n = \alpha \, \frac{N}{S} \tag{6.20}$$

Tahová napjatost je porušena pouze v bezprostředním okolí vrubu. Vliv vrubu na napjatost je zapotřebí uvažovat, celková deformace prutu je však většinou ovlivněna nepodstatně, zanedbatelně.

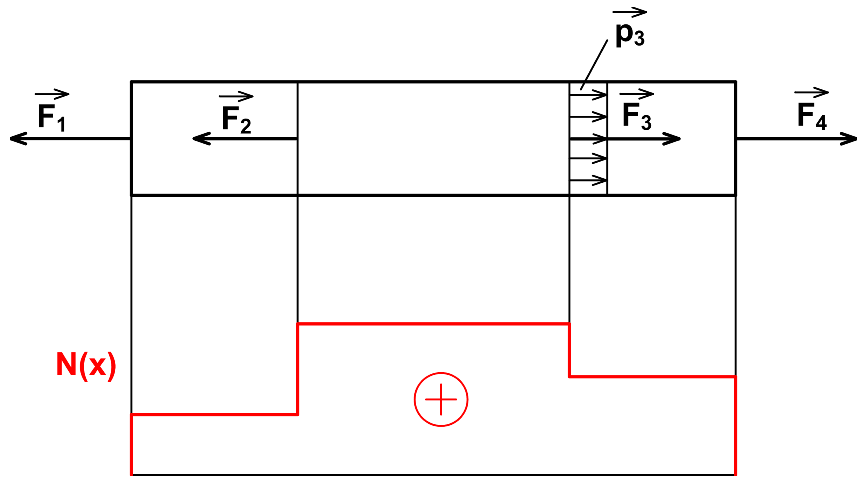
Součinitel bezpečnosti vůči mezi kluzu σ_K je potom roven

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}} \tag{6.21}$$

6.2.2 Vliv proměnlivosti normálové síly $N(x)$ podél střednice

a) skoková změna $N(x)$

Skoková změna normálové síly $N(x)$ je způsobena osamělými silami, které působí v ose prutu.



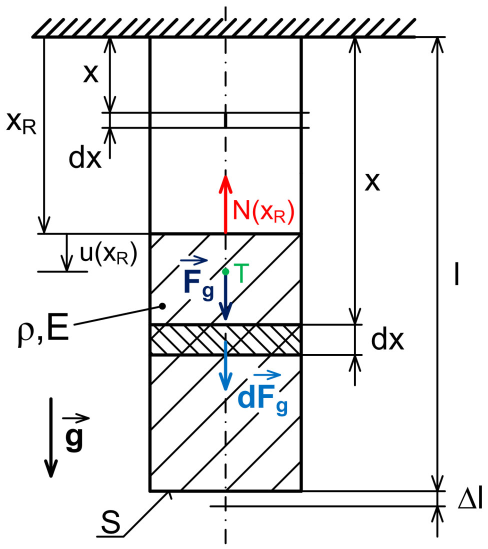
Vzhledem k tomu, že vnější síla může působit pouze na povrchu tělesa, dochází v tomto případě k porušení tahové napjatosti (1-D) a napjatost je prostorová (3-D), která bude záviset na konstrukčním provedení přenosu vnějšího zatížení na prut. V rámci předmětu PPI se nebudeme touto záležitostí blíže zabývat a budeme předpokládat, že tento vliv není podstatný.

b) spojitá změna $N(x)$, způsobená objemovým zatížením (gravitační pole, pole odstředivých sil).

Pokud vektor objemového zatížení má směr střednice prutu a toto je rovnoměrně rozloženo po průřezu, potom zůstává tahová napjatost zachována, ale stává se podél prutu nehomogenní.

Příklad: Stanovte průběh napětí v laně a jeho protažení působením gravitačního pole.

Elementární gravitační sílu $d\vec{F}_g$ můžeme vyjádřit jako objemovou sílu následovně



$$\mathrm{d}\vec{F}_g = \vec{o}\,\mathrm{d}V = \rho\vec{g}\,\mathrm{d}V = \rho\vec{g}S\,\mathrm{d}x$$

Normálová síla N v místě x_R je rovna

$$N(x_R) = \int_{x_R}^{l} \mathrm{d}F_g = \int_{x_R}^{l} \rho g S\,\mathrm{d}x = \rho g S(l - x_R) \tag{1}$$

Normálové napětí $\sigma(x_R)$ v místě x_R je rovno

$$\sigma(x_R) = \frac{N(x_R)}{S} = \rho g(l - x_R) \tag{2}$$

Pro posuv u v místě x_R dostáváme

$$u(x_R) = \int_0^{x_R} \mathrm{d}u = \int_0^{x_R} \varepsilon_x\,\mathrm{d}x = \int_0^{x_R} \frac{\sigma_x}{E}\,\mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \frac{\rho g}{E}\int_0^{x_R}(l - x)\,\mathrm{d}x =$$

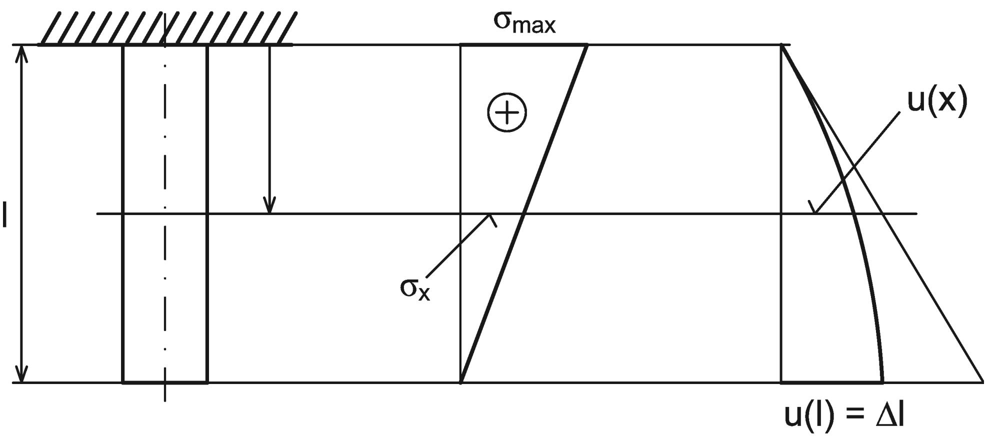
$$= \frac{\rho g}{E}\left(l x_R - \frac{x_R^2}{2}\right) \tag{3}$$

Posuv u_l na konci prutu, který odpovídá protažení prutu Δl, je roven

$$u(x_R = l) = \Delta l \overset{(3)}{=} \frac{\rho g \frac{l^2}{2}}{E} = \frac{\rho g \overbrace{Sl}^{V}}{ES} \frac{l}{2} = \frac{F_g l}{2ES} \tag{4}$$

Z rovnice (4) plyne, že celkové protažení prizmatického prutu Δl v gravitačním poli lze stanovit tak, jakoby celková tíha prutu F_g působila v těžišti a natahovala pouze polovinu délky prutu.

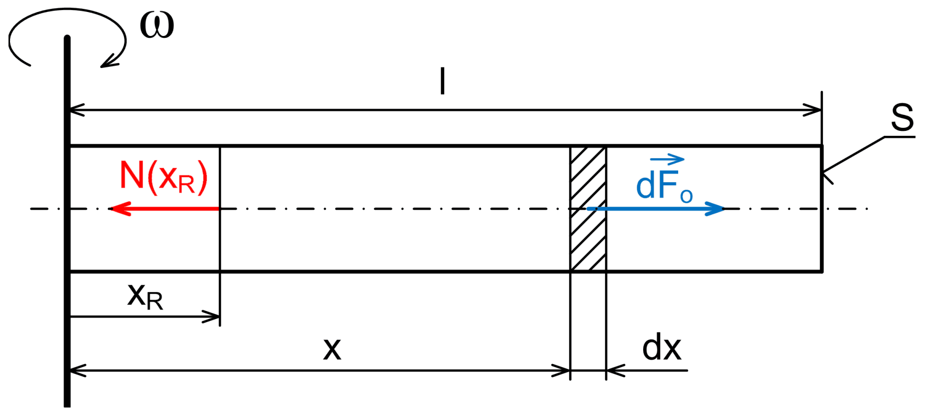
Průběh napětí $\sigma(x_R)$ a průběh posuvů $u(x_R)$ podél střednice dle rovnic (2) a (3) je možné vyjádřit graficky následovně



Součinitel bezpečnosti je potom roven

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}} \geqq k_D \;\; (> 1) \tag{5}$$

Příklad: Stanovte průběh napětí v rotující prizmatické tyči a její protažení působením pole odstředivých sil.



Elementární odstředivá síla $\mathrm{d}F_o$ je rovna

$$\mathrm{d}F_o = \mathrm{d}m\ r\omega^2 = S\ \mathrm{d}x\ \rho x\omega^2 = \rho\omega^2 Sx\ \mathrm{d}x \tag{1}$$

Pro normálovou sílu N v místě x_R dostáváme

$$N(x_R) = \int_{x_R}^{l} \mathrm{d}F_o = \rho\omega^2 S \int_{x_R}^{l} x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho\omega^2 S\left(l^2 - x_R^2\right) \tag{2}$$

Normálové napětí σ v místě x_R je dáno vztahem

$$\sigma(x_R) = \frac{N(x_R)}{S} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(l^2 - x_R^2\right) \tag{3}$$

A pro posuv u v místě x_R prutu platí

$$u(x_R) = \int\limits_0^{x_R} \mathrm{d}u = \int\limits_0^{x} \varepsilon_x \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{x_R} \frac{\sigma_x}{E}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2E}\,\rho\omega^2 \int\limits_0^{x_R} \left(l^2 - x_R^2\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\rho\omega^2}{2E}\left(l^2 x_R - \frac{x_R^3}{3}\right) \tag{4}$$

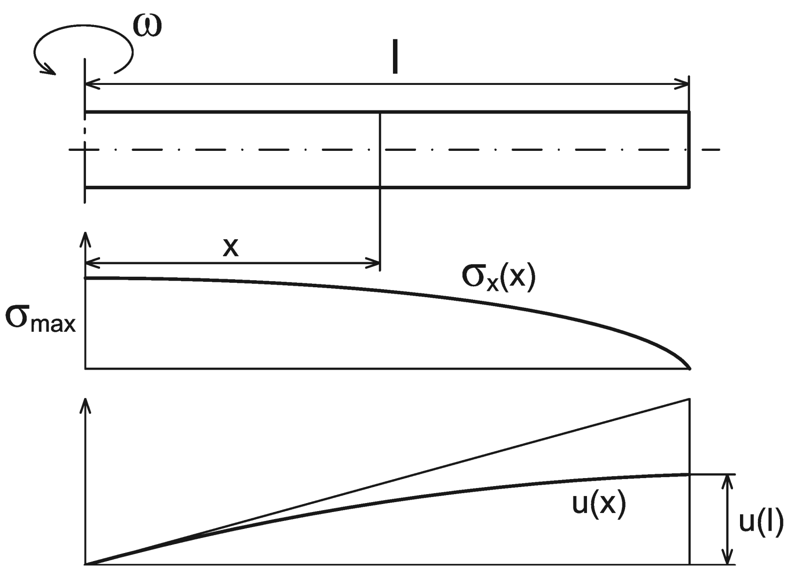
Maximální normálové napětí v prutu je rovno

$$\sigma_{max} = \sigma(x_R = 0) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 l^2$$

Posunutí $u(l)$ na konci prutu je rovno

$$u(x_R = l) = \frac{\rho\omega^2}{3E}\,l^3$$

Průběh napětí $\sigma(x)$ a posunutí $u(x)$ podél střednice rotujícího prutu jsou graficky znázorněny v souladu s (3) a (4) následovně



6.2.3 Vliv zakřivení střednice

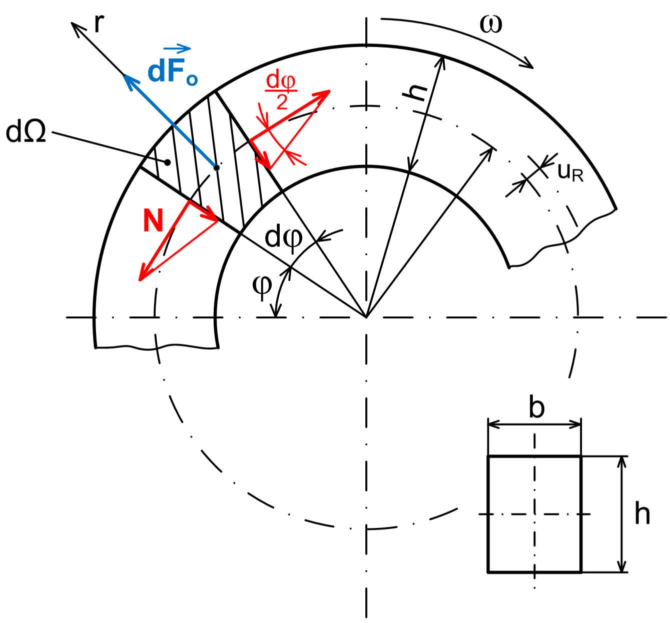
Obecně zakřivení střednice vede k porušení rovnoměrné tahové napjatosti. My se zaměříme na pruty slabě zakřivené $(h \ll R)$, kde je předpoklad rovnoměrné tahové napjatosti splněn s dostatečnou přesností.

Budeme řešit případ tenkého rotujícího kroužku, zatíženého odstředivou silou za rotace

Elementární odstředivá síla $d\vec{F}_o$ je rovna

$$\mathrm{d}F_o = \mathrm{d}m\ R\omega^2 = \rho\,\overbrace{bhRd\varphi}^{dV}\,R\omega^2$$

Podmínka silové rovnováhy v radiálním vypadá následovně



$$\sum F_r = 0$$

$$\mathrm{d}F_o - 2N\,\overbrace{\sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}}^{\doteq\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}} = 0$$

A pro normálovou sílu N dostáváme po dosazení za $\mathrm{d}F_o$

$$N = \frac{\mathrm{d}F_o}{\mathrm{d}\varphi} = \rho\omega^2R^2bh \quad (6.22)$$

Vztah pro normálové napětí potom vypadá následovně

$$\sigma = \frac{N}{S} = \rho\omega^2R^2 \tag{6.23}$$

Poměrné přetvoření ε_x v obvodovém směru

$$\varepsilon_x = \frac{2\pi(R + u_R) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{u_R}{R} \tag{6.24}$$

Aplikací Hokeova zákona obdržíme

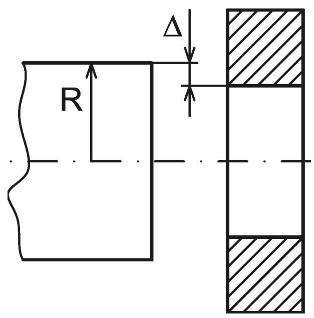
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\rho\omega^2 R^2}{E} \tag{6.25}$$

Porovnáním (6.24) a (6.25) dostáváme pro radiální posuv střednice u_R

$$u_R = \frac{1}{E}\,\rho\omega^2 R^3 \tag{6.26}$$

Případ nasazení tenkého kroužku na hřídel s přesahem.

Aplikací vztahu (6.24) dostáváme pro poměrné přetvoření



$$\varepsilon_x = \frac{u_R}{R} \doteq \frac{\Delta}{R} \tag{6.27}$$

a napětí je využitím Hookeova zákona rovno

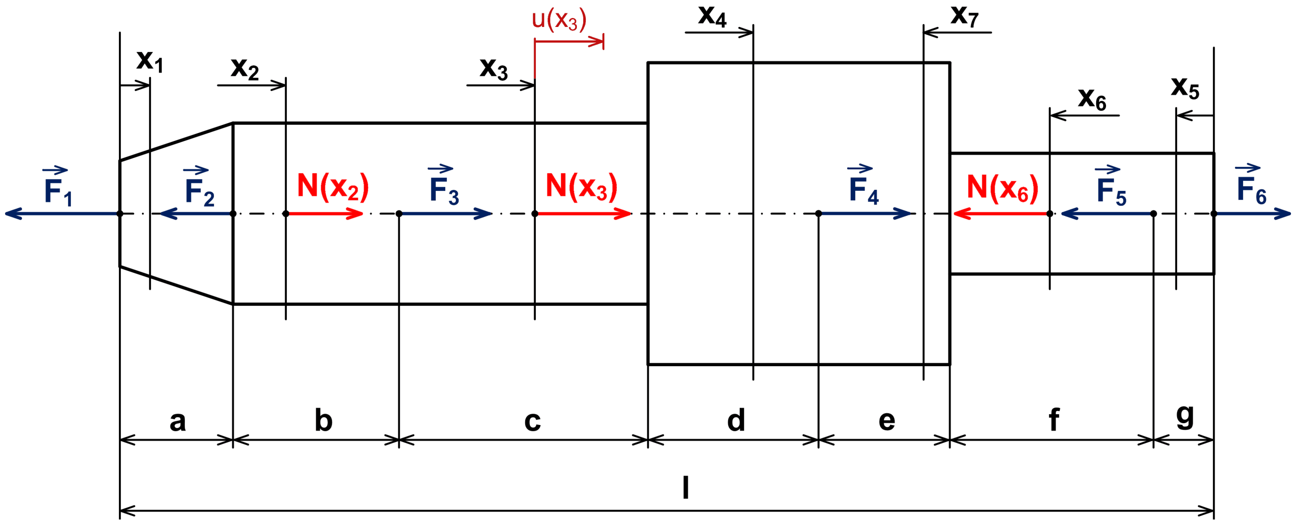
$$\sigma_x = E\varepsilon_x \doteq \frac{E\Delta}{R} \tag{6.28}$$

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}} \geqq k_D \quad (> 1)$$

6.3 Algoritmus určování napjatosti a deformace při tahovém (tlakovém) namáhání

Při určování napjatost a deformace používáme vztahů odvozených pro prostý tah (tlak) s uvažováním vlivu odchylek

a) volný prut



Prut rozdělíme na úseky, ve kterých je průběh $N(x)$, resp. σ_x popsán jedním matematickým vztahem. Hranicemi úseků jsou místa působení osamělých sil F_i, resp. skokové změny průřezu. V každém úseku provedeme uvolnění prvku rovinným řezem, v kterém zavedeme normálovou sílu N, působící v kladném směru a aplikujeme silovou podmínku statické rovnováhy ve směru osy prutu.

$$N(x_1) = F_1 \qquad \sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{S(x_1)} = \frac{4F_1}{\pi d^2(x_1)}$$

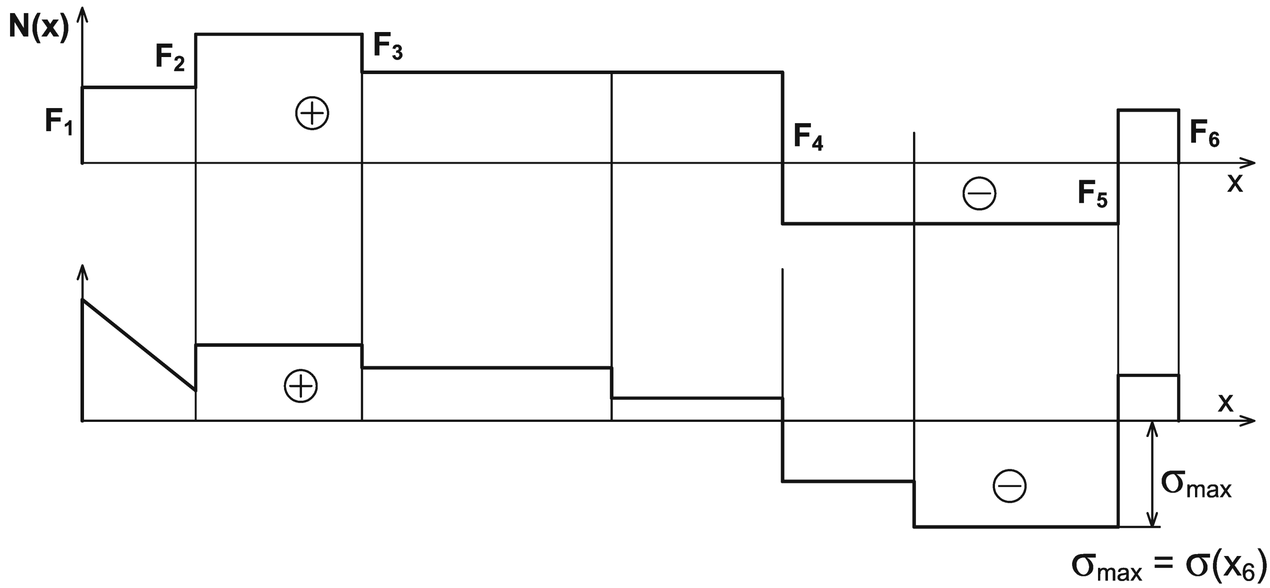
$$N(x_3) = F_1 + F_2 - F_3 \qquad \sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{S(x_3)} = \frac{F_1 + F_2 - F_3}{S_3}$$

$$N(x_7) = F_6 - F_5 \qquad \sigma(x_7) = \frac{N(x_7)}{S(x_7)} = \frac{F_6 - F_5}{S_7}$$

Posuv v místě řezu x_3 se počítá jako součet protažení všech úseků prutu od místa uložení až po příslušný řez

$$u(x_3) = \sum \Delta l_i = \int_0^c \frac{\sigma(x_1)}{E}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{N(x_2)b}{ES_2} + \frac{N(x_3)(x_3 - a - b)}{ES_3}$$

Osový průběh normálové síly $\boldsymbol{N(x)}$ a napětí $\sigma(x)$ jsou uvedeny na následujících obrázcích

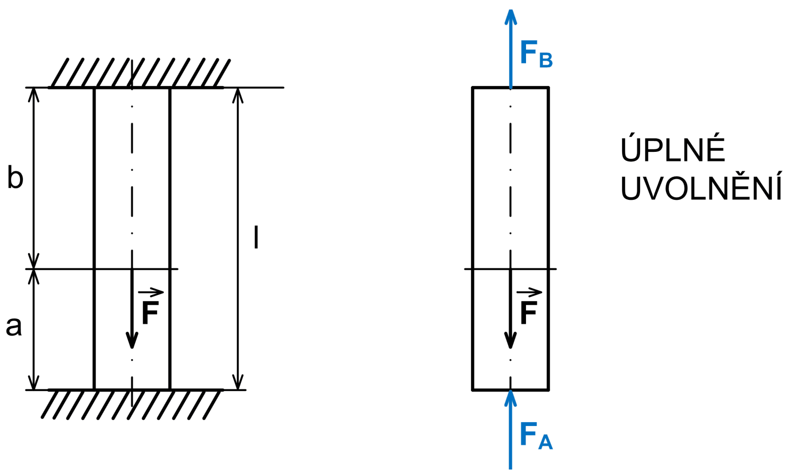


Bezpečnost prutu vůči mezi kluzu je rovna

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_K}{|\sigma(x_6)|} \geqq k_D \ \ (> 1)$$

b) prut vázaný

- **staticky určitý**. Stykovou výslednici stanovíme ze silové podmínky statické rovnováhy ve směru osy prutu a dále řešíme jako prut volný.
- **staticky neurčitý**. Jako příklad uvedeme prizmatický prut oboustranně vetknutý, zatížený osamělou silou $\boldsymbol{F}$.



Postup řešení:

1) **Úplné uvolnění**, statický rozbor a podmínka silové rovnováhy

$$\mu = 2 \quad ; \quad \nu = 1 \quad ; \quad s = \mu - \nu = 1$$

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá.

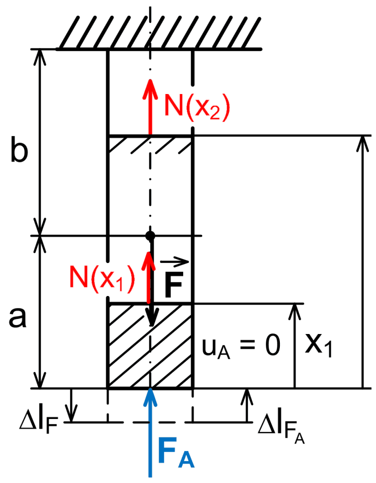
Podmínka silové rovnováhy $\sum F_x$

$$F_A + F_B - F = 0 \tag{1}$$

2) **Částečné uvolnění** na úroveň staticky určité úlohy

Deformační podmínka

$$u_A = 0 \qquad (2)$$



Řešeno superposicí:

$$|\Delta l_F| = |\Delta l_{F_A}|$$

$$\frac{Fb}{ES} = \frac{F_A(a+b)}{ES} \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{Fb}{a+b} = \frac{Fb}{l}$$

Řešeno Castiglianovou větou:

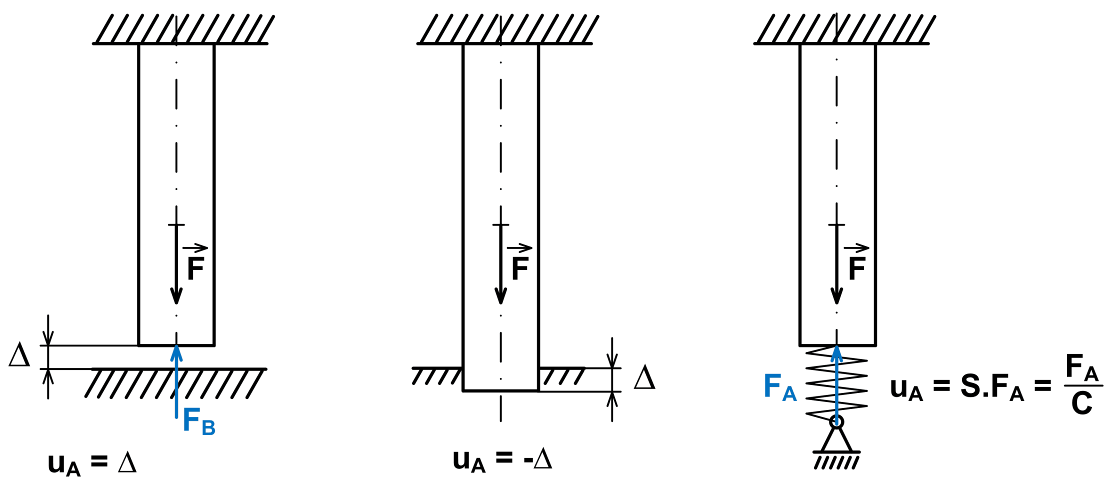
$$N(x_1) = -F_A \quad ; \quad N(x_2) = -F_A + F$$

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial F_A} = \frac{\partial}{\partial F_A}\left[\frac{N^2(x_1)a}{2ES} + \frac{N^2(x_2)b}{2ES}\right] =$$

$$= \frac{N(x_1)a}{ES}\frac{\partial N(x_1)}{\partial F_A} + \frac{N(x_2)b}{ES}\frac{\partial N(x_2)}{\partial F_A} =$$

$$= -\frac{F_A a}{ES}(-1) + \frac{(-F_A + F)\,b\,(-1)}{ES} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_A = \frac{Fb}{a+b}$$

Montážní vůle Montážní přesah Pružné uložení



6.4 Soustavy těles

Omezíme se pouze na soustavy, které se skládají z prutů namáhaných na tah (tlak) a dále z tuhých neprutových těles. Půjde o následující případy:

a) prutové soustavy, kde pruty jsou spojeny rotačními kinematickými dvojicemi, přičemž každý prut je zároveň vázán k rámu

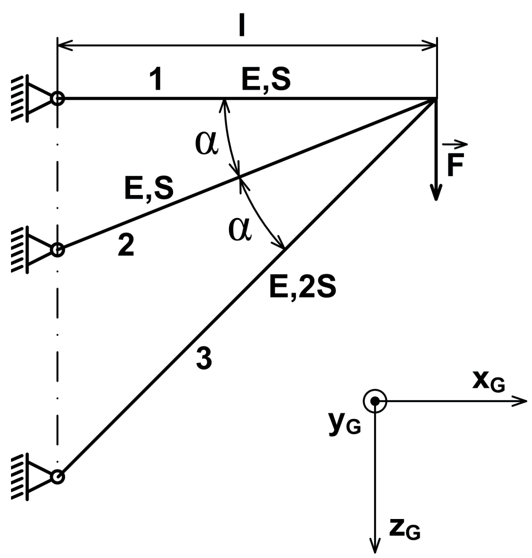
b) soustavy prutů a neprutových tuhých těles, přičemž každý z členů je vázán k rámu

c) prutové soustavy, u kterých je vzájemná nepohyblivost prutů způsobena vnitřními vazbami a které jsou jako celek uchyceny k rámu.

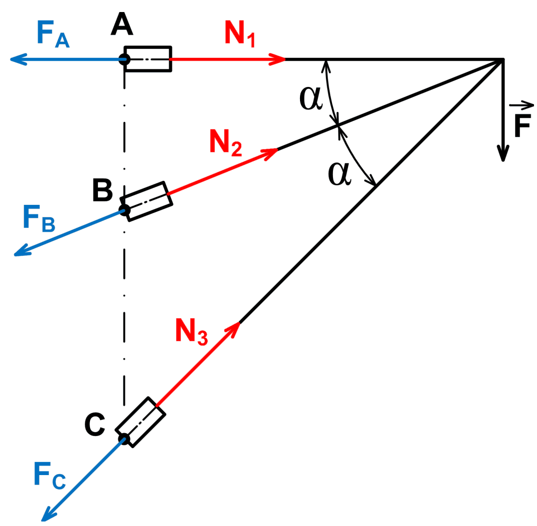
Demonstrační příklady:

Ad a) Stanovte síly v prutech a proveďte pevnostní kontrolu

$F = 10^4$ N; $S = 50$ mm^2; $l = 1$ m; $\alpha = 30°$; $\sigma_K = 350$ MPa; $k_D = 2$



Úplné uvolnění



Statická analýza: $\mu = 3 \quad ; \quad \nu = 2 \quad ; \quad s = \mu - \nu = 1$

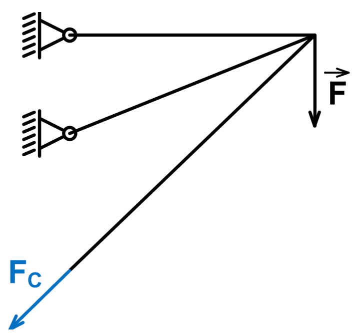
úloha je jedenkrát staticky neurčitá

Podmínky statické rovnováhy

$$\sum F_x \ : \ F_A + F_B \cos\alpha + F_C \cos 2\alpha = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_z \ : \ F_B \sin\alpha + F_C \sin 2\alpha + F = 0 \tag{2}$$

Částečné uvolnění na úroveň úlohy staticky neurčité



W = W (F, F$_C$)

N$_i$ = N$_i$ (F, F$_C$)

Deformační podmínka a její řešení pomocí Castiglianovy věty

$$u_C = 0 \tag{3}$$

$$u_C = \frac{\partial W}{\partial F_C} = \frac{\partial}{\partial F_C} \sum_1^3 \frac{N_i^2 l_i}{2E_i S_i} = \sum_1^3 \frac{N_i l_i}{E_i S_i} \frac{\partial N_i}{\partial F_C} \tag{4}$$

Stanovení normálových sil $\boldsymbol{N}$

$N_3 = F_C$

$N_2 = F_B \overset{(2)}{=} -\frac{1}{\sin\alpha}\left(F_C \sin 2\alpha + F\right) = -2F_C \cos\alpha - \frac{F}{\sin\alpha}$

$$N_1 = F_A \overset{(1)}{=} -F_B \cos\alpha - F_C \cos 2\alpha =$$

$$2F_C \cos^2\alpha + F(cot\alpha - F_C \underbrace{\cos 2\alpha}_{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$$

$$= F_C(\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{=1}) + F\cot\alpha = F_C + F\cot\alpha$$

Po dosazení za N_i do deformační podmínky (4) dostáváme následující rovnici s jedinou neznámou, kterou je uvolněná styková výslednice F_C

$$\frac{(F_C + F\cot\alpha) l \cdot 1}{ES} + \frac{\left(-2F_C\cos\alpha - \frac{F}{\sin\alpha}\right)\frac{l}{\cos\alpha}(-2\cos\alpha)}{ES} +$$

$$+ \frac{F_C}{2ES}\frac{l}{\cos 2\alpha} \cdot 1 = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{ES}{l}$$

$$F_C + F\cot\alpha + 4F_C\cos\alpha + \frac{2F}{\sin\alpha} + \frac{F_C}{2\cos 2\alpha} = 0$$

$$F_C = \frac{-F\cot\alpha - \frac{2F}{\sin\alpha}}{1 + 4\cos\alpha + \frac{1}{2\cos 2\alpha}} = \frac{-F\left(\cot\alpha + \frac{2}{\sin\alpha}\right)}{1 + 4\cos\alpha + \frac{1}{2\cos 2\alpha}} = -1,049\ F$$

A zpětným dosazením získáme síly v prutech N

$$N_1 = F_C + F\cot\alpha = 0,683\ F$$

$$N_2 = -2F_C\cos\alpha - \frac{F}{\sin\alpha} = -0,183\ F$$

$$N_3 = F_C = -1,049\ F$$

a příslušná napětí

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{0,683 \cdot 10^4}{50} = 136,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{-0,183 \cdot 10^4}{50} = -36,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_3} = \frac{-1,049 \cdot 10^4}{100} = -104,9 \text{ MPa}$$

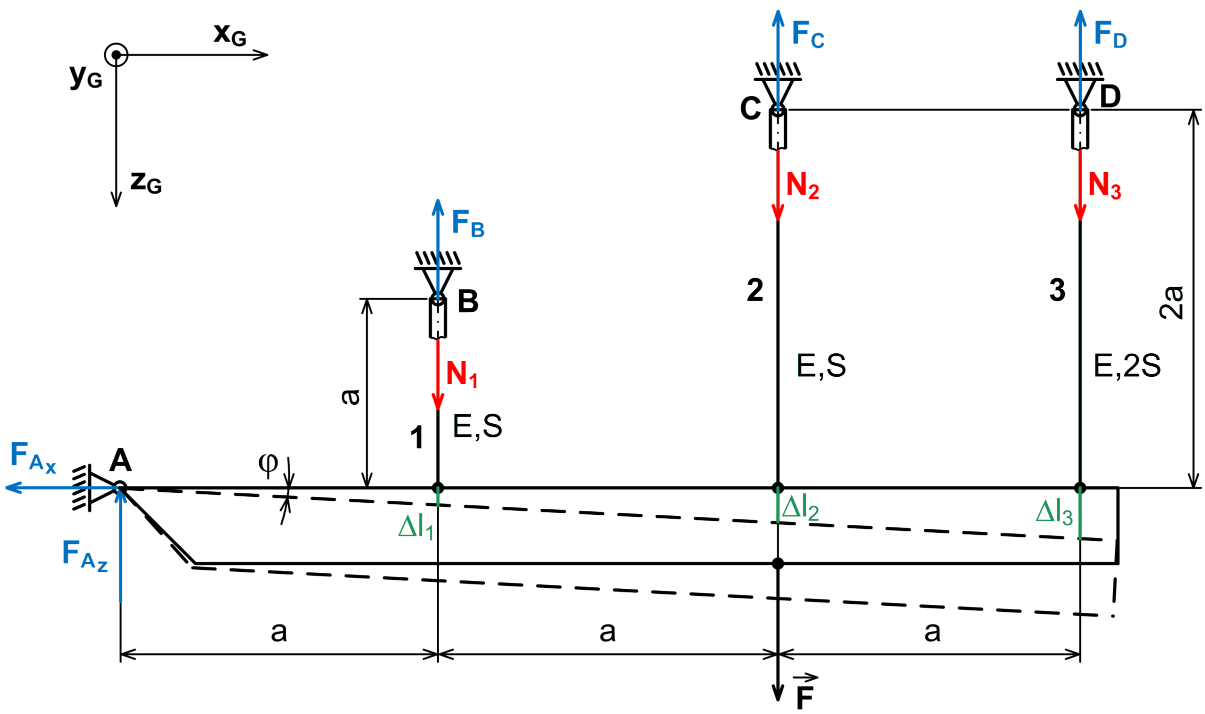
Následuje pevnostní kontrola vůči mezi kluzu

$$\sigma_{max} = \text{max}\,\{|\sigma_i|\} = 136,6 \text{ MPa}$$

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}} = \frac{350}{136,6} = 2,56 \; > k_D = 2$$

Pozor! U prutů tlakově namáhaných je zapotřebí provést také kontrolu na vzpěr!

Ad b) Stanovte síly v prutech a proveďte pevnostní kontrolu



Statická analýza pro soustavu těles úplně uvolněnou z vnějších vazeb

$$\mu = 5 \quad ; \quad \nu = 3 \quad ; \quad s = \mu - \nu = 5 - 3 = 2$$

Soustava těles je dvakrát staticky neurčitá.

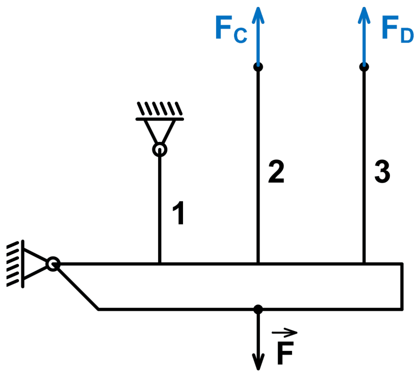
Podmínky statické rovnováhy

$$\sum F_x \ : \ F_{Ax} = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_z \ : \ F_{Az} + F_B + F_C + F_D - F = 0 \tag{2}$$

$$\sum M_A \ : \ F_B \cdot a + F_C \cdot 2a + F_D \cdot 3a - F \cdot 2a = 0 \tag{3}$$

Částečné uvolnění na úroveň úlohy staticky neurčité



Deformační podmínky a jejich řešení pomocí Castiglianovy věty

$$w_C = \frac{\partial W}{\partial F_C} = \sum_{1}^{3} \frac{N_i l_i}{E_i S_i} \frac{\partial N_i}{\partial F_C} = 0 \qquad (4)$$

$$w_D = \frac{\partial W}{\partial F_D} = \sum_{1}^{3} \frac{N_i l_i}{E_i S_i} \frac{\partial N_i}{\partial F_D} = 0 \qquad (5)$$

Stanovení normálových sil N a jejich dosazení do deformačních podmínek (4) a (5)

$$N_1 = F_B \stackrel{(3)}{=} -2F_C - 3F_D + 2F$$

$$N_2 = F_C$$

$$N_3 = F_D$$

Dosazení N do deformačních podmínek (4) a (5)

$$\frac{(-2F_C - 3F_D + 2F) \cdot a \cdot (-2)}{ES} + \frac{F_C \cdot 2a \cdot 1}{ES} + \frac{F_D \cdot 2a \cdot 0}{2ES} = 0 \quad / \cdot ES$$

$$\frac{(-2F_C - 3F_D + 2F) \cdot a \cdot (-3)}{ES} + \frac{F_C \cdot 2a \cdot 0}{ES} + \frac{F_D \cdot 2a \cdot 1}{2ES} = 0 \quad / \cdot ES$$

$\Rightarrow F_C, F_D \Rightarrow N_1, N_2, N_3 \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \Rightarrow \sigma_{max} \Rightarrow k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}} \geqq k_D$

Jiné deformační podmínky, využívající tuhost neprutového tělesa (obr.1)

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{2a} \;\Rightarrow\; \frac{F_B a}{ESa} = \frac{F_C \cdot 2a}{ES \cdot 2a} \;\Rightarrow\; F_C = F_B$$

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_3}{3a} \;\Rightarrow\; \frac{F_B a}{ESa} = \frac{F_D \cdot 2a}{2ES \cdot 3a} \;\Rightarrow\; F_D = 3F_B$$

$F_C, F_D \;\rightarrow\;$ (3) $\;\Rightarrow$

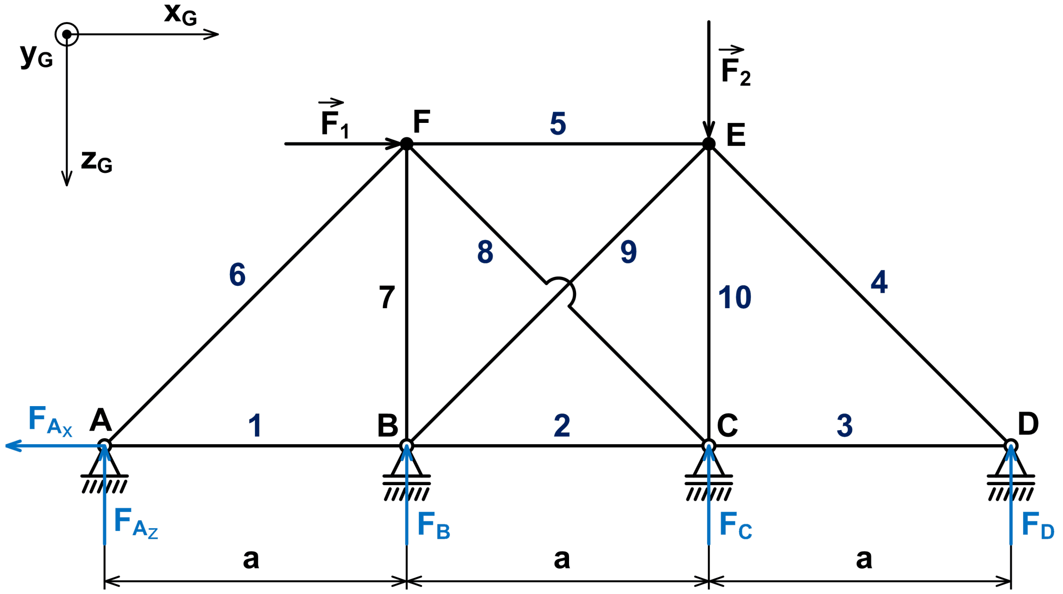
$$F_B \cdot a + F_B \cdot 2a + 3F_B \cdot 3a - F \cdot 2a = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{a}$$

$$F_B = \frac{2F}{12} = \frac{F}{6} = F_C$$

$$F_D = 3F_B = \frac{F}{2}$$

(2) $\;\Rightarrow\; F_{Az} = F - (F_B + F_C + F_D) = \dfrac{F}{6}$

Ad c) Stanovte síly v prutech a stykové výslednice u příhradové konstrukce dle obrázku



1) Hledisko vnějších vazeb

Uvolnění z vnějších vazeb na úroveň úlohy vnějškově staticky určité a vnější statická analýza

$$\mu_e = 5 \quad ; \quad \nu_e = 3$$

$$s_e = \mu_e - \nu_e = 5 - 3 = 2$$

Úloha je dvakrát vnějškově staticky neurčitá (dvě přebytečné vnější vazby)

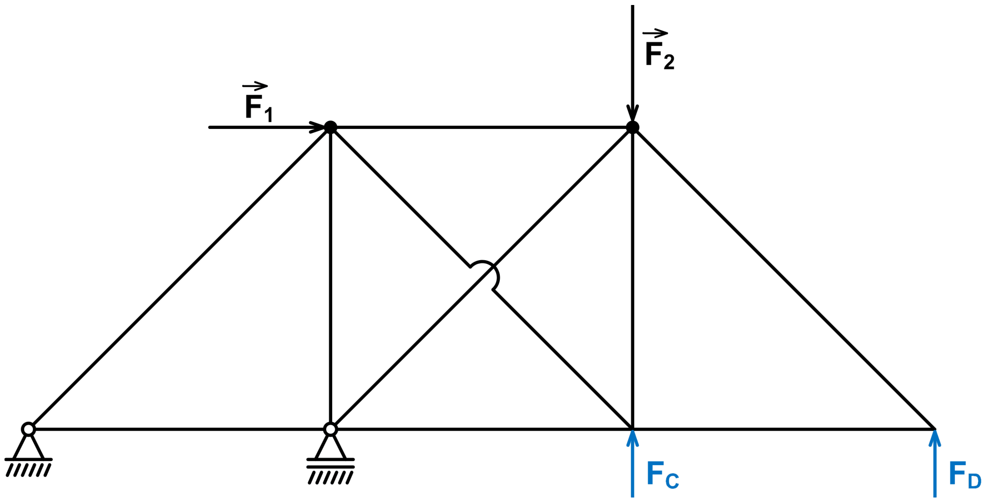
Podmínky vnější statické rovnováhy

$$\sum F_{Ax} \ : \ -F_{Ax} + F_1 = 0 \ \Rightarrow \ F_{Ax} = F_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_{Az} \ : \ F_{Az} + F_B + F_C + F_D - 2F = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_A \ : \ F_B \cdot a + 2F_C \cdot a + 3F_D \cdot a - F_1 \cdot a - F_2 \cdot 2a = 0 \qquad (3)$$

Částečné uvolnění na úroveň vnějškově staticky určité úlohy a formulace vnějškových deformačních podmínek



$$w_C = \frac{\partial W}{\partial F_C} = \sum_{1}^{10} \frac{N_i l_i}{E_i S_i} \frac{\partial N_i}{\partial F_C} = 0 \tag{4}$$

$$w_D = \frac{\partial W}{\partial F_D} = \sum_{1}^{10} \frac{N_i l_i}{E_i S_i} \frac{\partial N_i}{\partial F_D} = 0 \tag{5}$$

2) Hledisko vnitřních vazeb

Klasifikace z hlediska vnitřní statické určitosti (vychází se z podmínek statické rovnováhy v uvolněných styčnících)

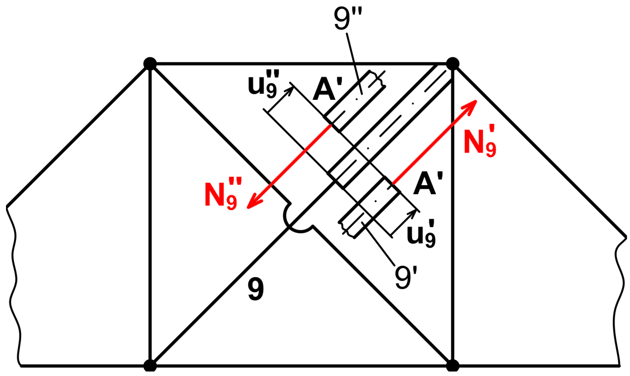
$$\mu_i = p = 10 \quad ; \quad \nu_i = 2k - 3 = 2 \cdot 6 - 3 = 9$$

(p je počet prutů a k počet styčníků-kloubů)

$$s_i = \mu_i - \nu_i = 10 - 9 = 1$$

Úloha je jedenkrát vnitřně staticky neurčitá (existuje jedna přebytečná vnitřní vazba).

Uvolnění na úroveň úlohy vnitřně staticky neurčité (přerušení jedné nadbytečné vnější vazby)



Formulace deformační podmínky plynoucí z podmínky spojitosti deformací v místě myšleného řezu

$$|u_9'| = |u_9''| = u_9 \tag{6}$$

$$u_9' = \frac{\partial W}{\partial N_9'} \;\; ; \;\; u_9'' = \frac{\partial W}{\partial N_9''} \;\; ; \;\; N_9' = N_9'' = N_9$$

$$|u_9'| = u_9' \;\; ; \;\; |u_9''| = -u_9'' \quad \rightarrow \quad (6)$$

$$u_9' = -u_9'' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial N_9'} = -\frac{\partial W}{\partial N_9''} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial N_9} = 0 \tag{7}$$

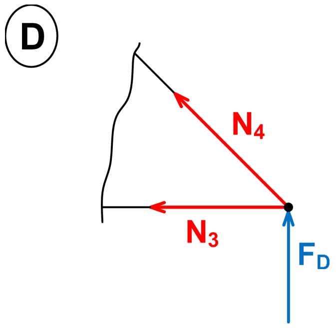
Předchozí podmínku spojitosti opět řešíme pomocí Castiglianovy věty

$$\frac{\partial W}{\partial N_9} = \frac{\partial}{\partial N_9} \sum_i \frac{N_i^2 l_i}{2E_i S_i} = \sum_1^{10} \frac{N_i l_i}{E_i S_i} \frac{\partial N_i}{\partial N_9} = 0 \tag{8}$$

K tomu, abychom mohli řešit deformační podmínky (4), (5) a (6) je nutné v dalším kroku stanovit normálové síly v prutech N_i na základě podmínek statické rovnováhy v uvolněných styčnících, přičemž musí být splněna následující podmínka

$$W = W(F_1, F_2, F_C, F_D, N_9) \;\; ; \;\; N_i = N_i(F_1, F_2, F_C, F_D, N_9)$$

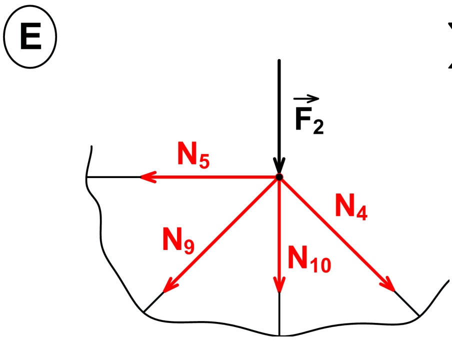
Při stanovení normálových sil N_i obvykle využíváme postupnou styčníkovou metodou, přičemž vycházíme ze styčníků, ve kterých jsou dva neznámé parametry, např. ze styčníku D.



$$\sum F_x : -N_3 - N_4\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_z : F_D + N_4\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow N_4 = -\sqrt{2}\,F_D\ ;\ N_3 = F_D$$



$$\sum F_x : N_5 + N_9\tfrac{\sqrt{2}}{2} - N_4\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$N_5 = -N_9\tfrac{\sqrt{2}}{2} + N_4\tfrac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}N_9 - F_D$$

$$\sum F_z : F_2 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}N_9 + N_{10} + N_4\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$N_{10} = -F_2 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}N_9 - N_4\tfrac{\sqrt{2}}{2} = -F_2 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}N_9 + F_D$$

Po dosazení N_i do deformačních podmínek (6.50), (6.51) a (6.54) dostaneme 3 lineární rovnice, ze kterých stanovíme 2 vnější uvolněné stykové výslednice F_C a F_D a vnitřní uvolněnou vazbu N_9. Jejich zpětným dosazením do vztahů pro N_i dostaneme všechny normálové síly N_i. Následuje určení normálových napětí a pevnostní kontrola.

$$\sigma_i = \frac{N_i}{S_i} \quad ; \quad \sigma_{max} = \max\{|\sigma_i|\}$$

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}} \geqq k_D$$

7 NAMÁHÁNÍ NA OHYB

7.1 Základní vztahy pro napětí a deformaci v řezu

Potřebné vztahy pro napjatost a deformaci odvodíme pro idealizovaný případ **prostého ohybu**.

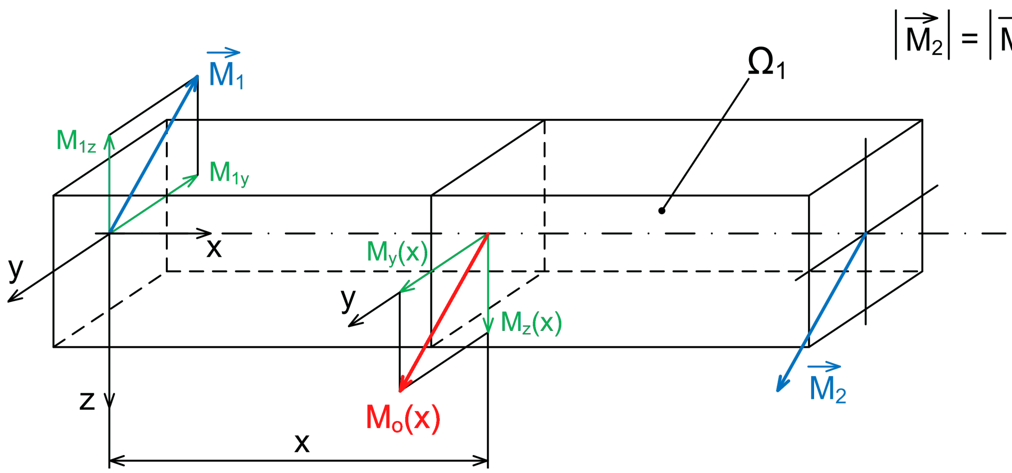
Def.: **Prostým ohybem** rozumíme namáhání přímého prismatického prutu, je-li splněno

a) platí obecné prutové předpoklady

b) příčné průřezy zůstávají v průběhu zatěžování rovinnými a otáčejí se kolem osy ležící v této rovině a následovně se deformují. Příčné průřezy zůstávají kolmé ke zdeformované (prohnuté) střednici

c) jedinou složkou VVU je ohybový moment $M_o(x)$, který je konstantní po celé délce prutu

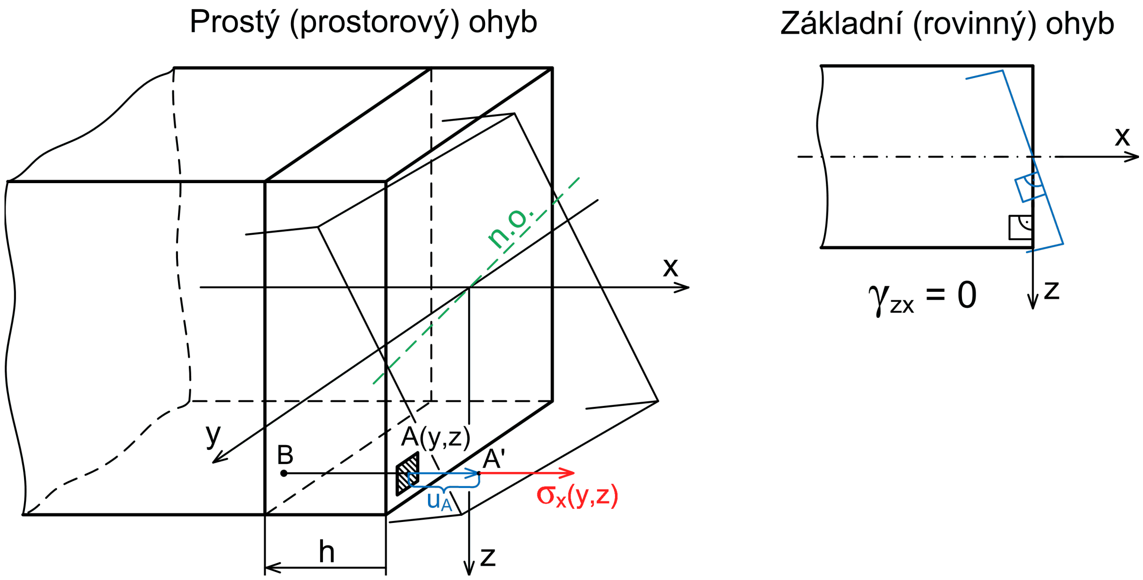
V prvním kroku stanovíme ohybový moment $M_o(x)$ na základě podmínky rovnováhy uvolněného prvku prutu.



Momentové podmínky

$$\sum M_y \ : \ M_y(x) = M_{1y} \ ; \ \sum M_z \ : \ M_z(x) = M_{1z} \tag{7.1}$$

V dalším kroku stanovíme průběh přetvoření ε_x a napětí σ_x v příčném řezu na základě příslušné pracovní podmínky ad b)



$$u_A = u(y,z) = a_1 + b_1 y + c_1 z \tag{7.2}$$

$$\varepsilon_x(y,z) = \frac{u_A}{h} = a + by + cz \tag{7.3}$$

Průběh poměrných přetvoření $\varepsilon_x(y,z)$ po průřezu je popsán rovnicí roviny. S ohledem na tahový (tlakový) charakter napjatosti platí pro zbývající dvě přetvoření následující vztahy

$$\varepsilon_y(y,z) = \varepsilon_z(y,z) = -\mu\varepsilon_x(y,z) \tag{7.4}$$

Z podmínky kolmosti příčného průřezu na zdeformovanou střednici vyplývá nulovost zkosů

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \tag{7.5}$$

V případě prostého ohybu jde o prostorovou (3-D) deformaci.

S ohledem na charakter zatěžování je jedinou složkou normálových napětí složka σ_x, tedy

$$\sigma_x \neq 0 \ ; \ \sigma_y = \sigma_z = 0 \tag{7.6}$$

Z Hookeova zákona pro prostý smyk vyplývají s ohledem na nulové zkosy (7.5) i nulová smyková napětí

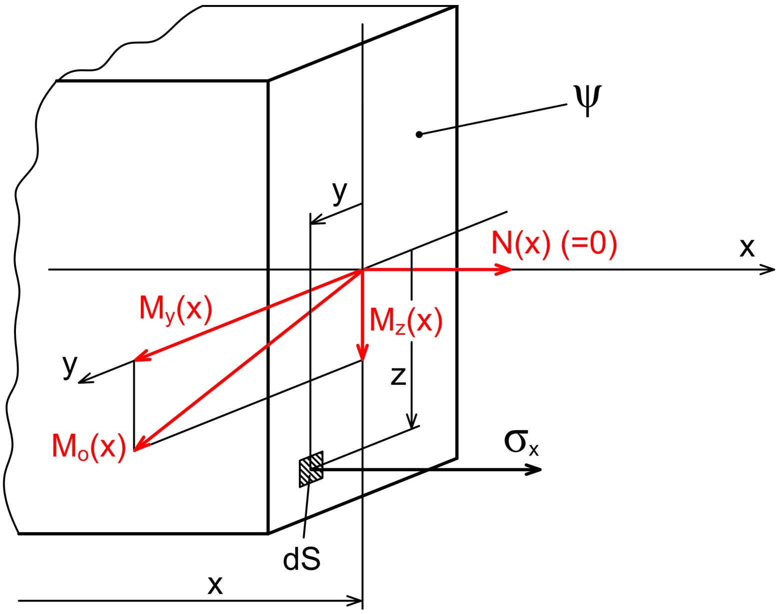
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 0 \ ; \ \tau_{yz} = 0 \ ; \ \tau_{zx} = \gamma_{zx} = 0 \tag{7.7}$$

V případě prostého ohybu jde o jednoosou (1-D) napjatost.

Průběh normálového napětí σ_x v řezu plyne z Hookeova zákona

$$\sigma_x(yz) = E\varepsilon_x \stackrel{(7.3)}{=} E(a + by + cz) \tag{7.8}$$

Zatím neznámé koeficienty a, b a c v předchozím vztahu se určí na základě podmínek statické ekvivalence mezi složkami VVU a elementárními silami z normálového napětí σ_x pro příční řez v místě x



Silová podmínka statické ekvivalence ve směru osy x vypadá následovně

$$N = \int_\psi \sigma_x \, \mathrm{d}S = E\left[a\overbrace{\int_\psi \mathrm{d}S}^{S} + b\overbrace{\int_\psi y \, \mathrm{d}S}^{U_z} + c\overbrace{\int_\psi z \, \mathrm{d}S}^{U_y}\right] \tag{7.9}$$

Pokud osy y a z procházejí těžištěm průřezu, potom platí $U_y = 0$, $U_z = 0$. Vztah (7.9) je potom splněn pouze pokud $a = 0 \;\rightarrow\;$ (7.8) $\Rightarrow$

$$\sigma_x(y, z) = E(by + cz) \tag{7.10}$$

Dále předpokládáme, že osy y a z jsou hlavními centrálními osami kvadratických momentů, což vede k nulovému deviačnímu momentu, tedy $J_{yz} = 0$. Následují momentové podmínky statické ekvivalence.

$$M_y = \int_\psi \sigma_x z \, \mathrm{d}S \overset{(7.10)}{=} E\left[b\overbrace{\int_\psi yz \, \mathrm{d}S}^{J_{yz}=0} + c\overbrace{\int_\psi z^2 \, \mathrm{d}S}^{J_y}\right]$$

$$c = \frac{M_y}{EJ_y} \tag{7.11}$$

$$M_z = \int\limits_\psi \sigma y \, \mathrm{d}S \overset{(7.10)}{=} -E\left[b\overbrace{\int\limits_\psi y^2 \, \mathrm{d}S}^{J_z} + c\overbrace{\int\limits_\psi yz \, \mathrm{d}S}^{J_{yz}=0}\right]$$

$$b = -\frac{M_z}{EJ_z} \tag{7.12}$$

Po dosazení (7.11) a (7.12) do (7.10) obdržíme pro průběh napětí

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y}{J_y}\, z - \frac{M_z}{J_z}\, y \tag{7.13}$$

Příslušné přetvoření ε_x vyplývá z Hookeova zákona - $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

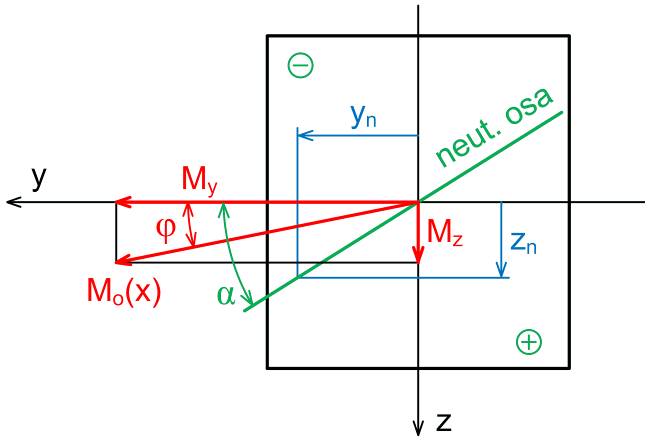
$$\varepsilon_x(yz) = \frac{M_y}{EJ_y}\, z - \frac{M_z}{EJ_z}\, y \tag{7.14}$$

Def: Pokud nositelka ohybového momentu $\vec{M}_o$ leží v některé z hlavních centrálních os kvadratických momentů (osách symetrie) pak se ohyb nazývá **základním ohybem**.

Ze vztahů (7.13) a (7.14) vyplývá, že prostý ohyb je superposicí dvou základních ohybů, což v dalším budeme využívat.

7.2 Poloha neutrální osy průřezu

Def.: **Neutrální osou rozumíme geometrické místo bodů příčného průřezu, kde je normálové napětí σ_x a poměrné přetvoření ε_x nulové.**



Využitím vztahu (7.13) dostáváme

$$\sigma_x(y_n, z_n) = 0 = \frac{M_y}{J_y} z_n - \frac{M_z}{J_z} y_n$$

$$\tan\alpha = \frac{z_n}{y_n} = \frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z} = \tan\varphi\,\frac{J_y}{J_z} \tag{7.15}$$

Z relace (7.15) plyne, že v obecném případě není poloha neutrální osy totožná s nositelkou ohybového momentu $\vec{M}_o$. Shoda nastává pouze ve dvou případech, jak plyne z analýzy rovnice (7.15)

a) $J_y = J_z$ (průřezy typu kruh, čtverec, pravidelné mnohoúhelníky)

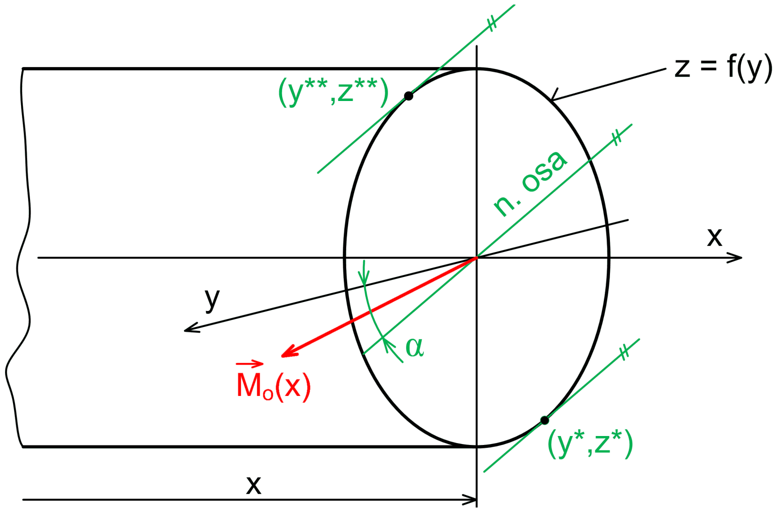
b) $\tan\varphi = 0, \infty$ ($\vec{M}_o$ leží ve směru hlavní osy KM y nebo z)

Neutrální osa dělí průřez na část namáhanou na tah a část namáhanou na tah, což je velice důležité u materiálů s rozdílnou mezí kluzu resp. pevnosti v tahu a tlaku jako jsou např. litina a beton.

V rámci celého prutu vytváří **neutrální osy** ve všech průřezech **neutrální plochu**.

7.3 Nebezpečné místo průřezu, pevnostní kontrola

Z rovnice (7.13) vyplývá, že nebezpečné místo bude na vnějším povrchu, tedy tam, kde souřadnice y a z jsou největší.



Rovnice obrysové čáry

$$z = f(y)$$

$$\sigma_x (y, f(y)) = \frac{M_y}{J_y} f(y) - \frac{M_z}{J_z} y$$

Podmínka extrému

$$\frac{d\sigma_x}{\mathrm{d}y} = \frac{M_y}{J_y} f'(y^*) - \frac{M_z}{J_z} = 0$$

$$f'(y^*) = \frac{M_z}{M_y} \frac{J_y}{J_z} \overset{(7.15)}{=} \tan\alpha \tag{7.16}$$

Nebezpečné místo s maximálním napětím je tedy tam, kde má tečna obrysu směr rovnoběžný s neutrální osou.

Maximální tahové napětí σ^t_{max} a maximální tlakové napětí σ^d_{max} potom plynou z rovnice (7.13)

$$\sigma^t_{max} = \frac{M_y}{J_y}\, z^* - \frac{M_z}{J_z}\, y^*$$

$$\sigma^d_{max} = \frac{M_y}{J_y}\, z^{**} - \frac{M_z}{J_z}\, y^{**}$$

Pevnostní kontrola:

Materiál ve stavu tvárném (mez kluzu v tahu a tlaku je stejná - σ_K)

$$\sigma_{max} = \max\left\{\sigma^t_{max}, \left||\sigma^d_{max}|\right|\right\}$$

Koeficient bezpečnosti (bezpečnost):

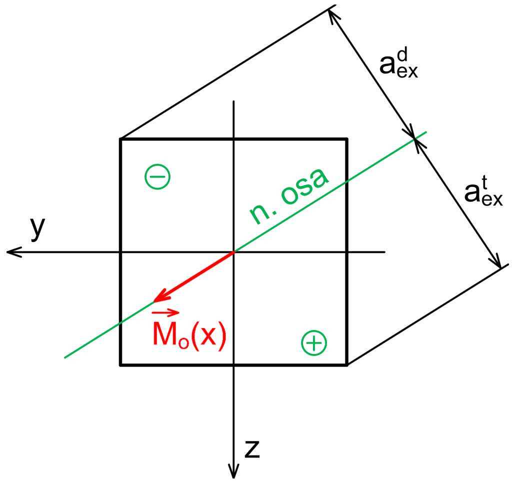
$$k_K(x) = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max(x)}} \geqq k_D$$

Materiál ve stavu křehkém (meze pevnosti v tahu σ_{Rt} a v tlaku σ_{Rd} jsou různé) - koeficienty bezpečnosti:

$$k^t_R = \frac{\sigma_{Rt}}{\sigma^t_{max}} \;\; ; \;\; k^d_R = \frac{\sigma_{Rd}}{|\sigma^d_{max}|}$$

$$k_R \geqq k_D$$

V případě, že nositelka ohybového momentu $\vec{M}_o$ leží na neutrální ose je možné použít pro výpočet maximálního napětí jednoduššího vztahu



$$\sigma_{max}^t = \sigma_o^t = \frac{M_o}{J_o}\, a_{ex}^t = \frac{M_o}{\frac{J_o}{a_{ex}^t}} = \frac{M_o}{W_o^t}$$

$$\sigma_{max}^d = \sigma_o^d = \frac{M_o}{J_o}\, a_{ex}^t = \frac{M_o}{\frac{J_o}{a_{ex}^d}} = \frac{M_o}{W_o^d}$$

kde $\boldsymbol{W_o}$ je **modul průřezu v ohybu**.

V případě symetrického průřezu (čtverec, kruh, pravidelné mnohoúhelníky) platí

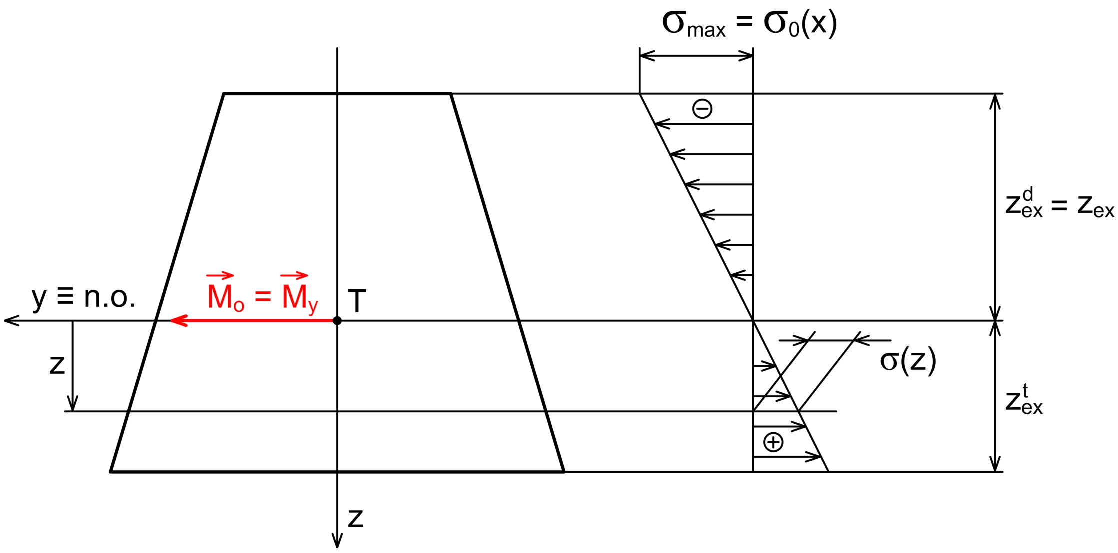
$$W_o^t = W_o^d = W_o$$

U materiálů ve stavu tvárném při výpočtu bezpečnosti nerozlišujeme tahové a tlakové napětí. Maximální ohybové napětí v řezu označíme

$$\sigma_o(x) = \frac{M_o(x)}{W_o(x)} \tag{7.17}$$

$$W_o = \frac{J_o}{a_{ex}} \tag{7.18}$$

V dalším se omezíme na základní ohyb kolem osy y



Pro průběh napětí $\sigma_x(z)$ v řezu x dostáváme dle (7.13) vztah

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{J_y}\, z$$

Maximální napětí $\sigma_o(x)$ v řezu x je rovno

$$\sigma_o(x) = \frac{M_o\,|z_{ex}|}{J_o} = \frac{M_y}{\frac{J_y}{|z_{ex}|}} = \frac{M_y(x)}{W_y(x)} \tag{7.19}$$

Kde modul průřezu je určen vztahem

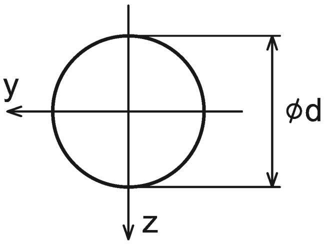
$$W_y = \frac{J_y}{|z_{ex}|} \tag{7.20}$$

Koeficient bezpečnosti v řezu x vůči mezi kluzu je roven

$$k_K(x) = \frac{\sigma_K}{\sigma_o(x)} \geqq k_D$$

Moduly vybraných průřezů

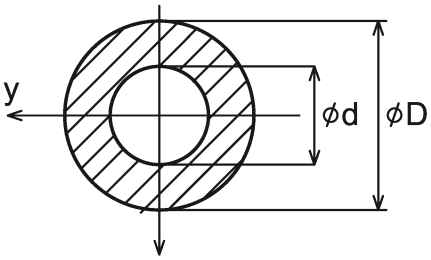
Kruhový průřez:



$$J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W_y = \frac{J_y}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}$$

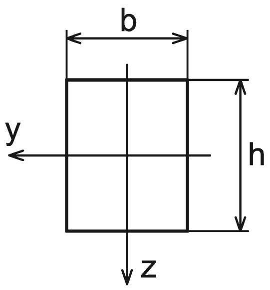
Mezikruhový průřez:



$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W_y = \frac{J_y}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{32D}\left(D^4 - d^4\right)$$

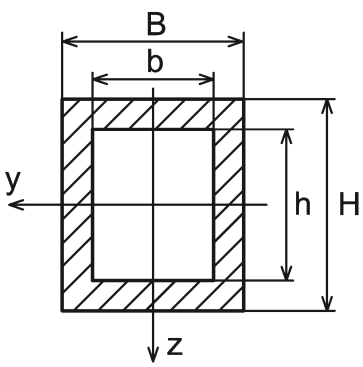
Obdélníkový průřez:



$$J_y = \frac{1}{12} bh^3$$

$$W_y = \frac{J_y}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

Meziobdélníkový průřez:
(Jäklův profil)



$$J_y = \frac{1}{12} BH^3 - \frac{1}{12} bh^3$$

$$W_y = \frac{J_y}{\frac{H}{2}} = \frac{1}{6H}\left(BH^3 - bh^3\right)$$

Pozor! U složených průřezů je nutné konstatovat

$$W_{y\,\circledcirc} \neq W_{y\,O} - W_{y\,o} \quad !!$$

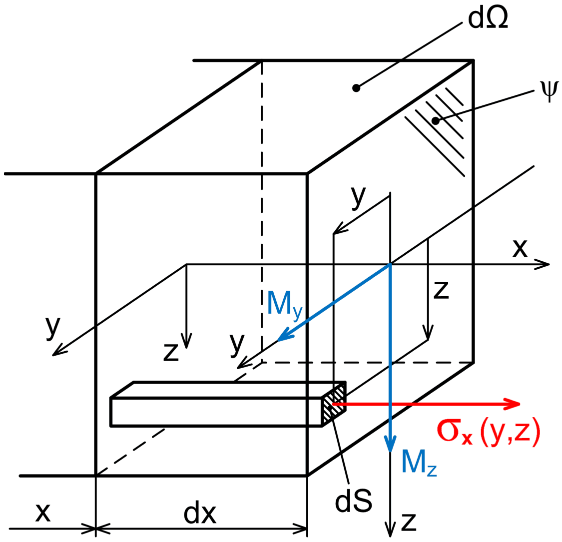
7.4 Energie napjatosti

Nejprve stanovíme energii napjatosti v elementu prutu tloušťky $\mathrm{d}x$ při namáhání prostým ohybem.

$$\mathrm{d}W = \int\limits_{\psi} \frac{\sigma_x^2}{2E}\,\mathrm{d}V =$$

$$= \int \frac{\sigma_x^2}{2E}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2E}\int\limits_{\psi}\left(\frac{M_y}{J_y}\,z - \frac{M_z}{J_z}\,y\right)^2 \mathrm{d}S\,\mathrm{d}x =$$



$$= \frac{1}{2E}\left[\frac{M_y^2}{J_y^2}\int z^2\,\mathrm{d}S - \frac{2M_yM_z}{J_yJ_z}\int zy\,\mathrm{d}S + \frac{M_z^2}{J_z^2}\int y^2\,\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{M_y^2\,\mathrm{d}x}{2EJ_y} + \frac{M_z^2\,\mathrm{d}x}{2EJ_z} \tag{7.21}$$

Pro celý prut platí

$$W = \int\limits_{\gamma} \frac{M_y^2(x)}{2EJ_y}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma} \frac{M_z^2(x)}{2EJ_z}\,\mathrm{d}x \tag{7.22}$$

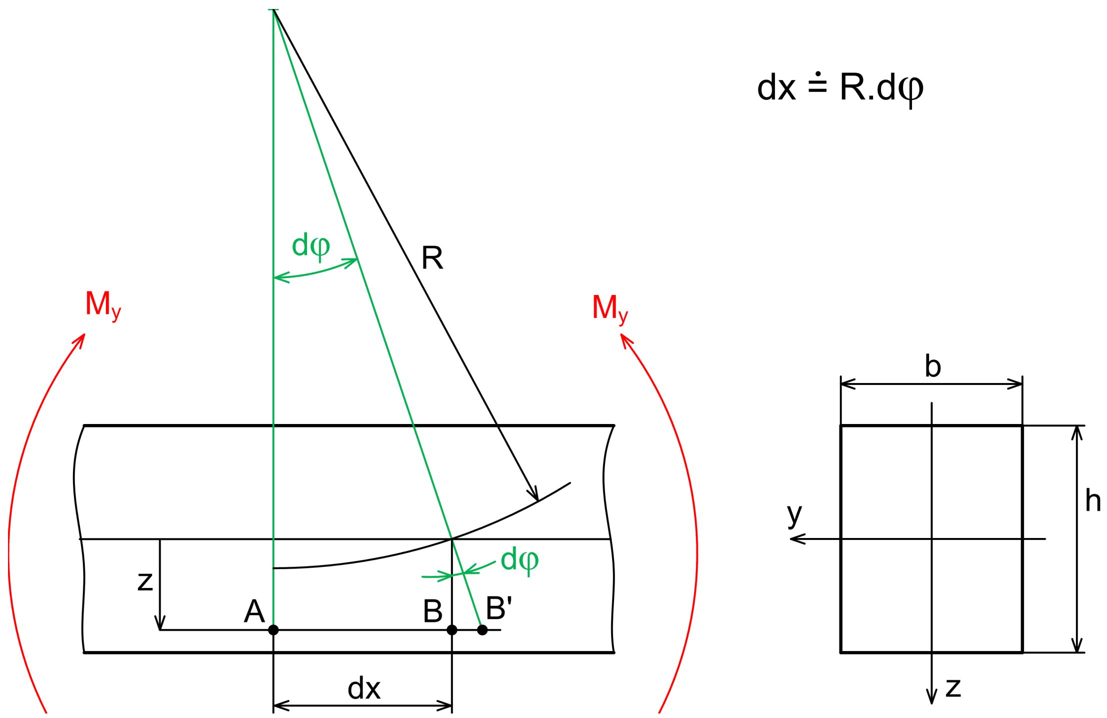
Energie napjatosti od ohybového momentu $\vec{M}_o$ při prostém ohybu je rovna součtu energií napjatosti od složek M_y a M_z jako základních ohybů.

7.5 Deformace prutu

Deformace způsobená ohybovým momentem $\vec{M}_o$ je ve smyslu platnosti principu superposice rovna geometrickému součtu deformací (posuvů) od základních ohybů M_y a M_z. Příslušné odvození provedeme pro základní ohyb M_y kolem osy y a platnost analogicky rozšíříme pro prostý ohyb.

7.5.1 Diferenciální rovnice průhybové čáry

Předpokládáme základní ohyb kolem osy y.



Pro poměrné přetvoření ε_x z definice dostáváme

$$\varepsilon_x(z) = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} \doteq \frac{z\,\mathrm{d}\varphi}{R\,\mathrm{d}\varphi} = \frac{z}{R} \tag{7.23}$$

Pro tutéž veličinu platí na základě (7.14)

$$\varepsilon_x(z) = \frac{M_y}{EJ_y}\,z \tag{7.24}$$

Porovnání obou výrazů obdržíme vztah pro křivost

$$\frac{1}{R} = \frac{M_y}{EJ_y} \tag{7.25}$$

Křivost je přitom vázána na rovnici průhybové čáry $w(x)$ vztahem známým z analytické geometrie, který se pro malé průhyby $(w'(x) \rightarrow 0)$ patřičně zjednoduší

$$\frac{1}{R} = \frac{w''(x)}{(1 + w'^2)^{\frac{3}{2}}} \doteq w''(x) \tag{7.26}$$

Po dosazení (7.26) do (7.25) dostáváme následující relaci

$$EJ_y w''(x) = -M_y(x) \tag{7.27}$$

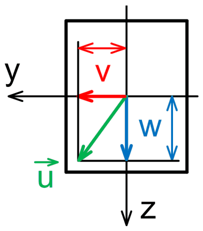
která se nazývá **diferenciální rovnicí průhybové čáry**.

Znaménko na pravé straně předchozí rovnice závisí na použitém souřadnicovém systému. V našem případě pravotočivého souřadnicového systému s osou z směřující dolů je tam znaménko mínus.

Analogicky pro základní ohyb kolem osy z dostáváme

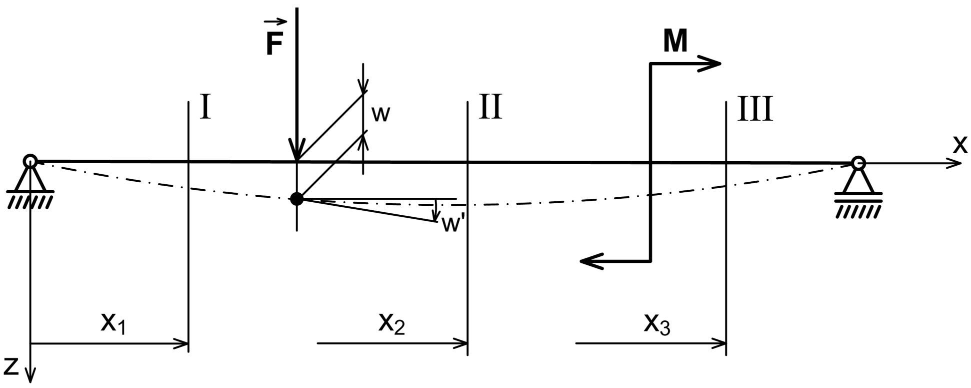
$$EJ_z v''(x) = -M_z(x) \tag{7.28}$$

Integrací diferenciálních rovnic druhého řádu (7.27) a (7.28) získáme průhybové čáry $w(x)$ a $v(x)$ pro základní ohyby kolem osy y a z a pro vektor posuvu $u(x)$ v místě x potom platí



$$\vec{u}(x) = v(x) \cdot \vec{j} + w(x) \cdot \vec{k} \tag{7.29}$$

Pokud působí na prut silová soustava nebo jde o prut po úsecích nehomogenní, potom musíme zvlášť formulovat diferenciální rovnici průhybové čáry pro každý úsek, ve kterém je ohybový moment (jako matematická funkce) popsán jedním matematickým výrazem. Integrační konstanty se potom určují na základě okrajových podmínek pro celý prut a podmínek spojitosti posuvů a natočení na hranicích příslušných úseků.



$$EJ_y w''(x_1) = -M_y(x_1) \qquad \Rightarrow \qquad w(x_1) = \ldots + C_1 x_1 + C_2$$
$$EJ_y w''(x_2) = -M_y(x_2) \qquad \Rightarrow \qquad w(x_2) = \ldots + C_3 x_2 + C_4$$
$$EJ_y w''(x_3) = -M_y(x_3) \qquad \Rightarrow \qquad w(x_3) = \ldots + C_5 x_3 + C_6$$

OKRAJOVÉ PODMÍNKY

$x_1 = 0 \quad w(x_1) = 0 \quad ; \quad x_3 = 0 \quad w(x_3) = 0$

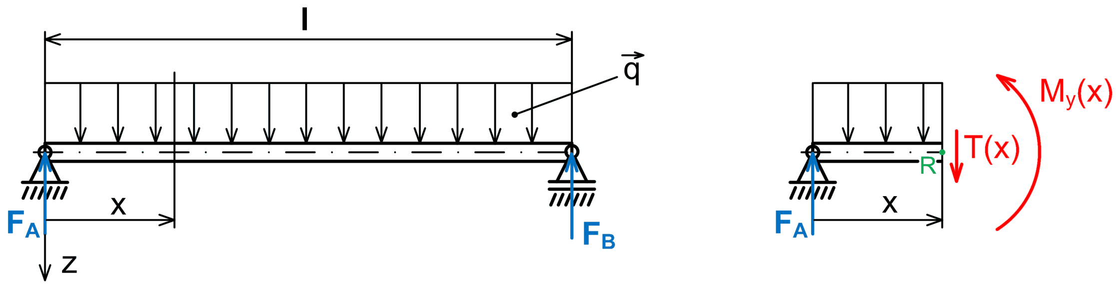
PODMÍNKY SPOJITOSTI

$x_1 = x_2 \quad w'(x_1) = w'(x_2) \quad w(x_1) = w(x_2)$

$x_2 = x_3 \quad w'(x_2) = w'(x_3) \quad w(x_2) = w(x_3)$

Demonstrační příklad:

Stanovte rovnici průhybové čáry u prutu dle obrázku.



$$F_A = F_B = \frac{ql}{2} \qquad\qquad M_y(x) = F_A x - \frac{qx^2}{2}$$

$$EJ_y w''(x) = -M_y(x) = -\frac{ql}{2}\,x + \frac{qx^2}{2}$$

$$EJ_y w''(x) = -\frac{ql}{4}\,x^2 + \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EJ_y w''(x) = -\frac{ql}{12}\,x^3 + \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Integrační konstanty stanovíme z okrajových podmínek

$$x = 0\ ;\ w(0) = 0\ \Rightarrow\ C_2 = 0$$

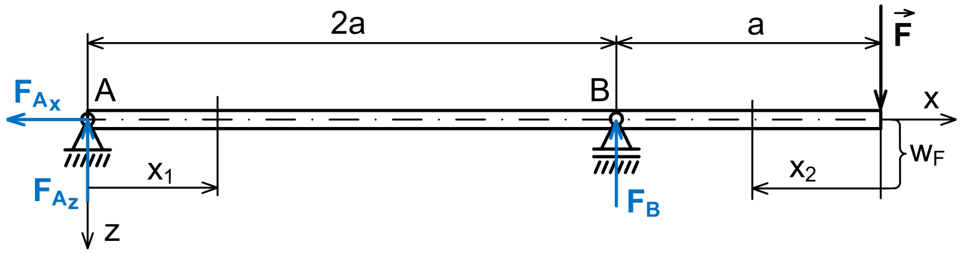
$$x = l\ ;\ w(l) = 0\ \Rightarrow\ 0 = -\frac{ql^4}{12} + \frac{ql^4}{24} + C_1 l\ \Rightarrow\ C_1 = \frac{ql^3}{24}$$

$$w(x) = \frac{1}{EJ_y}\left(-\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3}{24}\,x\right)$$

$$w'(x) = \frac{1}{EJ_y}\left(-\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{24}\right)$$

7.5.2 Deformace prutu pomocí Castiglianovy věty

Postup ukážeme na demonstračním příkladu. Úkolem je stanovit svislý průhyb w_F v místě působení síly F u nosníku dle obrázku.



Vycházíme z obecné Castiglianovy věty, kam dosadíme vztah pro deformační energii při prostém ohybu. Při matematické úpravě vztahu posuneme parciální derivaci za integrační znaménko a výraz $M_y^2(x)$ derivujeme jako složenou funkci.

$$w_F = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \int\limits_{\gamma} \frac{M_y^2(x)\, \mathrm{d}x}{2EJ_y} = \int\limits_{\gamma} \frac{M_y(x)}{EJ_y} \frac{\partial M_y}{\partial F}\, \mathrm{d}x \qquad (7.30)$$

V dalším je nutné stanovit $M_y(x)$ jako funkci vnějšího zatížení. U tělesa vázaného je zapotřebí určit stykové výslednice. V případě úlohy staticky neurčité je nezbytné nejprve statickou neurčitost řešit.

Statický rozbor, podmínky statické rovnováhy pro úplné uvolnění z vazeb:

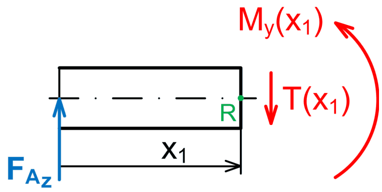
$$\mu = 3 \quad ; \quad \nu = 3 \quad ; \quad s = \mu - \nu = 3 - 3 = 0$$

$$\sum F_x \; : \; F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_z \; : \; F_{Az} + F_B - F = 0$$

$$\sum M_B \; : \; F_{Az} \cdot 2a + F \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Az} = -\frac{F}{2}$$

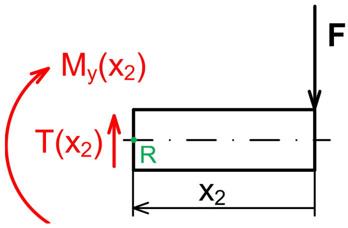
Stanovení M_y ve dvou úsecích



$$\sum M_R:$$

$$M_y(x_1) - F_{Az}x_1 = 0$$

$$M_y(x_1) = F_{Az}x_1 = -\tfrac{F}{2}\,x_1$$



$$\sum M_R:$$

$$M_y(x_2) + Fx_2 = 0$$

$$M_y(x_2) = -Fx_2$$

Výpočet svislého posunutí w_F

$$\int\limits_{\gamma} \frac{M_y(x)}{EJ_y}\,\frac{\partial M_y}{\partial F}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma} \frac{M_y(x_1)}{EJ_y(x_1)}\,\frac{\partial M_y}{\partial F}\,\mathrm{d}x_1 + \int\limits_{\gamma} \frac{M_y(x_2)}{EJ_y(x_2)}\,\frac{\partial M_y}{\partial F}\,\mathrm{d}x_2 =$$

$$= \frac{1}{EJ_y}\left[\int\limits_0^{2a} \left(-\frac{F}{2}\,x_1\right)\left(-\frac{x_1}{2}\right)\mathrm{d}x_1 + \int\limits_0^{a} (-Fx_2)(-x_2)\,\mathrm{d}x_2\right] = \frac{Fa^3}{EJ_y}$$

Úhel natočení v místě působení silové dvojice M je dán vztahem

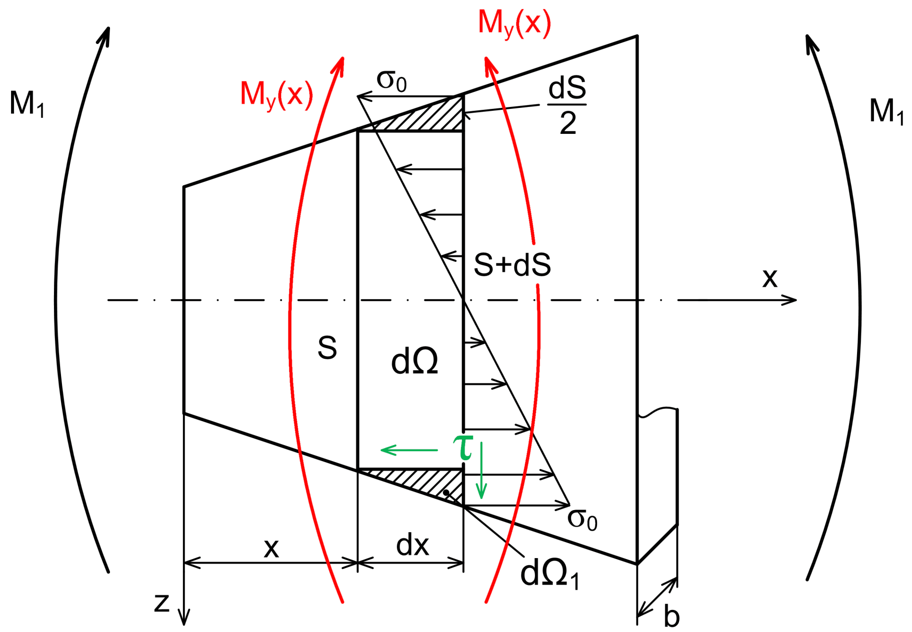
$$\varphi_M = \frac{\partial W}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M}\int\limits_{\gamma} \frac{M_y^2(x)\,\mathrm{d}x}{2EJ_y(x)} = \int\limits_{\gamma} \frac{M_y(x)}{EJ_y}\,\frac{\partial M_y}{\partial M}\,\mathrm{d}x \qquad (7.31)$$

Pozn: Pokud máme stanovit posunutí v místě, kde nepůsobí osamělá síla, resp. úhel natočení v místě, kde nepůsobí silová dvojice, zavádíme do tohoto místa veličiny doplňkové F_d, resp. M_d. Stykové výslednice i ohybový moment M_y se počítají s uvažováním těchto veličin. Před finální integrací se doplňkové veličiny položí rovny nule, tedy $F_d = 0$, resp. $M_d = 0$.

7.6 Vliv odchylek od případu prostého ohybu na napjatost a deformaci

7.6.1 Změna průřezu podél střednice

a) spojitá změna průřezu



$$\sum F_x \; ; \; \sigma \frac{\mathrm{d}S}{2} - \tau b \,\mathrm{d}x = 0$$

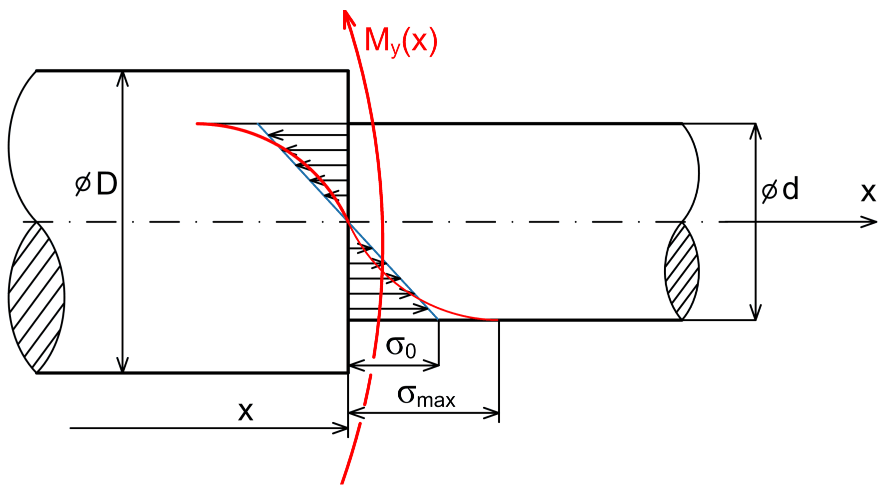
$$\tau = \frac{1}{2b}\,\sigma\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$$

V příčném průřezu vzniká smykové napětí τ, což je porušením tahové napjatosti při prostém ohybu. V dalším předpokládáme, že jeho velikost je malá a smykové napětí potom můžeme zanedbat. Ohybové napětí v krajním vláknu se potom počítá dle vztahu odvozeného pro prostý (základní) ohyb

$$\sigma_0(x) = \frac{M_y(x)}{W_y(x)} \tag{7.32}$$

b) skoková změna průřezu

V místě vrubu vzniká prostorová napjatost a dochází zde ke koncentraci napětí. Vliv vrubu na napjatost vyjadřujeme smluvně pomocí součinitele koncentrace napětí α.



Ohybové (nominální) napětí σ_0 se počítá podle vztahu odvozeného pro základní ohyb

$$\sigma_0(x) = \frac{M_y(x)}{W_y(x)} = \frac{32M_y(x)}{\pi d^3}$$

Maximální (smluvní) napětí σ_{max} je rovno

$$\sigma_{max}(x) = \alpha\sigma_0(x) \tag{7.33}$$

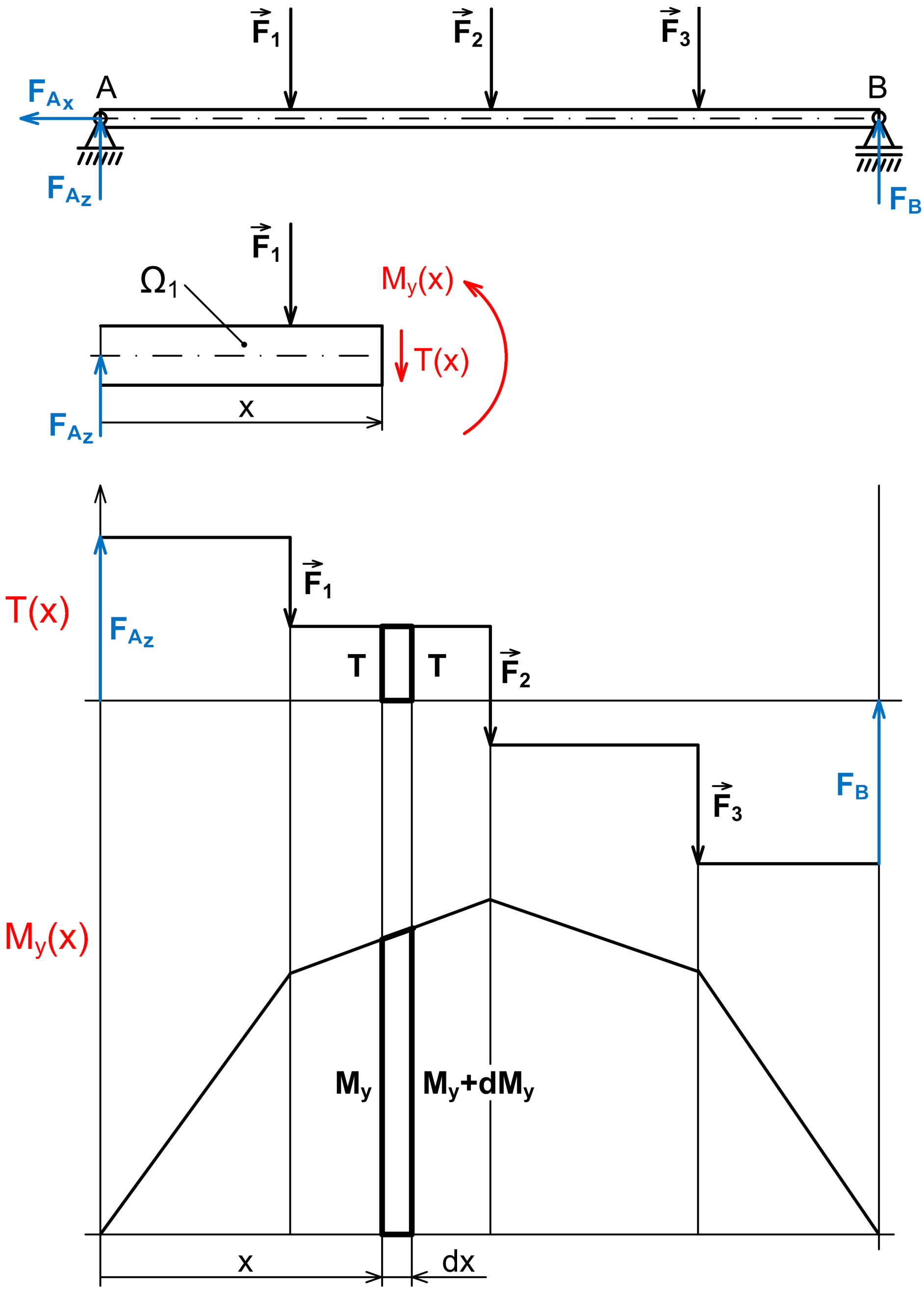
a bezpečnost vůči mezi kluzu potom

$$k_K(x) = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}(x)} \tag{7.34}$$

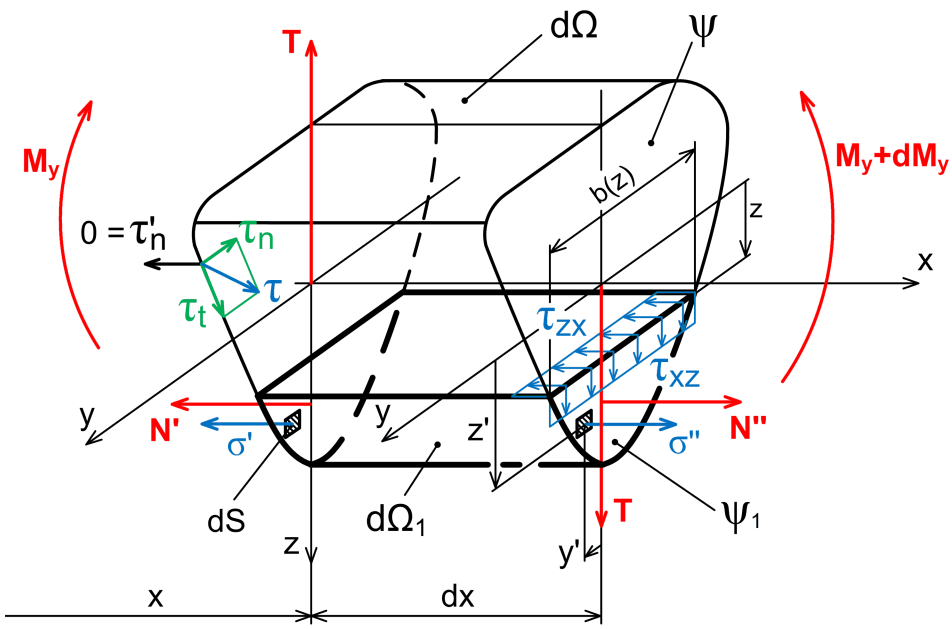
Pozn: Modul průřezu W_y se počítá vždy pro menší průřez v místě vrubu. Vliv vrubu na napjatost a bezpečnost je nutné vždy uvažovat.

7.6.2 Vliv příčného silového zatížení prutu

Pro jednoduchost uvažujeme prut zatížený třemi osamělými silami působícími kolmo k podélné ose prutu



Z podmínky rovnováhy uvolněného prvku prutu Ω_1 vyplývá, že v řezu x působí posouvající síla T, která způsobí smykové napětí τ.
Naším cílem je stanovit jeho průběh po průřezu. V dalším se omezíme na průřezy, které mají jednu osu symetrie, v které působí posouvající síla T.

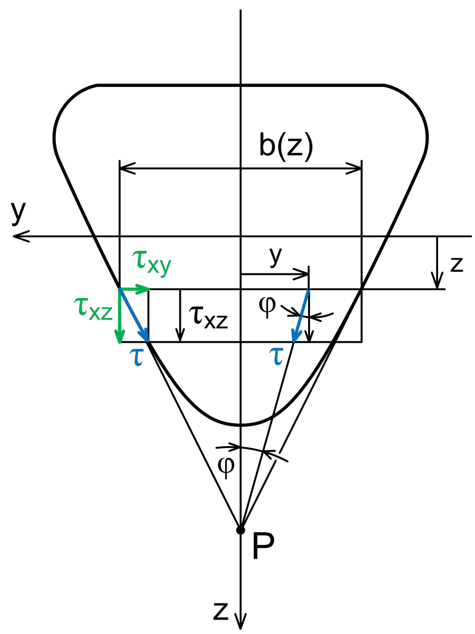


Jelikož vnější povrch prutu není zatížen je hodnota smykového napětí τ'_n rovna nule. Potom podle věty o sdruženosti smykových napětí je i kolmé napětí τ_n působící v řezu nulové. Z těchto důvodů má smykové napětí τ na obrysu směr tečny profilu.

Předpoklady plynoucí
z praktických poznatků:

- svislé složky smykových napětí τ_{xz} v místech průřezu se stejnou souřadnicí $\boldsymbol{z}$ jsou stejné

- nositelky smykových napětí ve všech místech se stejnou souřadnicí z se protínají v pólu P na ose symetrie



Pro smykové napětí $\tau(y, z)$ tedy platí

$$\tau(y, z) = \frac{\tau_{xz}(z)}{\cos \varphi} \tag{7.35}$$

Podmínka silové rovnováhy pro elementární prvek $\mathrm{d}\Omega_1$

$$\sum F_x \;:\; N'' - N' - \tau_{zx}\, b(z)\, \mathrm{d}x = 0$$

$$\int\limits_{\psi_1} \frac{M_y + \mathrm{d}M_y}{J_y}\, z'\, \mathrm{d}S - \int\limits_{\psi_1} \frac{M_y}{J_y}\, z'\, \mathrm{d}S - \tau_{zx}\, b(z)\, \mathrm{d}x = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}M_y}{J_y} \underbrace{\int\limits_{\psi_1} z'\, \mathrm{d}S}_{U_y^{\psi_1}(z)} - \tau_{zx}\, b(z)\, \mathrm{d}x = 0$$

$$\tau_{xz}(z) = \tau_{zx}(z) = \frac{\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x}\, U_y^{\psi_1}(z)}{b(z) J_y} = \frac{T U_y^{\psi_1}(z)}{b(z) J_y} \tag{7.36}$$

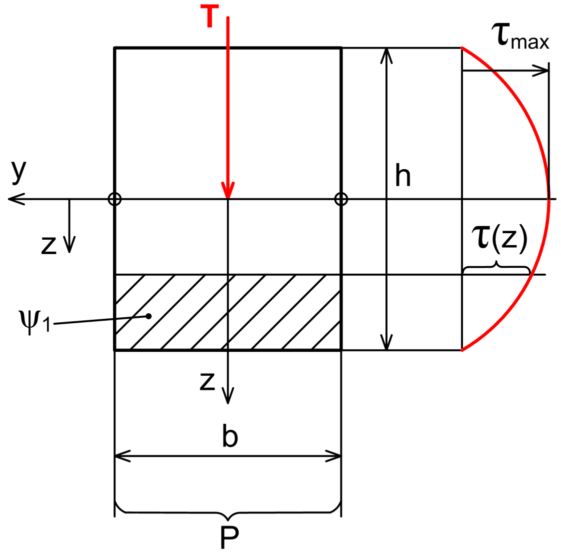
Předchozí vztah se v literatuře často nazývá **Žuravského vzorec**.

Z hlediska pevnostní kontroly je důležitá maximální hodnota smykového napětí τ_{max}, která se stanoví z podmínky extrému $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z} = 0$.

Je možné odvodit, že u průřezů, u kterých je tečna v místě průsečíku obrysu s neutrální osou y rovnoběžná s osou symetrie je maximální smykové napětí v tomto průsečíku.

Demonstrační příklad:

Stanovte průběh smykového napětí u obdélníkového průřezu



$$U_y^{\psi_1}(z) = b\left(\frac{h}{2} - z\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

$$J_y = \frac{1}{12} b h^3$$

$$\tau_{xz}(z) = \tau = \frac{T U_y^{\psi_1}(z)}{b J_y} = \frac{T\,\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{b\,\frac{1}{12} b h^3} = \frac{6T}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

Průběh napětí je parabolický.

Maximální smykové napětí je v místech na neutrální ose

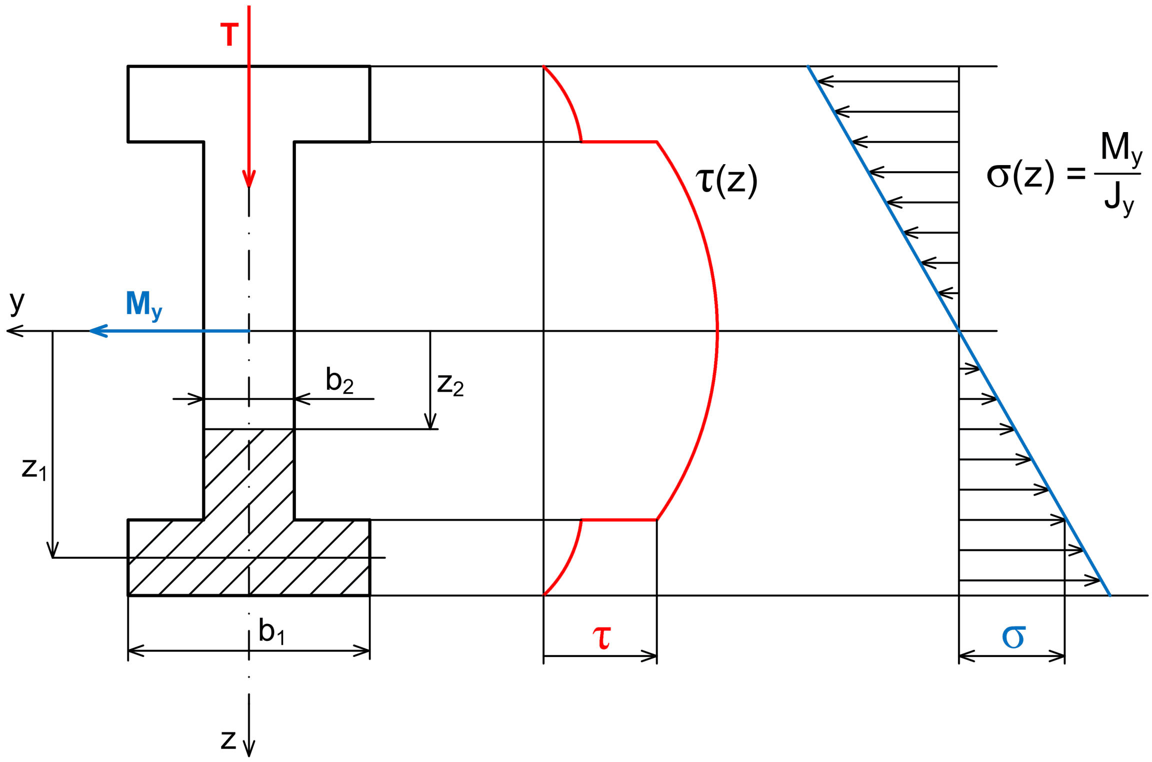
$$\tau_{max} = \tau(z = 0) = \frac{3}{2}\frac{T}{bh} = \frac{3}{2}\frac{T}{S} = \frac{3}{2}\overline{\tau}$$

Maximální napětí τ_{max} je 1,5 krát větší než průměrné nominální smykové napětí $\overline{\tau}$ v průřezu.

U běžných štíhlých prutů je velikost smykového napětí ve srovnání s ohybovým napětím zanedbatelná. Mimoto bývá maximální smykové napětí na neutrálné ose, kde je ohybové napětí nulové.

Smykové napětí nesmíme zanedbat u nosníků extrémně krátkých, kde je veliká posouvající síla T a malý ohybový moment M_y. Zde je nutné úlohu počítat jako kombinované namáhání (jde o rovinnou napjatost) s redukovaným napětím $\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$.

Dále musíme smykové napětí uvážit u štíhlých válcovaných profilů v místech přechodu pásnice do stojiny, kde je skokové navýšení smykového napětí z důvodu signifikantní redukce tloušťky a kde navíc působí i značné ohybové napětí σ. I zde jde o kombinované namáhání a rovinnou napjatost.

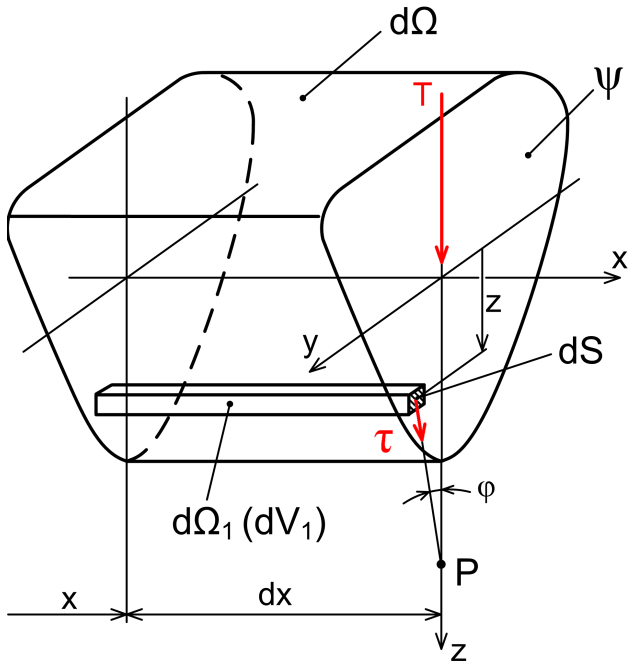


$$\tau(z_1) = \frac{TU_y(z_1)}{b_1 J_y} \quad ; \quad \tau(z_2) = \frac{TU_y(z_2)}{b_2 J_y}$$

Na hranici pásnice a stojiny je skok $b_1 \rightarrow b_2 \Rightarrow$ skok v průběhu τ

Energie napjatosti od posouvající síly T

Vyjdeme z měrné energie smykové napjatosti $\lambda_\tau = \dfrac{\tau^2}{2G}$ (7.36)



$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Energie napjatosti v elementárním prvku

$$\mathrm{d}W = \int\limits_{\mathrm{d}\Omega} \frac{\tau^2}{2G}\,\mathrm{d}V_1 = \int\limits_{\psi} \frac{\tau^2}{2G}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2G}\int\limits_{\psi}\left(\frac{TU_y(z)}{\cos\varphi\, b(z) J_y}\right)^2 \mathrm{d}S\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2G}\int\limits_{\psi}\left(\frac{U_y(z)}{\cos\varphi\, b(z) J_y}\right)^2 \frac{S\,\mathrm{d}S}{S}\,T^2\,\mathrm{d}x = \beta_y \frac{T^2\,\mathrm{d}x}{2GS} \qquad (7.37)$$

Pro **tvarový součinitel příčného průřezu $\boldsymbol{\beta_y}$** platí

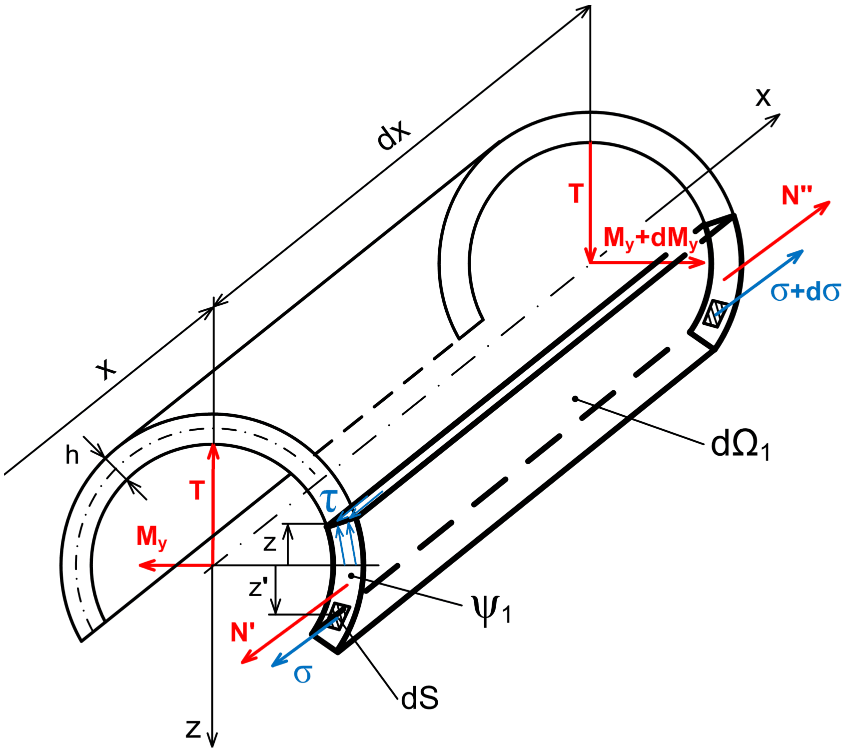
$$\beta_y = \int\limits_{\psi}\left(\frac{U_y(z)}{\cos\varphi\, b(z) J_y}\right)^2 S\,\mathrm{d}S \qquad (7.38)$$

Energie napjatosti celého prutu je určena vztahem

$$W = \int\limits_{\gamma} \beta_y \frac{T^2\,\mathrm{d}x}{2GS} \qquad (7.39)$$

Smykové napětí u tenkostěnných symetrických profilů

Element tenkostěnného profilu je zatížen posouvajícími silami a ohybovými momenty působícími v příčných řezech



Smykové napětí τ má směr tečny střednice průřezu. Vzhledem k malé tloušťce h předpokládáme, že **$\boldsymbol{\tau}$ je v daném místě střednice po tloušťce konstantní**. Podmínka silové rovnováhy:

$$\sum F_x \ : \ N' + \tau h \,\mathrm{d}x - N'' = 0$$

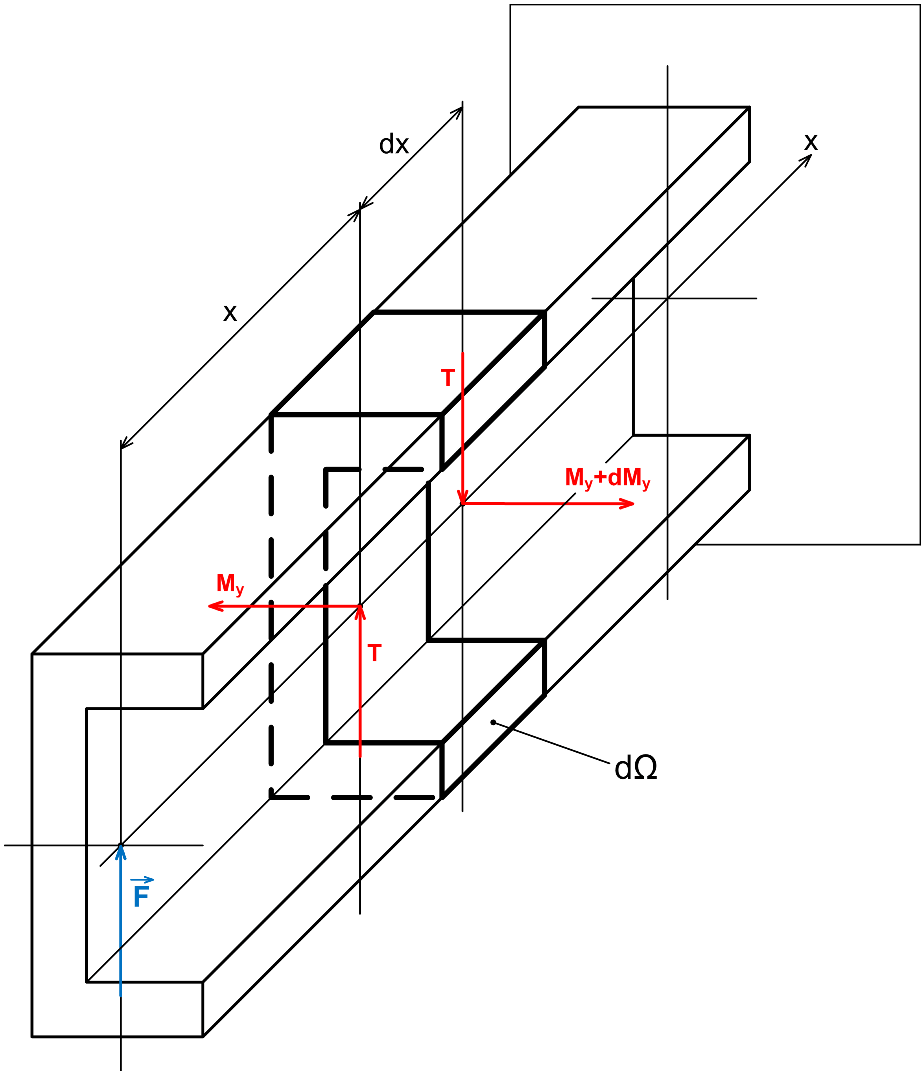
$$\int\limits_{\psi_1} \sigma \,\mathrm{d}S + \tau h \,\mathrm{d}x - \int\limits_{\psi_1} (\sigma + \mathrm{d}\sigma) \,\mathrm{d}S = 0$$

$$\int\limits_{\psi_1} \frac{M_y z'}{J_y} \,\mathrm{d}S + \tau h \,\mathrm{d}x - \int\limits_{\psi_1} \frac{(M_y + \mathrm{d}M_y)}{J_y} \, z' \,\mathrm{d}S = 0$$

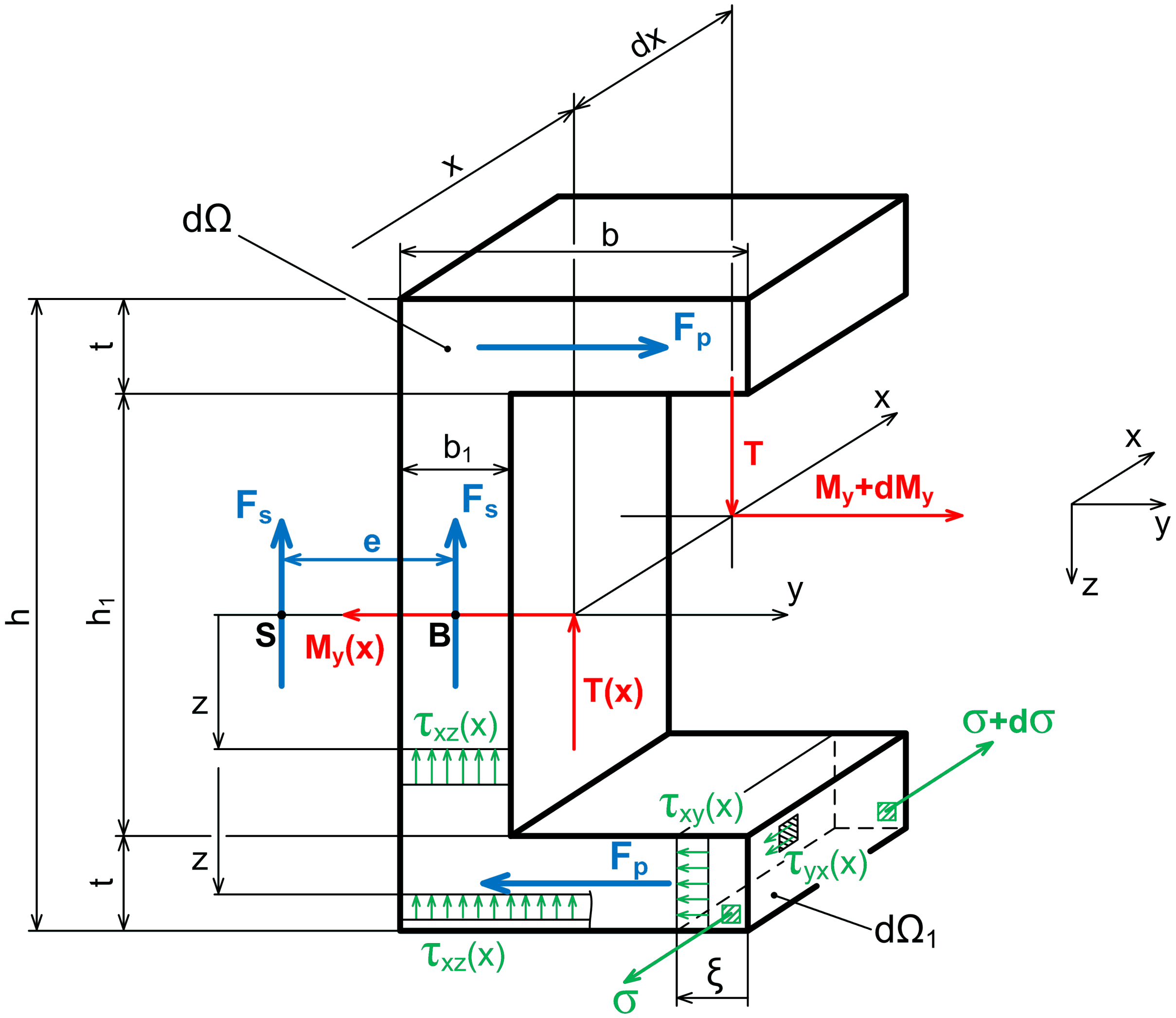
$$\tau h \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}M_y}{J_y} \int\limits_{\psi_1} z' \,\mathrm{d}S \qquad \tau(z) = \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} \frac{U_y^{\psi_1}}{h J_y} = \frac{T U_y^{\psi_1}(z)}{h J_y} \qquad (7.40)$$

Smykové napětí u tenkostěnných nesymetrických profilů

Zaměříme svoji pozornost na tenkostěnný válcovaný profil, který je zatížený osamělou silou F působící v hlavní centrální ose kvadratických momentů z, která není osou symetrie průřezu



V místě x vyjmeme element dΩ o délce dx, který zatížíme příslušnými složkami VVU, konkrétně posouvající silou $T(x)$ a ohybovým momentem $M_y(x)$, resp. $T(x)$ a $M_y(x)$ + d$M_y(x)$



Posouvající síla $T(x)$ vyvolá v pásnici a ve stojině smyková napětí τ_{xz}, jejichž průběh je popsán již odvozeným Žuravského vztahem (7.35).

Pásnice:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{T U_y^{\psi_1}}{b J_y} = \frac{T\left(\frac{h}{2} - z\right) b \, \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right)}{b J_y} = \frac{T(h^2 - 4z^2)b}{8bJ_y} \qquad (7.41)$$

Stojina:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{T\left[\left(\frac{h}{2}-\frac{h_1}{2}\right) b\,\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+\frac{h_1}{2}\right)+\left(\frac{h_1}{2}-z\right) b_1 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{2}+z\right)\right]}{b_1 J_y} =$$

$$= \frac{T\left[(h^2-h_1^2)b+(h_1^2-4z^2)b_1\right]}{8b_1 J_y} \tag{7.42}$$

Výsledná svislá síla ve stojině F_S je rovna

$$F_S = \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \tau_{xz}(z) b_1 \,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{T}{8b_1 J_y}\left[(h^2-h_1^2)bh_1 + h_1^3 b_1 - \frac{4b_1}{3}\left(\left(\frac{h_1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h_1}{2}\right)^3\right)\right] =$$

$$= \frac{T}{8J_y}\left[(h^2-h_1^2)bh_1 + \frac{2}{3}b_1 h_1^3\right] \tag{7.43}$$

Je možné snadno dokázat, že výraz v závorce je možné následovně zjednodušit

$$(h^2-h_1^2)bh_1 + \frac{2}{3}b_1 h_1^3 \doteq 8J_y \tag{7.44}$$

Po zpětném dosazení do (46) dostáváme pro sílu ve stojině F_s velice jednoduchý vztah (48)

$$F_S = T \tag{7.45}$$

který říká, že **stojina v podstatě přenáší celou posouvající sílu $\boldsymbol{T(x)}$**.

V pásnici vzniká rovněž smykové napětí τ_{xy}, které vyplývá z podmínky silové rovnováhy elementu $\mathrm{d}\Omega_1$ ve směru osy x. Analogicky zde použijeme vztah (7.40), který byl odvozen pro symetrický tenkostěnný profil

$$\tau_{xy}(\xi) = \frac{TU_y^{\psi_1}}{tJ_y} = \frac{T\xi t\,\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+\frac{h_1}{2}\right)}{tJ_y} =$$

$$= \frac{T(h+h_1)}{4J_y}\,\xi \tag{7.46}$$

Výsledná vodorovná síla v pásnici je dána následujícím integrálem

$$F_p = \int\limits_0^b \tau_{xy}(\xi)\,\mathrm{d}S = \int\limits_0^b \tau_{xy}t\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_0^b \frac{T(h+h_1)}{4J_y}\,t\xi\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{T}{4J_y}(h+h_1)\left(\frac{h}{2}-\frac{h_1}{2}\right)\frac{b^2}{2} = \frac{T}{16J_y}\left(h^2-h_1^2\right)b^2 \tag{7.47}$$

Stejně veliká síla F_p, ale opačného směru působí i v horní pásnici.

Silovými výslednicemi vnitřních smykových napětí u nesymetrických průřezů je svislá síla F_s působící ve stojině a silová dvojice sil F_p, které působí v pásnicích. Ze statiky je známo, že takovou silovou soustavu je možné nahradit jedinou osamělou silou, která působí v bodě průřezu S, který nazýváme tzv. **středem smyku**. Jeho poloha se určí z momentové podmínky rovnováhy vzhledem k bodu B na stojině

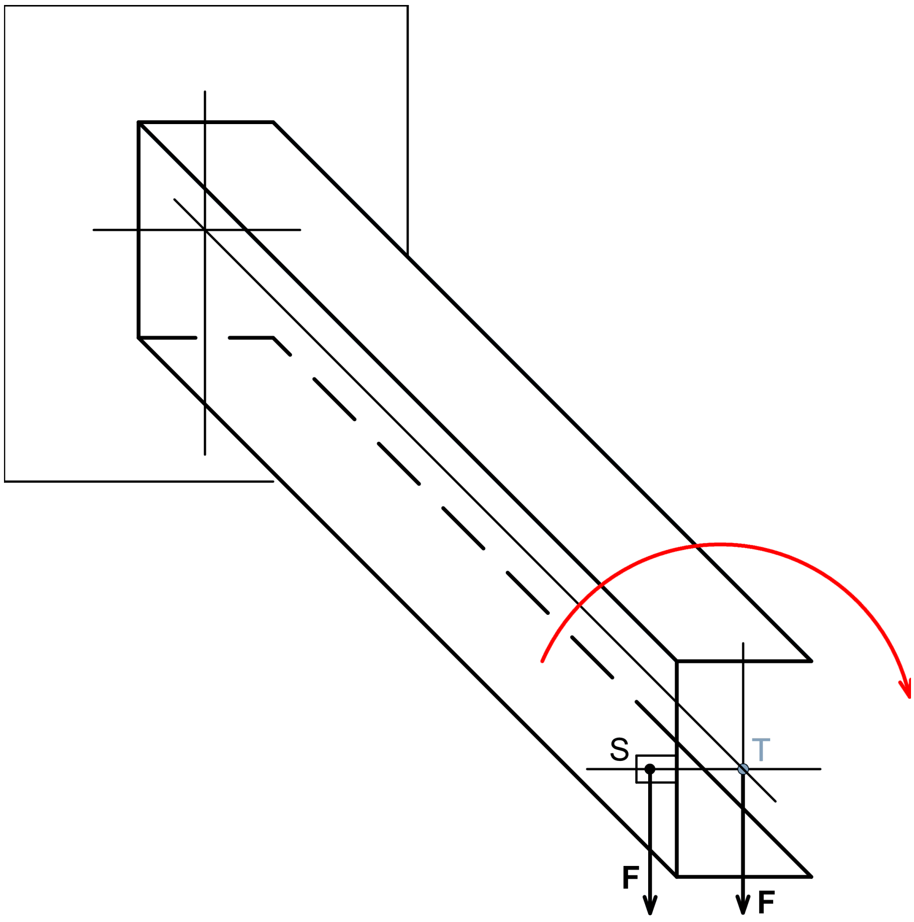
$$\sum M_B\ :\ Te = F_S e = F_p\,\frac{1}{2}\,(h+h_1)$$

$$e = \frac{1}{T}\,\frac{T}{16J_y}\,(h^2 - h_1^2)\,b^2\,\frac{1}{2}\,(h + h_1) =$$

$$= \frac{(h^2 - h_1^2)(h + h_1)\,b^2}{32J_y}$$

Def.: Středem smyku rozumíme místo příčného průřezu nesymetrického prutu, kde jedinou výslednicí vnitřních smykových sil ze smykových napětí je osamělá síla velikosti posouvající síly $\boldsymbol{T(x)}$.

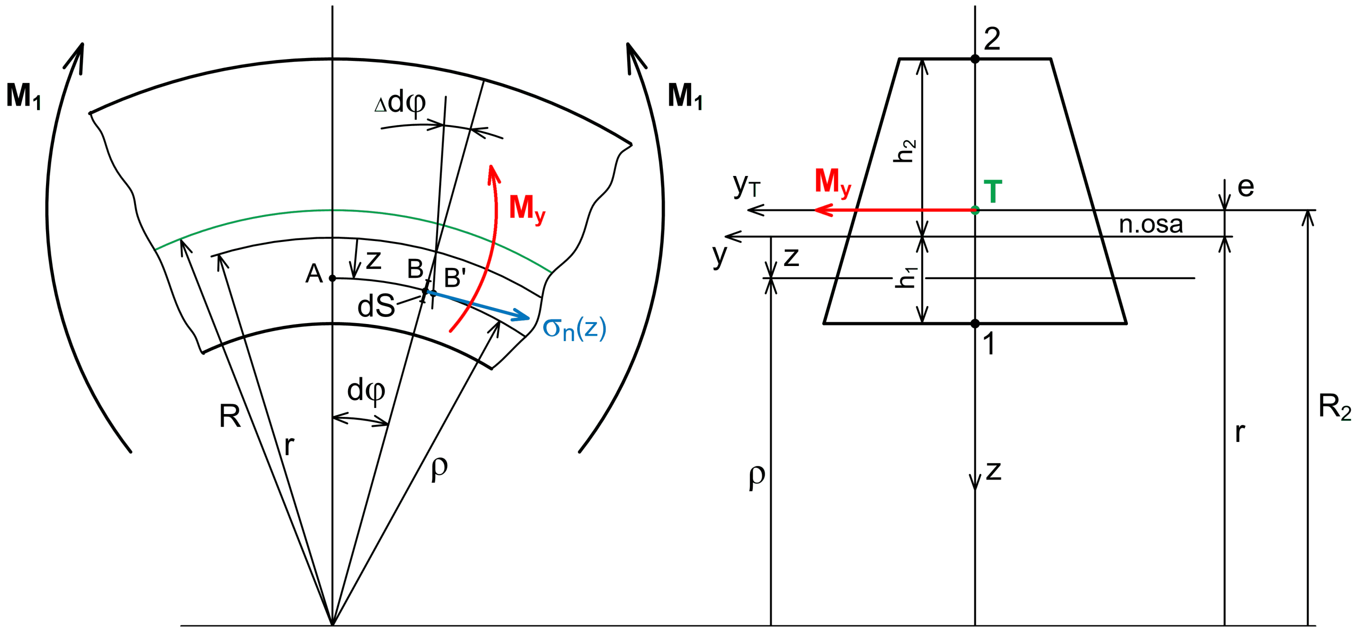
Pokud je nosník zatížen vnějšími silami tak, že posouvající síla neprochází středem smyku, potom navíc dochází ke kroucení průřezu.



7.6.3 Vliv zakřivení střednice

Zaměříme se na případ prismatického prutu, který splňuje následující pracovní předpoklady:

- platí obecné prutové předpoklady,
- střednice prutu je rovinná křivka,
- průřez má jednu osu symetrie, která leží v rovině střednice,
- jedinou složkou VVU je ohybový moment M_y,
- příčný průřez se natáčí jako rovina kolem neutrální osy, která není totožná s hlavní osou centrálních kvadratických momentů průřezu.



Poměrné přetvoření ε_n vlákna v místě z je podle definice rovno

$$\varepsilon_n(z) \doteq \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \frac{z\ \Delta\mathrm{d}\varphi}{\rho\,\mathrm{d}\varphi} = \frac{z\ \Delta\mathrm{d}\varphi}{(r-z)\,\mathrm{d}\varphi} \tag{7.48}$$

S ohledem na tahovou jednoosou napjatost dostáváme pro příčná přetvoření ε_y,ε_z a normálové napětí σ_n následující relace

$$\varepsilon_y(z) = \varepsilon_z(z) = -\mu\varepsilon_n(z) \tag{7.49}$$

$$\sigma_n(z) = E\varepsilon_n(z) = \frac{Ez\ \Delta \mathrm{d}\varphi}{\rho\, \mathrm{d}\varphi} = \frac{Ez\ \Delta \mathrm{d}\varphi}{(r-z)\, \mathrm{d}\varphi} \tag{7.50}$$

Z předchozího vztahu plyne, že **průběh normálového napětí $\boldsymbol{\sigma_n}$ je u křivého prutu hyperbolický v porovnání s přímkovým průběhem při prostém základním ohybu**. Zatím neznámý poloměr křivosti neutrálního vlákna r a úhel natočení řezu $\Delta d\varphi$ stanovíme na základě podmínek statické ekvivalence v řezu.

Silová podmínka statické ekvivalence ve směru normály řezu

$$\sum F_n \qquad \int_{\psi} \sigma_n(z)\, \mathrm{d}S = N = 0 \tag{7.51}$$

Po dosazení vztahu (7.50) pro průběh napětí do rovnice (7.51) obdržíme

$$\frac{E\ \Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \int_{\psi} \frac{z}{\rho}\, \mathrm{d}S = 0$$

Předchozí rovnice je splněna, platí-li

$$\int_{\psi} \frac{z}{\rho}\, \mathrm{d}S = 0 \tag{7.52}$$

Matematickou úpravou získáme vztah pro poloměr křivosti r neutrálního vlákna

$$\int_{\psi} \frac{z}{\rho}\, \mathrm{d}S = \int_{\psi} \frac{r-\rho}{\rho}\, \mathrm{d}S = r \int_{\psi} \frac{1}{\rho}\, \mathrm{d}S - \overbrace{\int_{\psi} \mathrm{d}S}^{S} = 0$$

$$r = \frac{S}{\int_{\psi} \frac{\mathrm{d}S}{\rho}} \tag{7.53}$$

Momentová podmínka statické ekvivalence:

$$\sum M_y \ : \ \int\limits_{\psi} \sigma_n(z) z \, \mathrm{d}S = M_y \tag{7.54}$$

Opět využijeme vztahu (7.50) pro průběh napětí, který dosadíme do (7.54) a použijeme formální úpravu $z^2 = z(r-\rho)$

$$\frac{E \, \Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \int\limits_{\psi} \frac{z^2}{\rho} \, \mathrm{d}S = M_y \tag{7.55}$$

$$\frac{E \, \Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \underbrace{\left[r \int\limits_{\psi} \frac{z}{\rho} \, \mathrm{d}S - \int\limits_{\psi} z \, \mathrm{d}S \right]}_{r \cdot 0 \ - \ (-Se)} = M_y$$

$$\frac{E \, \Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{M_y}{Se} \tag{7.56}$$

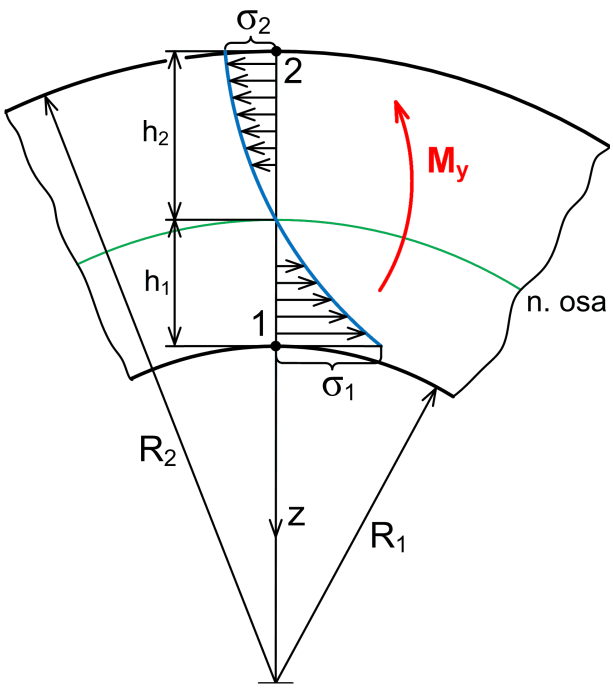
Po zpětném dosazení (7.56) do vztahu (7.50) dostaneme finální relaci pro stanovení průběhu normálového napětí v příčném průřezu

$$\sigma_n(z) = \frac{M_y z}{Se\rho} = \frac{M_y z}{Se(r-z)} \tag{7.57}$$

Formální úpravou vztahu (7.56) dostaneme relaci pro úhel natočení $\Delta\mathrm{d}\varphi$

$$\Delta\mathrm{d}\varphi = \frac{M_y \, \mathrm{d}\varphi}{ESe} = \frac{M_y \, \mathrm{d}s}{ESeR} \tag{7.58}$$

Průběh napětí σ_n v průřezu stanovený dle (7.57) je znázorněn na následujícím obrázku



$$\sigma_1 = \frac{M_y h_1}{SeR_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_y(-h_2)}{SeR_2}$$

$$\left|\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right| = \frac{h_1}{h_2}\frac{R_2}{R_1}$$

Extrémní tahová a tlaková napětí jsou v místech 1 a 2 na povrchu prutu.

Pevnostní kontrola u materiálu ve stavu křehkém se provádí zvlášť v tahové a zvlášť v tlakové oblasti

$$k_{Rt} = \frac{\sigma_{Rt}}{\sigma_1} \qquad k_{Rd} = \frac{\sigma_{Rd}}{|\sigma_2|} \tag{7.59}$$

A stanoví se minimální bezpečnost v řezu

$$k_R(\varphi) = min\{k_{Rt}, k_{Rd}\} \tag{7.60}$$

U materiálu ve stavu tvárném se vychází z maximální absolutní hodnoty ohybového napětí v řezu

$$\sigma_{max} = \max\{\sigma_1, |\sigma_2|\} \tag{7.61}$$

A bezpečnost v řezu je rovna

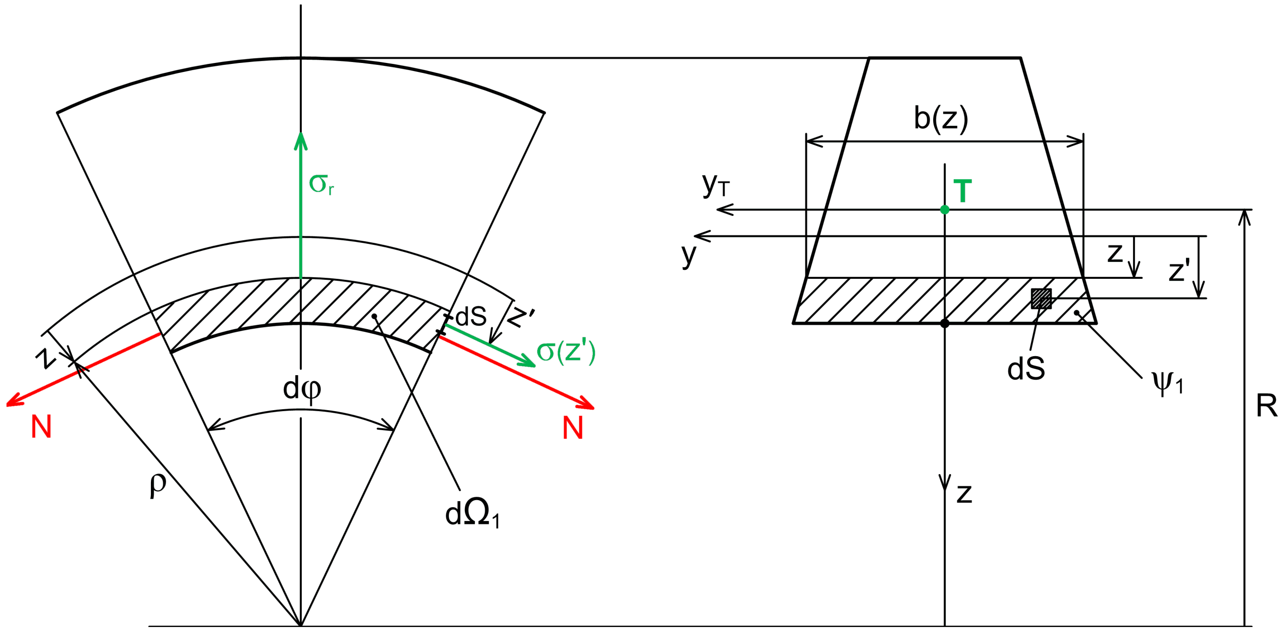
$$k_K(\varphi) = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}} \tag{7.62}$$

V obou případech se určí minimální bezpečnost k_{min} v řezech podél střednice, která musí být větší než bezpečnost doporučená k_D.

$$k_{min} = min\left\{k_K(\varphi), \text{resp. } k_R(\varphi)\right\} \geqq k_D \tag{7.63}$$

Vznik radiálního napětí

Dvěma symetrickými řezy uvolníme element dΩ a z něho válcovým řezem subelement dΩ_1



Z levé a pravé strany působí na subelement dΩ_1 normálová síla N jako výslednice ohybových napětí $\sigma(z')$ působících na podprůřez ψ_1.

$$N = \int_{\psi} \sigma(z')\,\mathrm{d}S = \int_{\psi} \frac{M_y z'}{Se(r-z')}\,\mathrm{d}S \tag{7.64}$$

Následně formulujeme podmínku silové rovnováhy v radiálním směru

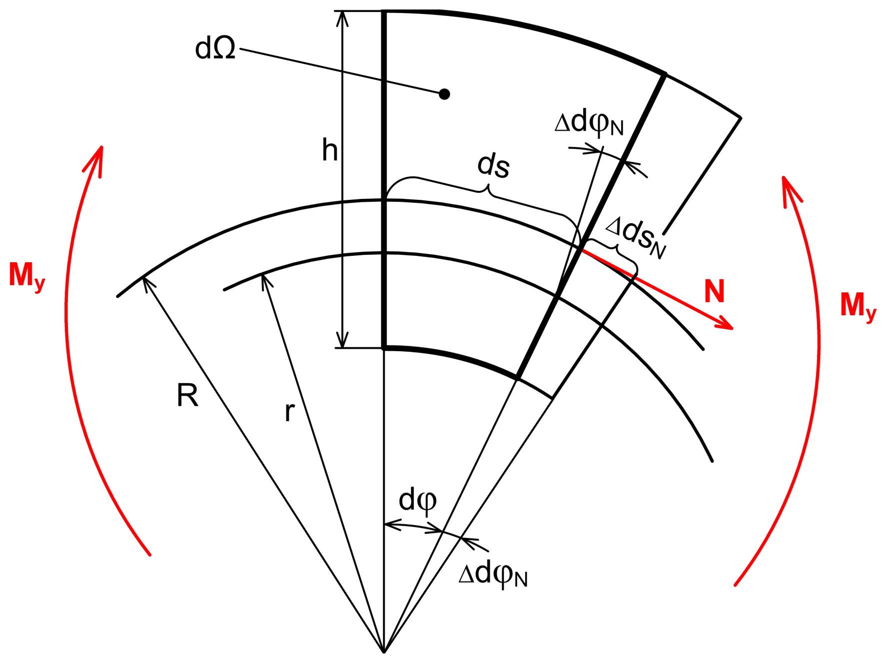
$$\sum F_r \ : \ 2N \underbrace{\sin \frac{\mathrm{d}\varphi}{2}}_{\doteq \frac{\mathrm{d}\varphi}{2}} - \sigma_r \rho \, \mathrm{d}\varphi \, b(z) = 0$$

$$\sigma_r = \frac{1}{\rho b(z)} \, N = \frac{1}{\rho b(z)} \int_{\psi} \sigma(z') \, \mathrm{d}S \tag{7.65}$$

V důsledku zakřivení střednice vzniká u prutu **radiální normálové napětí $\boldsymbol{\sigma_r}$**, což je porušením předpokladu o prutové napjatosti. Ze vztahu (7.64) vyplývá, že velikost radiálního napětí σ_r klesá s růstem poloměru křivosti vlákna ρ. Dále předpokládáme, že poloměr křivosti R a tedy i obecné poloměry ρ jsou dostatečně veliké, **abychom mohli radiální napětí $\boldsymbol{\sigma_r}$ vůči ohybovému napětí zanedbat ($\boldsymbol{\sigma_r \ll \sigma}$)**.

Energie napjatosti u zakřiveného prutu.

Energii napjatosti dW v elementu prutu dΩ stanovíme na základě elementární práce dA vnějších sil působících na element, tj. příslušných složek VVU, v našem případě normálové síly N a ohybového momentu M_y. Předpokládáme, že levý řez jest zároveň rovinou symetrie prutu, což znamená, že se neposouvá ani nenatáčí. Práci tedy vykonávají pouze N a M_y, které působí v pravém řezu. Element dΩ nejprve zatížíme M_y a následně N



$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}A = \frac{1}{2}\, M_y\, \Delta\mathrm{d}\varphi_M + \frac{1}{2}\, N\, \Delta\mathrm{d}s_N - M_y\, \Delta\mathrm{d}\varphi_N =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{M_y^2\,\mathrm{d}\varphi}{ESe} + \frac{N^2\,\mathrm{d}s}{ES} - \frac{M_y\,\Delta\mathrm{d}s_N}{R}$$

$$= \frac{M_y^2\,\mathrm{d}s}{2ESRe} + \frac{N^2\,\mathrm{d}s}{2ES} - \frac{M_y N\,\mathrm{d}s}{ESR} \tag{7.66}$$

Pro energii napjatosti celého zakřiveného prutu dostáváme potom následující vztah

$$W = \int\limits_{\gamma} \frac{M_y^2(s)\,\mathrm{d}s}{2ESRe} + \int\limits_{\gamma} \frac{N^2(s)\,\mathrm{d}s}{2ES} - \int\limits_{\gamma} \frac{M_y(s)N(s)\,\mathrm{d}s}{ESR} \tag{7.67}$$

Prut slabě zakřivený

U prutu slabě zakřiveného je maximální příčný rozměr h značně menší než poloměr křivosti střednice R ($h \ll R$), obvykle $\frac{h}{R} < \frac{1}{5}$. Při odvození vyjdeme z rovnice (7.55)

$$\frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \int\limits_{\gamma} \frac{z^2}{\rho}\,\mathrm{d}s = M_y(s)$$

Pro tenký prut platí

$$\rho \doteq R \tag{7.68}$$

Dosazením do předchozího vztahu dostáváme po algebraické úpravě relaci

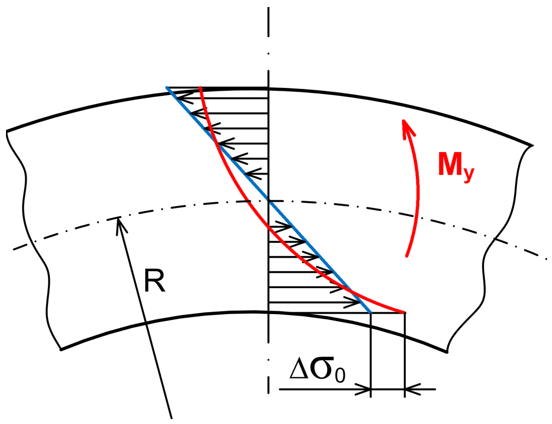
$$\frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{R\mathrm{d}\varphi} = \frac{M_y}{J_y} \tag{7.69}$$

pomocí které upravíme vztah pro normálové napětí (7.50)

$$\sigma(z) = \frac{M_y(s)}{J_y}\,z \tag{7.70}$$

Průběh normálového napětí po průřezu je potom **prakticky lineární** a tedy stejný jako u prostého základního ohybu. Neutrální osa splývá s hlavní centrální osou kvadratických momentů y.

Chyba v maximálním ohybovém napětí $\Delta\sigma_o$, kterou se u kruhového průřezu u prutu s $\frac{h}{R} = \frac{1}{5}$ dopouštíme je 8,2%, viz následující obr.



Z analogie se základním ohybem plyne i příslušná ohybová energie. U slabě zakřivených prutů je přírůstek úhlu natočení $\Delta \mathrm{d}\varphi_N$ od normálové síly N zanedbatelný a třetí člen v rovnici (7.67) tedy odpadá. Energie napjatosti u slabě zakřiveného prutu je s uvážením vztahu (7.67) a vlivu posouvající síly T rovna

$$W = \int\limits_{\gamma} \frac{M_y^2(s)\,\mathrm{d}s}{2EJ_y} + \int\limits_{\gamma} \frac{N^2(s)\,\mathrm{d}s}{2ES} + \beta \int\limits_{\gamma} \frac{T^2(s)\,\mathrm{d}s}{2GS} \tag{7.71}$$

Pomocí Castiglianovy věty je potom možné vypočítat posuv u_F ve směru osamělé síly F resp. úhel natočení $\Delta\varphi_M$ způsobený silovou dvojicí M

$$u_F = \int\limits_{\gamma} \frac{M_y(s)}{EJ_y}\,\frac{\partial M_y}{\partial F}\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\gamma} \frac{N_y(s)}{ES}\,\frac{\partial N_y}{\partial F}\,\mathrm{d}s + \beta \int\limits_{\gamma} \frac{T(s)}{GS}\,\frac{\partial T}{\partial F}\,\mathrm{d}s \tag{7.72}$$

$$\Delta\varphi_M = \int\limits_{\gamma} \frac{M_y(s)}{EJ_y}\frac{\partial M_y}{\partial M}\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\gamma} \frac{N_y(s)}{ES}\frac{\partial N_y}{\partial M}\,\mathrm{d}s + \beta \int\limits_{\gamma} \frac{T(s)}{GS}\frac{\partial T}{\partial M}\,\mathrm{d}s \tag{7.73}$$

V případě, že chceme vypočítat posunutí, resp. úhel natočení v místech, kde není osamělá síla resp. silová dvojice, zavedeme tam veličiny doplňkové F_d resp. M_d , které na konci výpočtu položíme rovny nule.

7.7 Namáhání na ohyb, praktické aplikace

Naším cílem je napjatostní, deformační a pevnostní analýza prutů s dominantním namáháním na ohyb. Omezíme se přitom na rovinné případy, kdy střednice prutu leží v rovině nákresu x, z. V téže rovině leží osa symetrie průřezu i vnější síly. Charakteristickou složkou vektoru VVU v obecném místě s je ohybový moment $M_y(s)$. Přičemž s může být souřadnice x resp. z u prutů přímých či v přímých úsecích obecných prutů, u křivých prutů pak křivočará souřadnice s, případně polární úhel φ.

Případ volných prutů je v praxi výjimečný a tak se zaměříme na pruty vázané, kde musíme nejprve stanovit stykové výslednice. Vycházíme přitom z obecného algoritmu uvedeného v kap. 5.2. Z důvodu zachování spojitosti výkladu si zde stručně připomeneme jeho základní kroky.

Prut uvolníme z vazeb, které nahradíme staticky ekvivalentními stykovými výslednicemi (reakcemi). Provedeme statický rozbor úlohy.

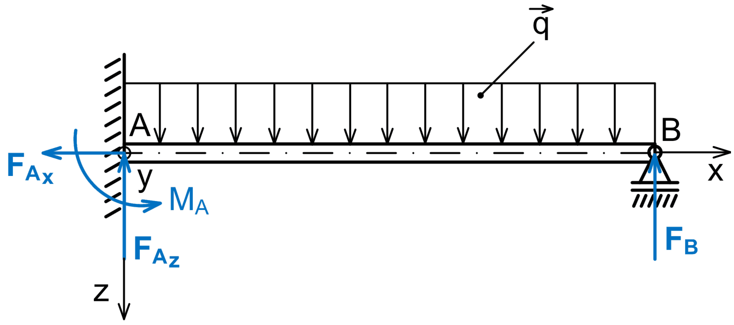
U **prutů staticky určitých** stanovíme stykové výslednice z podmínek statické rovnováhy. Dále postupujeme jako u prutů volných. Složky VVU stanovíme na základě podmínek statické rovnováhy uvolněných prvků prutu. V případě otevřených prutů jde o úlohu staticky určitou.

U **prutů staticky neurčitých** formulujeme k podmínkám statické rovnováhy stykové deformační podmínky pro částečně uvolněný prut, uvolněný na úroveň úlohy formálně staticky určité. Deformační podmínky v uvolněných vazbách pak řešíme některou z metod pro stanovení deformace prutu, zejména pomocí Castiglianovy věty. Obdržíme soustavu lineárních rovnic, ze které vypočteme stykové výslednice v částečně uvolněných vazbách . Zbývající stykové výslednice, pokud jsou zapotřebí, stanovíme z podmínek statické rovnováhy celého prutu. Složky VVU a následně napěťovou, deformační a pevnostní analýzu potom provádíme jako u prutů volných.

Typy vazbových deformačních podmínek:

a) homogenní deformační podmínka

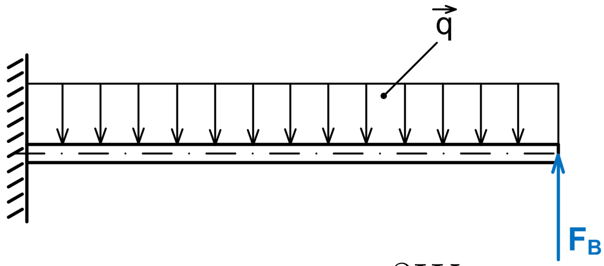
Úloha a úplné uvolnění:



Statický rozbor: $\mu = 4 \quad \nu = 3 \quad s = 1$

Úloha je 1x staticky neurčitá.

Částečné uvolnění:

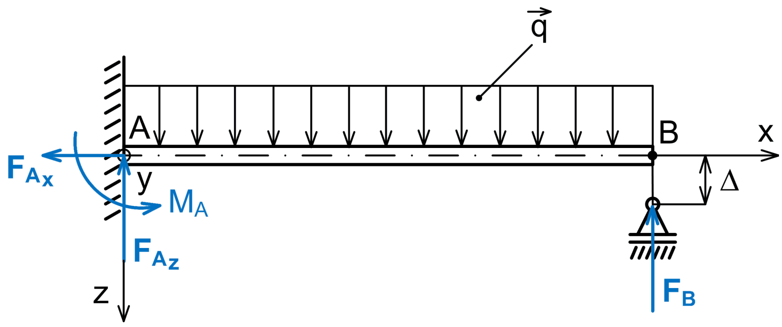


Vazbová deformační podmínka: $w_B = 0 \qquad w_B = \dfrac{\partial W}{\partial F_B}$

b) nehomogenní deformační podmínka

Případ montážní vůle

Úloha a úplné uvolnění:



Statický rozbor i částečné uvolnění jsou stejné jako u případu a).

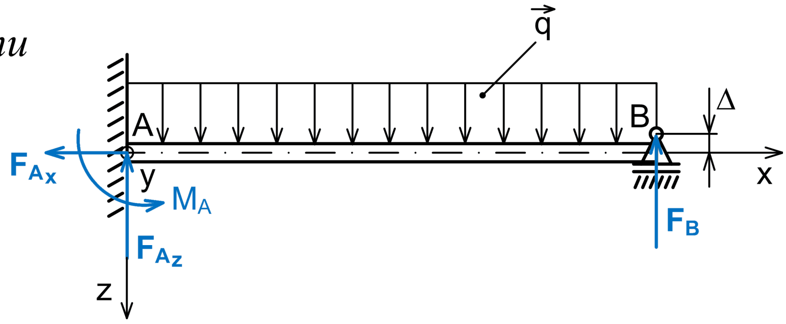
Vazbová deformační podmínka:

$$w_B = \Delta \qquad w_B = -\frac{\partial W}{\partial F_B}$$

Pozn: Znaménko mínus před Castiglianovou větou je tu z toho důvodu, že posuv Δ se děje proti smyslu působení stykové síly F_B.

Případ montážního přesahu

Úloha a úplné uvolnění:



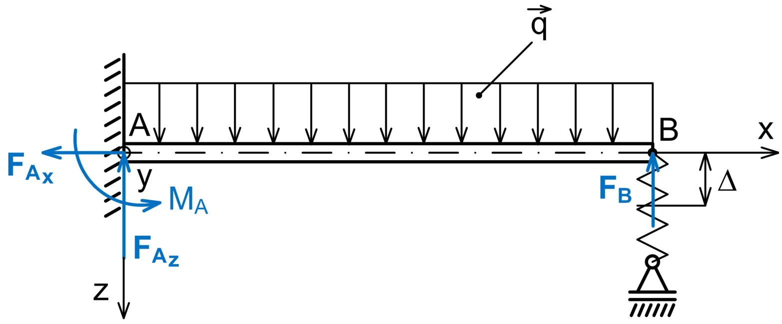
Statický rozbor i částečné uvolnění jsou stejné jako u případu a).

Vazbová deformační podmínka:

$$w_B = -\Delta \qquad w_B = \frac{\partial W}{\partial F_B}$$

c) silově závislá vazbová deformační podmínka

Úloha a úplné uvolnění:



Statický rozbor i částečné uvolnění jsou stejné jako u případu a).

Vazbová deformační podmínka:

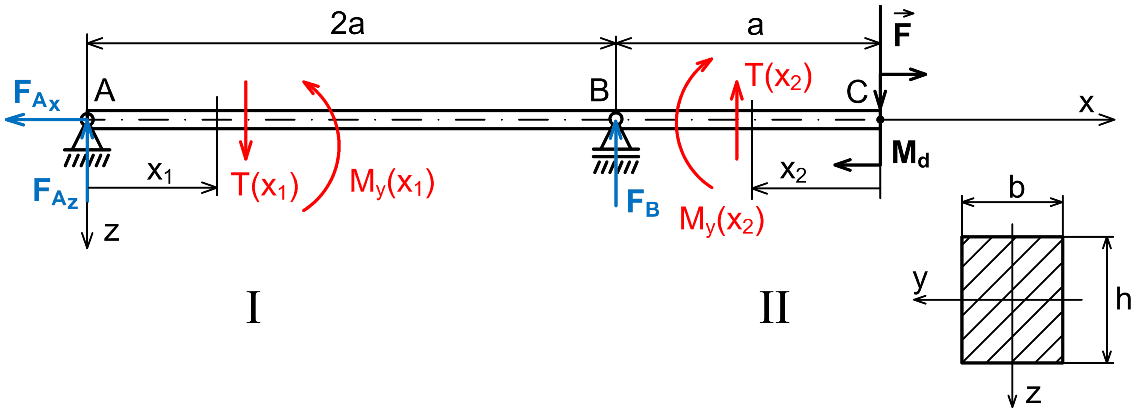
$$w_B = cF_B \qquad w_B = -\frac{\partial W}{\partial F_B}$$

V dalším se postupně zaměříme na následující kategorie prutů:

1) Pruty přímé
2) Pruty lomené (rámy)
3) Pruty zakřivené
4) Pruty smíšené

7.7.1 Pruty přímé - demonstrační příklady

Př.1: Navrhněte příčné rozměry obdélníkového průřezu a stanovte svislý průhyb a úhel natočení v místě C u prutu dle obrázku:



$F = 10^4$ N, $a = 1$ m, $\frac{b}{h} = 0,5$ u obdélníkového průřezu, mez kluzu $\sigma_K = 350$ MPa, bezp. $k_K = 2$, modul pružnosti v tahu $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa

Pozn: Vzhledem k tomu, že máme také stanovit úhel natočení v místě D, kde nepůsobí silová dvojice, zavedeme do tohoto místa již na počátku výpočtu veličinu doplňkový moment M_d.

Statický rozbor pro úplně uvolněné těleso:

$$\mu = 3 \qquad \nu = 3 \qquad s = \mu - \nu = 3 - 3 = 0$$

Úloha je staticky určitá.

Podmínky silové rovnováhy a stykové výslednice:

$$\sum F_x \ : \ F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_z \ : \ -F_{Az} - F_B + F = 0 \ \Rightarrow \ F_{Az} = -\frac{1}{2}F - \frac{M_d}{2a}$$

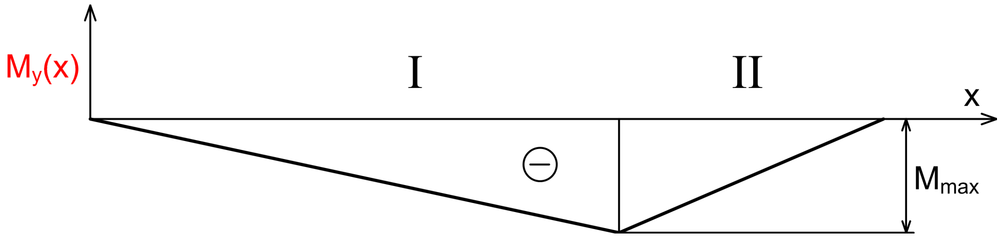
$$\sum M_A \ : \ F_B \cdot 2a - F \cdot 3a - M_d = 0 \ \Rightarrow \ F_B = \frac{3}{2}F + \frac{M_d}{2a}$$

Průběhy ohybových momentů v úsecích I a II

$$M_y(x_1) = F_A x_1 = -\frac{1}{2} F x_1 - \frac{M_d}{2a}\, x_1$$

$$M_y(x_2) = -F x_2 - M_d$$

Grafické znázornění průběhu ohybových momentů $M_y(x)$



Maximální ohybový moment:

$$M_{max} = \text{max}\,\{|M_y(x)|\} = Fa = 10^4\ \text{Nm}$$

Pevnostní návrh příčného průřezu:

$$\sigma_{0,max} = \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{\sigma_K}{k_K} \qquad W_y = \frac{1}{6}\, bh^3 = \frac{1}{12}\, h^3$$

$$\frac{12 M_{max}}{h^3} = \frac{\sigma_K}{k_K}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{12 M_{max} k_K}{\sigma_K}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 2}{350}} = 88,2\ \text{mm}$$

$$b = 0,5h = 44,1\ \text{mm}$$

Kvadratický moment průřezu:

$$J_y = \frac{1}{12}\, bh^3 = \frac{1}{12} \cdot 44,1 \cdot 88,2^3 = 2,522 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$$

Stanovení svislého průhybu v místě C pomocí Castiglianovy věty:

$$w_C = \frac{\partial W}{\partial F} = \int\limits_{\gamma} \frac{M_y(x)}{EJ_y} \, \frac{\partial M_y}{\partial F} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{EJ_y} \left[\int\limits_0^{2a} M_y(x_1) \, \frac{\partial M_y(x_1)}{\partial F} \, \mathrm{d}x_1 + \int\limits_0^{a} M_y(x_2) \, \frac{\partial M_y(x_2)}{\partial F} \, \mathrm{d}x_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y} \left[\int\limits_0^{2a} \left(-\frac{1}{2} F x_1 - \frac{M_d}{2a} \, x_1 \right) \left(-\frac{1}{2} \, x_1 \right) \mathrm{d}x_1 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{a} (-F x_2 - M_d)(-x_2) \, \mathrm{d}x_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y} \left(\left[\frac{F x_1^3}{12} \right]_0^{2a} + \left[\frac{F x_2^3}{3} \right]_0^{a} \right) = \frac{F a^3}{EJ_y} \, \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \frac{F a^3}{EJ_y} = \frac{10^4 \cdot 10^9}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 2,522 \cdot 10^6} = 18,9 \text{ mm}$$

Stanovení úhlu natočení v místě C pomocí Castiglianovy věty:

$$\varphi_C = \frac{\partial W}{\partial M_d} =$$

$$= \frac{1}{EJ_y}\left[\int\limits_0^{2a} M_y(x_1)\,\frac{\partial M_y(x_1)}{\partial M_d}\,\mathrm{d}x_1 + \int\limits_0^{a} M_y(x_2)\,\frac{\partial M_y(x_2)}{\partial M_d}\,\mathrm{d}x_2\right] =$$

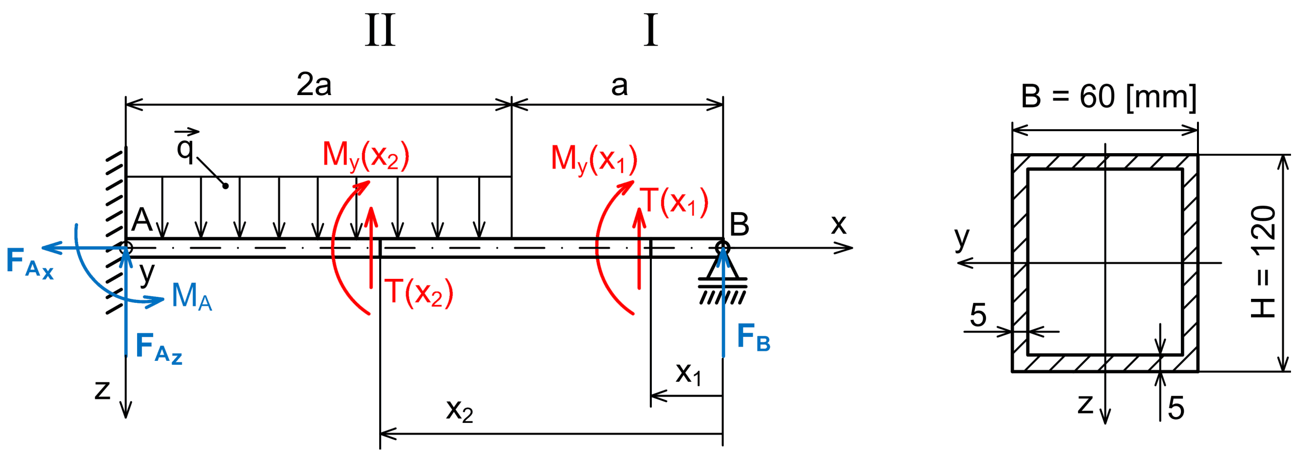
$$= \frac{1}{EJ_y}\left[\int\limits_0^{2a}\left(-\frac{1}{2}Fx_1 - \frac{M_d}{2a}\,x_1\right)\left(-\frac{x_1}{2a}\right)\mathrm{d}x_1 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{a}(-Fx_2 - M_d)\cdot(-1)\,\mathrm{d}x_2\right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y}\left(\left[\frac{Fx_1^3}{12a}\right]_0^{2a} + \left[\frac{Fx_2^2}{2}\right]_0^{a}\right) = \frac{Fa^2}{EJ_y}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{7}{6}\,\frac{Fa^2}{EJ_y} = \frac{7\cdot 10^4\cdot 10^6}{2,1\cdot 10^5\cdot 2,522\cdot 10^6} = 0,132\ \mathrm{rad}$$

Př.2: Proveďte pevnostní kontrolu prismatického prutu znázorněného na obrázku.



$q = 10^4$ Nm^{-1}, $a = 1$ m, mez kluzu $\sigma_K = 400$ MPa, dovolená bezpečnost $k_D = 2$

Statický rozbor pro úplně uvolněné těleso:

$$\mu = 4 \qquad \nu = 3 \qquad s = \mu - \nu = 4 - 3 = 1$$

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá.

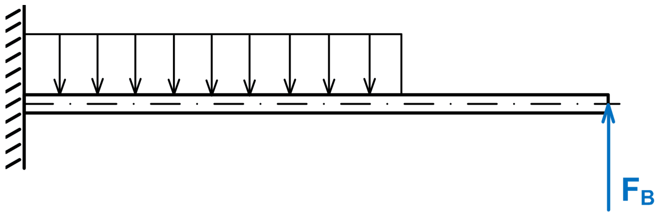
Podmínky statické rovnováhy pro úplně uvolněný prut

$$\sum F_x \ : \ F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_z \ : \ F_{Az} + F_B - 2qa = 0$$

$$\sum M_A \ : \ F_B \cdot 3a - 2qa^2 + M_A = 0$$

Částečně uvolněný prut



Deformační podmínka pro uvolněnou vazbu

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_B} = 0$$

Průběhy ohybových momentů M_y a posouvajících sil T v úsecích I a II

$$M_y(x_1) = F_B x_1 \qquad T(x_1) = -F_B$$

$$M_y(x_2) = F_B x_2 - q\,\frac{(x_2 - a)^2}{2} \qquad T(x_2) = -F_B + q(x_2 - a)$$

Pozn: Energie napjatosti W a tedy při ohybovém namáhání i ohybový moment M_y musí být matematicky vyjádřeny jako funkce vnějšího zatížení (zde q) a stykové výslednice v uvolněné vazbě (zde F_B). Pokud tomu tak není, je zapotřebí vztahy pro M_y do náležitého stavu přivést využitím podmínek statické rovnováhy.

Řešení deformační podmínky pomocí Castigliánovy věty

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_B} = 0$$

$$\frac{1}{EJ_y}\left[\int\limits_0^a M_y(x_1)\,\frac{\partial M_y(x_1)}{\partial F_B}\,\mathrm{d}x_1 + \int\limits_a^{3a} M_y(x_2)\,\frac{\partial M_y(x_2)}{\partial F_B}\,\mathrm{d}x_2\right] = 0$$

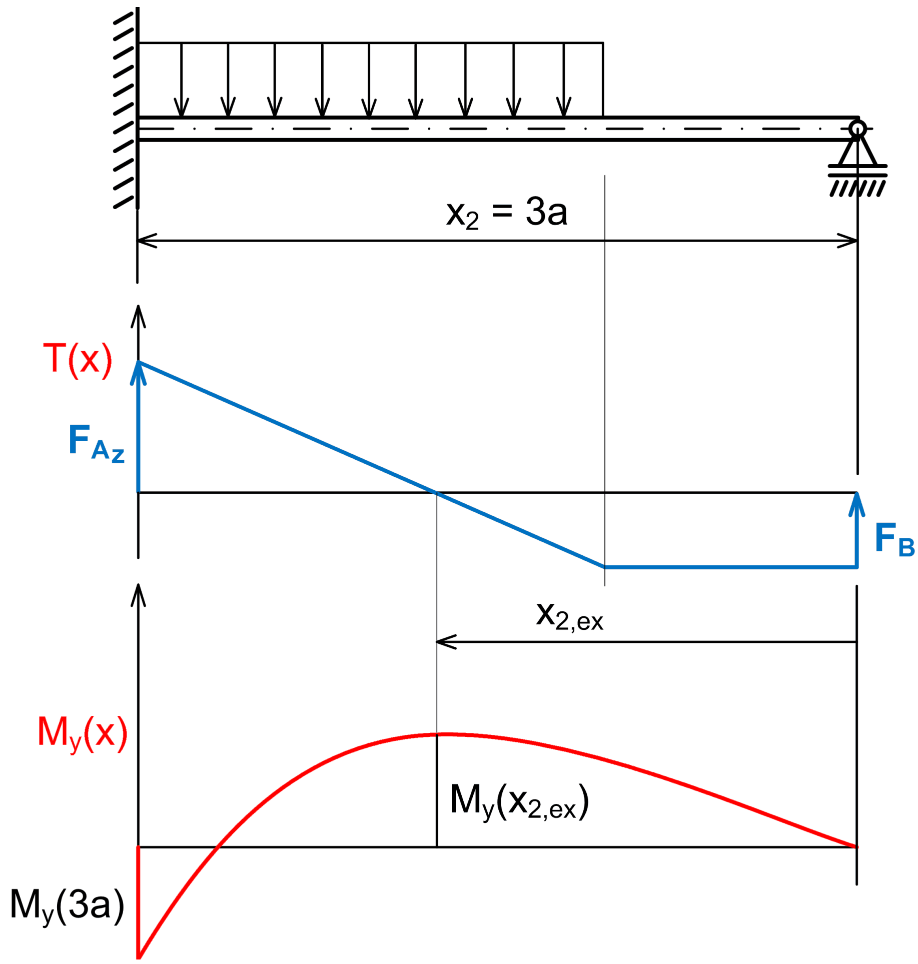
$$\int_0^a (F_B x_1) x_1 \, \mathrm{d}x_1 + \int_0^{2a} \left[F_B x_2 - q \, \frac{(x_2 - a)^2}{2} \right] x_2 \, \mathrm{d}x_2 = 0$$

Tato rovnice obsahuje jedinou neznámou, kterou je F_B.

Po vyjádření integrálů v předchozí rovnici a algebraické úpravě dostáváme pro F_B

$$F_B = \frac{10}{27} \, qa = 0,3704 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Průběh ohybových momentů $M_y(x)$ a posouvajících sil $T(x)$ je dán dříve uvedenými vztahy po dosazení F_B, což znázorníme graficky



Z průběhu je zřejmé, že maximální ohybový moment $M_{y,max}$ může být buď v místě $x_{2,ex}$ lokálního extrému, kde je posouvající síla T nulová nebo v místě vetknutí $x_2 = 3a$. Tyto hodnoty je nutné vypočítat

$$T(x_{2,ex}) = -F_B + q(x_{2,ex} - a) = 0$$

$$x_{2,ex} = \frac{F_B}{q} + a = \frac{10qa}{27q} + a = \frac{37}{27}\,a = 1,3704 \text{ m}$$

$$M_y(x_{2,ex}) = F_B x_{2,ex} - \frac{q}{2}(x_{2,ex} - a)^2 =$$

$$= 0,3704 \cdot 10^4 \cdot 1,3704 - \frac{10^4}{2}(1,3704 - 1)^2 = 0,4390 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

$$M_y(x_2 = 3a) = F_B \cdot 3a - \frac{q}{2}(3a - a)^2 =$$

$$= 0,3704 \cdot 10^4 \cdot 3 - \frac{10^4}{2}(3 - 1)^2 = -0,8888 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

$$M_{y,max} = \max\{M_y(x_{2,ex}), |M_y(x_2 = 3a)|\} = 0,8888 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

Pevnostní kontrola:

Kvadratický moment průřezu:

$$J_y = \frac{1}{12}BH^3 - \frac{1}{12}\,bh^3 = \frac{1}{12}(60 \cdot 120^3 - 50 \cdot 110^3) = 3,094 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Modul průřezu:

$$W_y = \frac{J_y}{\frac{H}{2}} = \frac{3,094 \cdot 10^6}{60} = 5,157 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

Maximální ohybové napětí $\sigma_{o,max}$

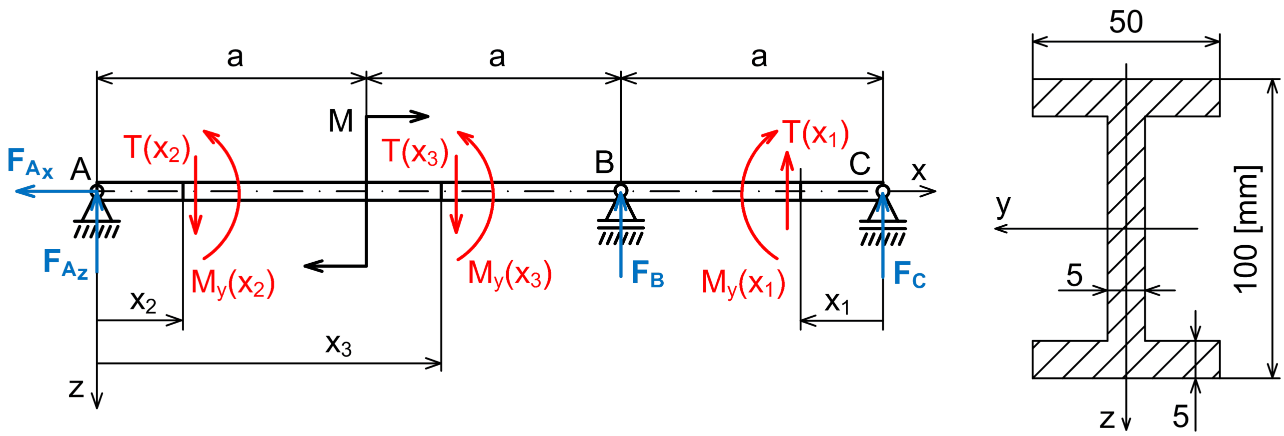
$$\sigma_{o,max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{-0,8888 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{5,157 \cdot 10^4} = 172,3 \text{ MPa}$$

Bezpečnost

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{o,max}} = \frac{400}{172,3} = 2,32 \;>\; k_D = 2$$

Prut pevnostně vyhovuje.

Př.3: Proveďte pevnostní kontrolu prismatického prutu znázorněného na obrázku.



$M = 8000$ Nm, $a = 1$ m, mez kluzu $\sigma_K = 400$ MPa, dovolená bezpečnost $k_D = 2$

Statický rozbor pro úplně uvolněné těleso:

$$\mu = 4 \qquad \nu = 3 \qquad s = \mu - \nu = 4 - 3 = 1$$

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá.

Podmínky statické rovnováhy pro úplně uvolněný prut

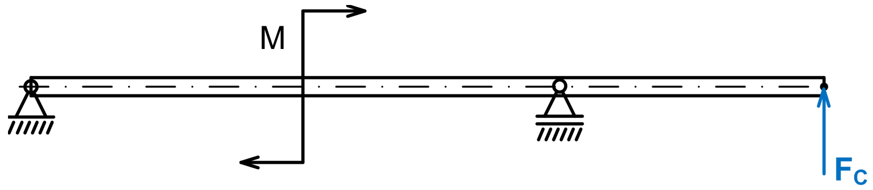
$$\sum F_x \ : \ F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_z \ : \ F_{Az} + F_B + F_C = 0$$

$$\sum M_B \ : \ F_{Az} \cdot 2a + M - F_C \cdot a = 0$$

$$F_{Az} = \frac{F_C}{2} - \frac{M}{2a}$$

Částečně uvolněný prut



Deformační podmínka pro uvolněnou vazbu

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_C} = 0$$

Průběhy ohybových momentů M_y podél prutu

$$M_y(x_1) = F_C x_1$$

$$M_y(x_2) = F_{Az} x_2 = \frac{F_C}{2} x_2 - \frac{M}{2a}\, x_2$$

$$M_y(x_3) = F_{Az} x_3 + M = \frac{F_C}{2} x_3 - \frac{M}{2a}\, x_3 + M$$

Pozn: V souladu se zatížením a realizovaným částečným uvolněním bylo nutné vyjádřit ohybový moment ve tvaru $M_y(M, F_C)$. K tomu byla využita momentová podmínka statické rovnováhy.

Řešení deformační podmínky pomocí Castigliánovy věty

$$w_C = \frac{\partial W}{\partial F_C} = \frac{1}{EJ_y} \left[\int_0^a M_y(x_1)\, \frac{\partial M_y}{\partial F_C}\, \mathrm{d}x_1 + \right.$$

$$\left. + \int_0^a M_y(x_2)\, \frac{\partial M_y}{\partial F_C}\, \mathrm{d}x_2 + \int_a^{2a} M_y(x_3)\, \frac{\partial M_y}{\partial F_C}\, \mathrm{d}x_3 \right] = 0$$

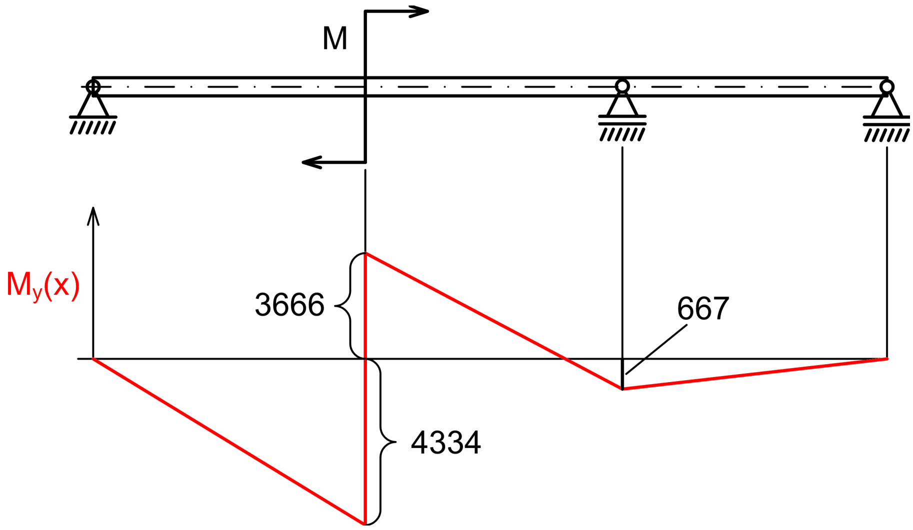
$$\int_0^a (F_C x_1)\, x_1 \,\mathrm{d}x_1 + \int_0^a \left(\frac{F_C}{2}\, x_2 - \frac{M}{2a}\, x_2 \right) \frac{x_2}{2} \,\mathrm{d}x_2 +$$

$$+ \int_a^{2a} \left(\frac{F_C}{2}\, x_3 - \frac{M}{2a}\, x_3 + M \right) \frac{x_3}{2} \,\mathrm{d}x_3 = 0$$

Tato rovnice obsahuje jedinou neznámou, kterou je F_C.
Po vyjádření integrálů v předchozí rovnici a algebraické úpravě dostáváme pro F_C

$$F_C = -\frac{M}{12a} = -\frac{8000}{12 \cdot 1} = -667\,\mathrm{N}$$

Průběh ohybových momentů $M_y(x)$ je dán dříve uvedenými vztahy, do kterých dosadíme F_B. Znázorněno graficky



Z průběhu je zřejmé, že maximální ohybový moment $M_{y,max}$ je v místě $x_2 = a$. Jeho hodnota je rovna

$$M_{y,max} = 4334\,\mathrm{Nm}$$

Pevnostní kontrola:

Kvadratický moment průřezu:

$$J_y = \frac{1}{12}\,50 \cdot 100^3 - 2\,\frac{1}{12}\,22,5 \cdot 90^3 = 1,433 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Modul průřezu:

$$W_y = \frac{J_y}{\frac{h}{2}} = \frac{1,433 \cdot 10^6}{50} = 2,866 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

Maximální ohybové napětí $\sigma_{o,max}$

$$\sigma_{o,max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{4334 \cdot 10^3}{2,866 \cdot 10^4} = 151,2 \text{ MPa}$$

Bezpečnost

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{o,max}} = \frac{400}{151,2} = 2,65 \; > \; k_D = 2$$

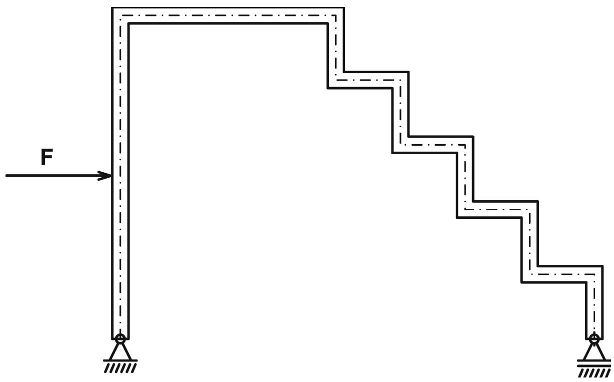
Prut pevnostně vyhovuje.

7.7.2 Pruty lomené - rámy

U prutů lomených je střednice spojitou, ale nehladkou křivkou. V místech zlomu vzniká složitá prostorová napjatost, která není řešitelná využitím teorie prostého ohybu. Abychom mohli úlohu řešit jako celek (s výjimkou zlomů) pomocí přístupu prosté pružnosti, musí být oblast porušení prutové napjatosti zanedbatelná v porovnání s celkovými rozměry rámu.

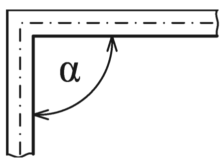
Předpoklady řešení:

a) Počet zlomů nesmí být velký



b) Vztahů pro napjatost, odvozených pro prostý ohyb, lze použít až v dostatečné vzdálenosti od zlomu

c) Musíme znát silově-deformační charakteristiku zlomů, tj. závislost úhlu ve zlomu na místním ohybovém momentu - $\alpha(M)$



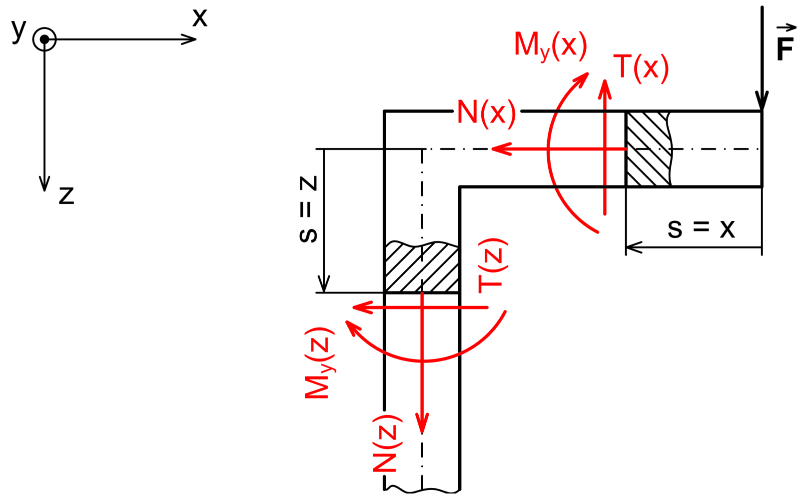
$\alpha = f(M)$

Dva krajní případy - tuhý zlom α = konst. (nezávisí na M)

- kloub M = 0

Určování napjatosti, pevnostní kontrola

Nejprve z podmínek statické rovnováhy uvolněného prvku rámu stanovíme průběh složek VVU - $M_y(s)$, $T(s)$ a $N(s)$. U pravoúhlého rámu může být polohová souřadnice s řezu buď x nebo z, podle toho, v jaké části rámu se nacházíme, viz obr.



Znaménková konvence pro složky VVU je analogická jako u prutu přímého, pokud je to možné. Lomený prut obcházíme stále po jedné straně, většinou vnitřní. Ohybový mement $M_y(s)$ je v tomto případě kladný, jestliže natahuje spodní vlákna a stlačuje horní vlákna, posouvající síla $T(s)$ je kladná, otáčí-li elementem v řezu ve smyslu hodinových ručiček a normálová síla $N(s)$ je kladná, působí-li tahově - viz obr. Jinak zavedeme znaménkovou konvenci smluvně.

Dále předpokládáme, že nebezpečným namáháním je namáhání ohybové, charakterizované ohybovým momentem $M_y(s)$. Průběh ohybového napětí $\sigma_o(s)$ podél střednice je dán vztahem

$$\sigma_o(s) = \frac{M_y(s)}{W_y(s)}$$

Stanovíme maximální ohybové napětí $\sigma_{o,max}(s)$

$$\sigma_{o,max} = \max\{\sigma_o(s)\}$$

U rámů prizmatických je maximální ohybové napětí $\sigma_{o,max}$ v místě působení maximálního ohybového momentu $M_{y,max}$, tedy

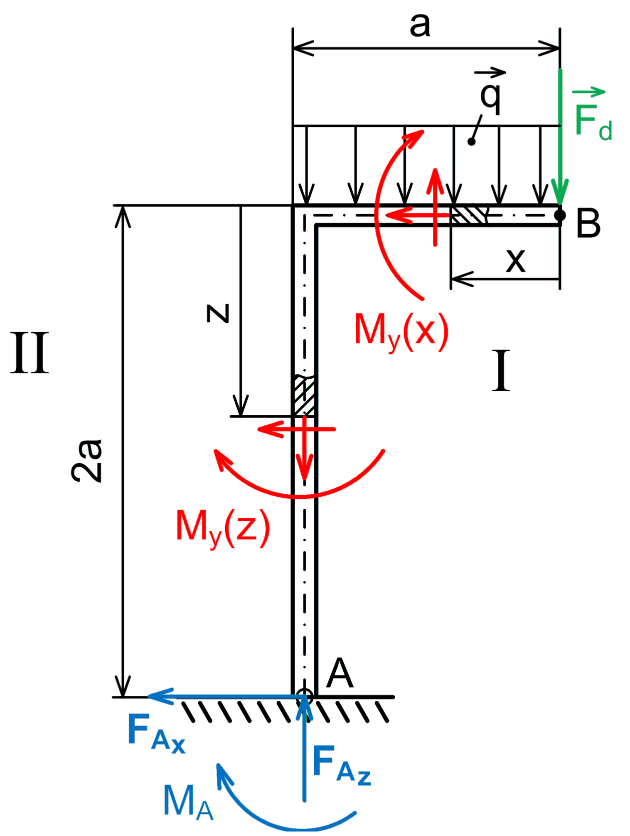
$$\sigma_{o,max} = \frac{M_{y,max}}{W_y}$$

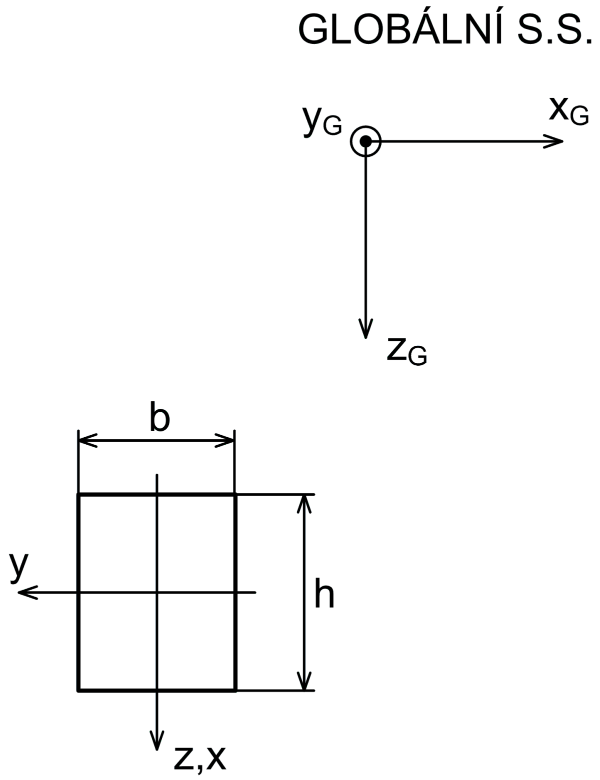
Provedeme pevnostní kontrolu

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{o,max}} \; > \; k_D$$

Demonstrační příklady:

Př.1: Navrhněte příčné rozměry obdélníkového průřezu u rovinného rámu a stanovte svislý posuv v místě B





$q = 10^4$ Nm^{-1}, $a = 1$ m, $\frac{b}{h} = 0,5$ u obdélníkového průřezu, mez kluzu $\sigma_K = 350$ MPa, dovolená bezpečnost $k_D = 2$, modul pružnosti v tahu $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa

Pozn: Vzhledem k tomu, že máme stanovit také svislý posuv v místě B, kde nepůsobí osamělá síla, zavedeme do tohoto místa již na počátku výpočtu sílu doplňkovou F_d.

Statický rozbor pro úplně uvolněné těleso:

$$\mu = 3 \qquad \nu = 3 \qquad s = \mu - \nu = 3 - 3 = 0$$

Úloha je staticky určitá.

Podmínky silové rovnováhy a stykové výslednice:

$$\sum F_x \; : \; F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_z \; : \; F_{Az} - qa - F_d = 0 \qquad \Rightarrow \quad F_{Az} = qa + F_d$$

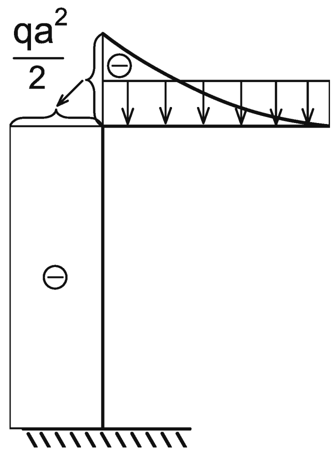
$$\sum M_A \; : \; M_A + \frac{qa^2}{2} + F_d a = 0 \qquad \Rightarrow \quad M_A = -\frac{qa^2}{2} - F_d a$$

Průběhy ohybových momentů v úsecích I a II

$$M_y(x) = -\frac{qx^2}{2} - F_d x$$

$$M_y(z) = -\frac{qa^2}{2} - F_d a$$

Grafické znázornění průběhu ohybových momentů $M_y(s)$



Maximální ohybový moment:

$$M_{y,max} = \frac{qa^2}{2} = 5000 \text{ Nm}$$

Pevnostní návrh příčného průřezu:

$$\sigma_{o,max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{\sigma_K}{k_D} \qquad W_y = \frac{1}{6}\, bh^3 = \frac{1}{12} h^3$$

$$\frac{12M_{y,max}}{h^3} = \frac{\sigma_K}{k_D}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{12M_{y,max}k_D}{\sigma_K}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 5000 \cdot 10^3 \cdot 2}{350}} = 70,0 \text{ mm}$$

$$b = 0,5h = 35 \text{ mm}$$

Kvadratický moment průřezu J_y:

$$J_y = \frac{1}{12}\, bh^3 = \frac{1}{12}\, 35 \cdot 70^3 = 1,000 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Stanovení svislého posuvu v místě B pomocí Castiglianovy věty:

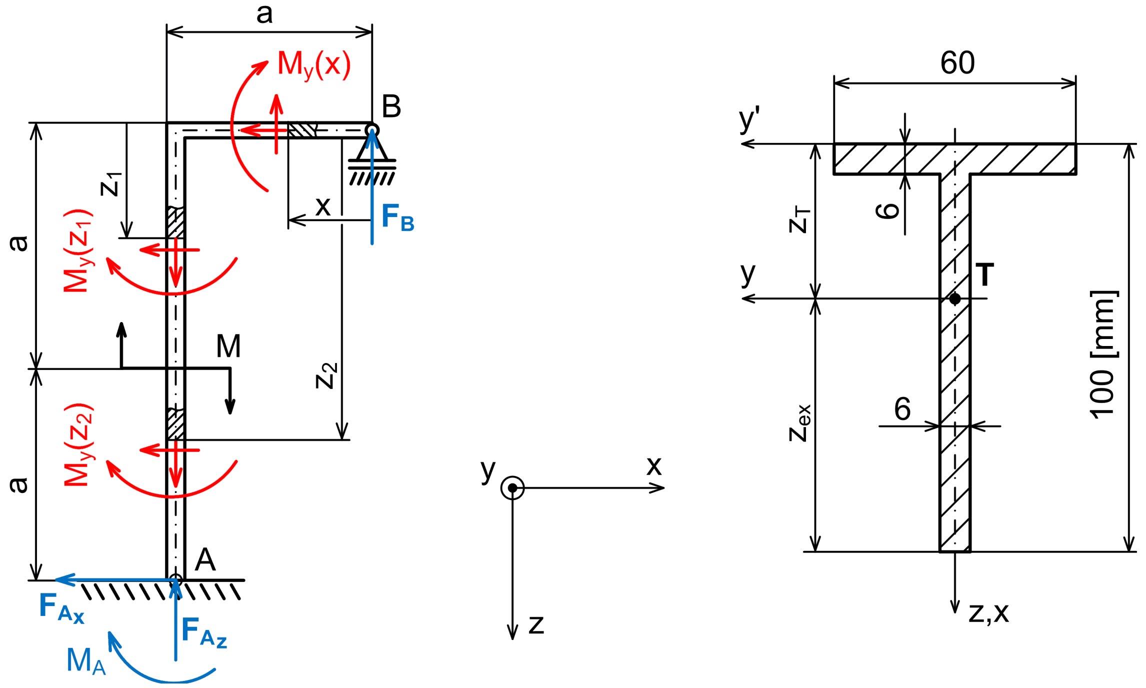
$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_d} = \frac{1}{EJ_y}\left[\int\limits_0^a M_y(x)\,\frac{\partial M_y}{\partial F_d}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{2a} M_y(z)\,\frac{\partial M_y}{\partial F_d}\,\mathrm{d}z\right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y}\left[\int\limits_0^a \left(-\frac{qx^2}{2} - F_d x\right)(-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{2a} \left(-\frac{qa^2}{2} - F_d a\right)(-a)\,\mathrm{d}z\right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y}\left[\int\limits_0^a \frac{qx^3}{2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{2a} \frac{qa^3}{2}\,\mathrm{d}z\right] = \frac{7qa^4}{8EJ_y}$$

$$w_B = \frac{7 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1,000 \cdot 10^6} = 41,7 \text{ mm}$$

Př.2: Proveďte pevnostní kontrolu rovinného rámu znázorněného na obrázku.



$M = 5000$ Nm, $a = 1$ m, mez kluzu $\sigma_K = 400$ MPa, dovolená bezpečnost $k_D = 2$

Statický rozbor pro úplně uvolněné těleso:

$$\mu = 4 \qquad \nu = 3 \qquad s = \mu - \nu = 4 - 3 = 1$$

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá.

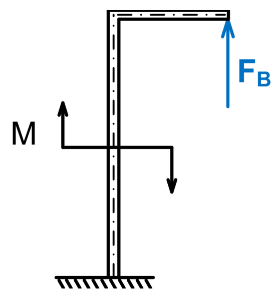
Podmínky statické rovnováhy pro úplně uvolněný prut

$$\sum F_x \ : \ F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_z \ : \ F_{Az} + F_B = 0$$

$$\sum M_B \ : \ F_B a - M - M_A = 0$$

Částečně uvolněný prut



Deformační podmínka pro uvolněnou vazbu

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_B} = 0$$

Průběh ohybových momentů M_y podél prutu

$M_y(x_1) = F_B x$

$M_y(z_1) = F_B a$

$M_y(z_2) = F_B a - M$

Pozn: V souladu se zatížením a realizovaným částečným uvolněním bylo nutné vyjádřit ohybový moment ve tvaru $M_y(M, F_B)$. Za tímto účelem jsme uvolňovali prvky rámu od místa B.

Řešení deformační podmínky pomocí Castigliánovy věty

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_B} = \frac{1}{EJ_y} \left[\int_0^a M_y(x) \frac{\partial M_y}{\partial F_B} \, \mathrm{d}x + \right.$$

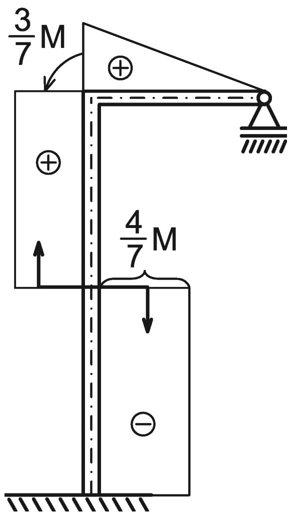
$$\left. + \int_0^a M_y(z_1) \frac{\partial M_y}{\partial F_B} \, \mathrm{d}z_1 + \int_0^{2a} M_y(z_2) \frac{\partial M_y}{\partial F_B} \, \mathrm{d}z_2 \right] = 0$$

$$\int_0^a F_B x\, x\, \mathrm{d}x + \int_0^a F_B a\, a\, \mathrm{d}z_1 + \int_0^{2a} (F_B a - M)\, a\, \mathrm{d}z_2 = 0$$

Tato rovnice obsahuje jedinou neznámou, kterou je F_B. Po vyjádření integrálů v předchozí rovnici a algebraické úpravě dostáváme pro F_B

$$F_B = \frac{3}{7}\,\frac{M}{a} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5000}{1} = 2143\ \mathrm{N}$$

Průběh ohybových momentů $M_y(x)$ je dán dříve uvedenými vztahy, do kterých dosadíme F_B. Znázorněno graficky



Z průběhu je zřejmé, že maximální ohybový moment $M_{y,max}$ je v místě působení silové dvojice M. Jeho hodnota je rovna

$$M_{y,max} = \frac{4}{7}\,M = \frac{4}{7} \cdot 5000 = 2857\ \mathrm{Nm}$$

Pevnostní kontrola:

Kvadratický moment průřezu:

$$J_{y'} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 6^3 + \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 100^3 = 2,004 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$z_T = \frac{U_{y'}}{S} = \frac{60 \cdot 6 \cdot 3 + 94 \cdot 6 \cdot 53}{60 \cdot 6 + 94 \cdot 6} = 33,52 \text{ mm}$$

$$J_y = J_{y'} - z_T^2 S = 2,004 \cdot 10^6 - 33,52^2 \cdot 924 = 0,9658 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Modul průřezu:

$$W_y = \frac{J_y}{z_{ex}} = \frac{0,9658 \cdot 10^6}{100 - 33,52} = 1,453 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

Maximální ohybové napětí $\sigma_{o,max}$

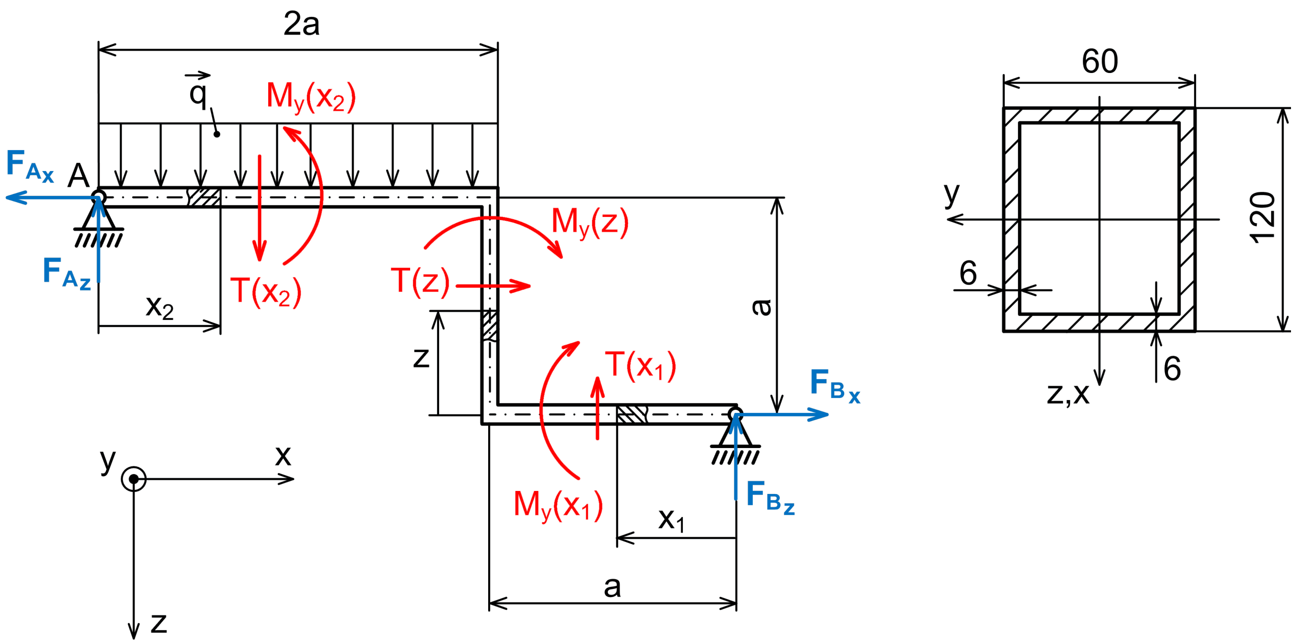
$$\sigma_{o,max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{2857 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{1,453 \cdot 10^4} = 196,7 \text{ MPa}$$

Bezpečnost

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{o,max}} = \frac{400}{196,7} = 2,03 \ > \ k_D = 2$$

Prut pevnostně vyhovuje.

Př.3: Proveďte pevnostní kontrolu rovinného rámu znázorněného na obrázku.



$q = 10^4$ Nm^{-1}, $a = 1$ m, mez kluzu $\sigma_K = 400$ MPa, dovolená bezpečnost $k_D = 2$

Statický rozbor pro úplně uvolněné těleso:

$$\mu = 4 \qquad \nu = 3 \qquad s = \mu - \nu = 4 - 3 = 1$$

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá.

Podmínky statické rovnováhy pro úplně uvolněný prut

$$\sum F_x \ : \ -F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

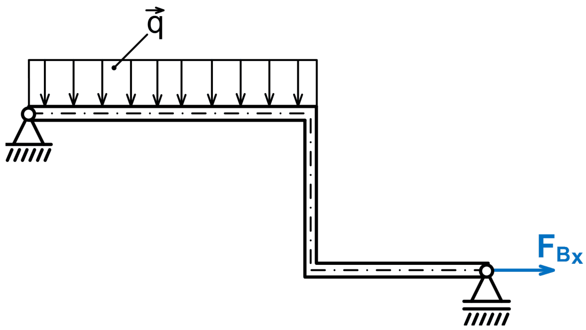
$$\sum F_z \ : \ F_{Az} + F_{Bz} - 2qa = 0$$

$$\sum M_A \ : \ 2qa^2 - F_{Bx} \cdot a - F_{Bz} \cdot 3a = 0 \quad \Rightarrow$$

$$F_{Bz} = \frac{2}{3}\,qa - \frac{F_{Bx}}{3}$$

$$F_{Az} = 2qa - F_{Bz} = \frac{4}{3}\,qa + \frac{F_{Bx}}{3}$$

Částečně uvolněný prut



Deformační podmínka pro uvolněnou vazbu

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_{Bx}} = 0$$

Průběhy ohybových momentů $M_y(x)$ a posouvajících sil T podél prutu

$$M_y(x_1) = F_{Bz}x_1 = \frac{2}{3}\,qax_1 - \frac{F_{Bx}}{3}\,x_1$$

$$T(x_1) = -F_{Bz} = -\frac{2}{3}\,qa + \frac{F_{Bx}}{3}$$

$$M_y(z) = F_{Bz}a + F_{Bz}z = \frac{2}{3}\,qa^2 - \frac{F_{Bx}}{3}\,a + F_{Bx}z$$

$$T(z) = -F_{Bx}$$

$$M_y(x_2) = F_{Az}x_2 - \frac{qx_2^2}{2} = \frac{4}{3}\,qax_2 + \frac{F_{Bx}}{3}\,x_2 - \frac{qx_2^2}{2}$$

$$T(x_2) = F_{Az} - qx_2 = \frac{4}{3}\,qa + \frac{F_{Bx}}{3} - qx_2$$

Pozn: V souladu se zatížením a realizovaným částečným uvolněním bylo nutné vyjádřit ohybový moment ve tvaru $M_y(q, F_{Bx})$. K tomu byla využita momentová a silová podmínka statické rovnováhy.

Řešení deformační podmínky pomocí Castigliánovy věty

$$u_B = \frac{\partial W}{\partial F_{Bx}} = \frac{1}{EJ_y}\left[\int\limits_{\gamma} M_y(s)\,\frac{\partial M_y}{\partial F_{Bx}}\,\mathrm{d}s\right] = 0$$

$$\int\limits_0^a M_y(x_1)\,\frac{\partial M_y}{\partial F_{Bx}}\,\mathrm{d}x_1 + \int\limits_0^a M_y(z)\,\frac{\partial M_y}{\partial F_{Bx}}\,\mathrm{d}z + \int\limits_0^{2a} M_y(x_2)\,\frac{\partial M_y}{\partial F_{Bx}}\,\mathrm{d}x_2 = 0$$

$$\int\limits_0^a \left(\frac{2}{3}\,qax_1 - \frac{F_{Bx}}{3}\,x_1\right)\left(\frac{x_1}{3}\right)\mathrm{d}x_1 +$$

$$+\int\limits_0^a \left[\frac{2}{3}\,qa^2 - \frac{F_{Bx}}{3}\,a + F_{Bx}\left(z - \frac{a}{3}\right)\right]\left(z - \frac{a}{3}\right)\,\mathrm{d}z +$$

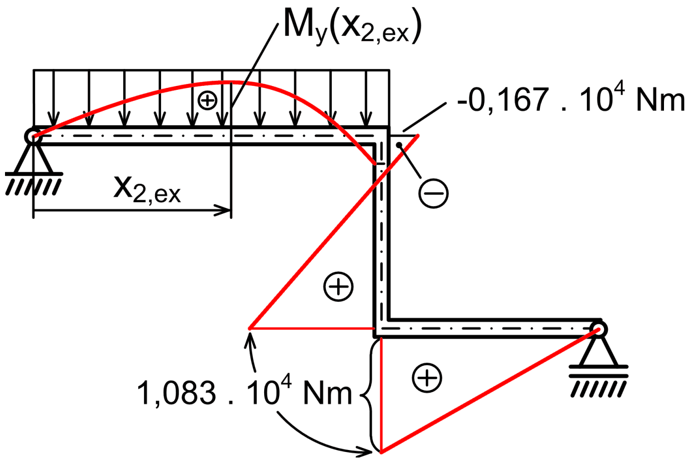
$$+\int\limits_0^{2a} \left(\frac{4}{3}\,qax_2 + \frac{F_{Bx}}{3}\,x_2 - \frac{qx_2^2}{2}\right)\left(\frac{x_2}{3}\right)\,\mathrm{d}x_2 = 0$$

Tato rovnice obsahuje jedinou neznámou, kterou je F_{Bx}.

Po vyjádření integrálů v předchozí rovnici a algebraické úpravě dostáváme pro F_B

$$F_{Bx} = -\frac{5}{4}\,qa = -1,25 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Průběh ohybových momentů $M_y(x)$ je dán dříve uvedenými vztahy, do kterých dosadíme F_{Bx}, což znázorníme graficky



Z průběhu je zřejmé, že maximální ohybový moment $M_{y,max}$ může být buď v místě $x_1 = a$ anebo v místě lokálního extrému $x_{2,ex}$. Maximální moment zjistíme porovnáním obou hodnot.

$$M_y(x_1 = a) = \frac{2}{3}\,qa^2 - \frac{F_{Bx}}{3}\,a = 1,083 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

$$T(x_{2,ex}) = 0 = \frac{4}{3}\,qa + \frac{F_{Bx}}{3} - qx_{2,ex} = 0$$

$$x_{2,ex} = \frac{1}{q}\left(\frac{4}{3}\,qa - \frac{5}{12}\,qa\right) = \frac{11}{12}\,a = 0,9167 \text{ m}$$

$$M_y(x_{2,ex}) = \frac{4}{3}\,qax_{2,ex} + \frac{F_{Bx}}{3}\,x_{2,ex} - \frac{qx_{2,ex}^2}{2} = 0,420 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

$$M_{y,max} = 1,083 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

Pevnostní kontrola:

Kvadratický moment průřezu:

$$J_y = \frac{1}{12} \cdot 60 \cdot 120^3 - \frac{1}{12} \cdot 48 \cdot 108^3 = 3,601 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Modul průřezu:

$$W_y = \frac{J_y}{z_{ex}} = \frac{3,601 \cdot 10^6}{60} = 6,002 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

Maximální ohybové napětí $\sigma_{o,max}$

$$\sigma_{o,max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{1,083 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{6,002 \cdot 10^4} = 180,4 \text{ MPa}$$

Bezpečnost

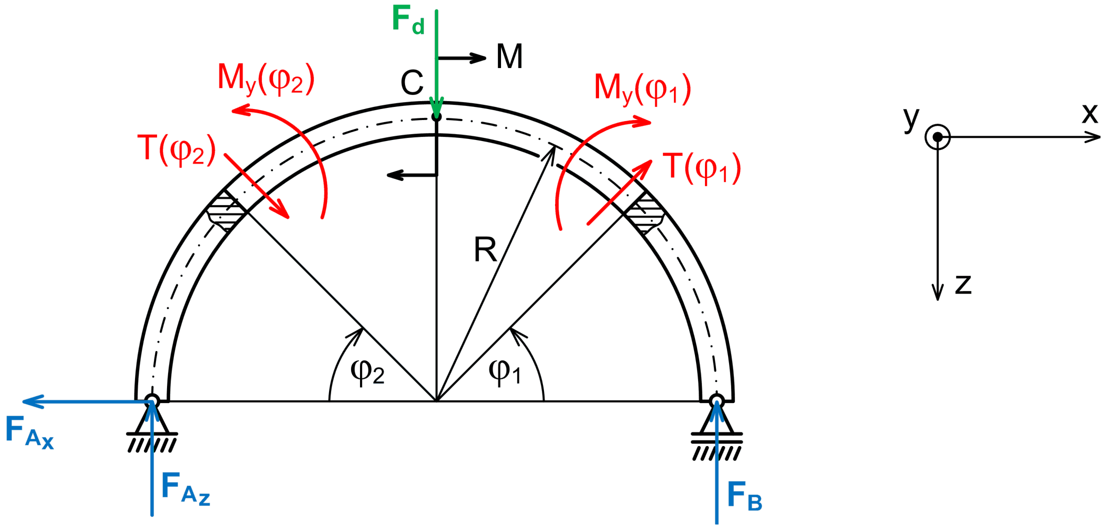
$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{o,max}} = \frac{400}{180,4} = 2,21 \ > \ k_D$$

Prut pevnostně vyhovuje.

7.7.3 Pruty zakřivené a pruty smíšené - demonstrační příklady

Omezíme se na pruty slabě zakřivené (str. 47, 130, 131) a pruty smíšené, sestávající z částí, které můžeme považovat za pruty slabě zakřivené a dále z přímých úseků. Teorie k těmto příkladům je uvedena v příslušných kapitolách.

Př.1: Navrhněte průměr d kruhového průřezu a stanovte úhel natočení φ_C a svislý průhyb u_C v místě C u prutu dle obrázku:



$M = 10^3$ Nm, $R = 0,5$ m, mez kluzu $\sigma_K = 350$ MPa, bezpečnost $k_K = 2$, modul pružnosti v tahu $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa

Pozn: Vzhledem k tomu, že máme stanovit také svislý posuv v místě C, kde nepůsobí žádné osamělá síla, zavedeme do tohoto místa již na počátku výpočtu veličinu doplňkovou F_d.

Statický rozbor pro úplně uvolněné těleso:

$$\mu = 3 \qquad \nu = 3 \qquad s = \mu - \nu = 3 - 3 = 0$$

Úloha je staticky určitá.

$$\sum F_x \;:\; F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_z \;:\; F_{Az} + F_B - F_d = 0 \qquad \Rightarrow F_{Az} = -\frac{M}{2R} + \frac{F_d}{2}$$

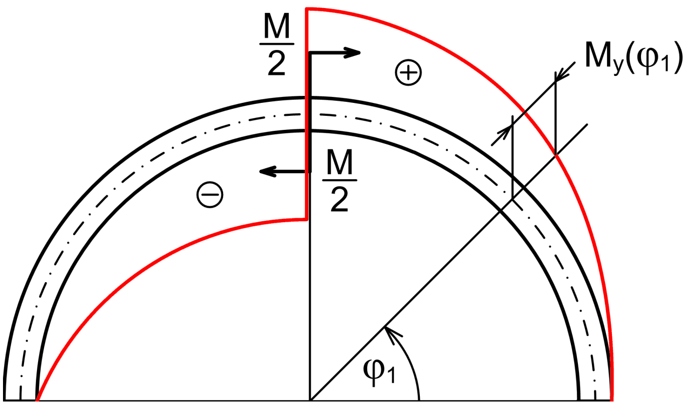
$$\sum M_A \;:\; M + F_d \cdot R - F_B \cdot 2R = 0 \qquad \Rightarrow F_B = \frac{M}{2R} + \frac{F_d}{2}$$

Průběhy ohybových momentů v úsecích I a II

$$M_y(\varphi_1) = F_B(R - R\cos\varphi_1) = \left(\frac{M}{2R} + \frac{F_d}{2}\right)(R - R\cos\varphi)$$

$$M_y(\varphi_2) = F_{Az}(R - R\cos\varphi_2) = \left(-\frac{M}{2R} + \frac{F_d}{2}\right)(R - R\cos\varphi)$$

Grafické znázornění průběhu ohybových momentů $M_y(x)$



Maximální ohybový moment:

$$M_{y,max} = \frac{M}{2} = 500 \text{ Nm}$$

Pevnostní návrh příčného průřezu:

$$\sigma_{0,max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{\sigma_K}{k_K} \qquad W_y = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$\frac{32 M_{y,max}}{h^3} = \frac{\sigma_K}{k_K}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{32 M_{y,max} \cdot k_K}{\pi \cdot \sigma_K}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 500 \cdot 10^3 \cdot 2}{\pi \cdot 350}} = 30,8 \doteq 31 \text{ mm}$$

Kvadratický moment průřezu:

$$J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi 31^4}{64} = 4,533 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Stanovení úhlu natočení φ_C v místě C pomocí Castiglianovy věty:

$$\varphi_C = \frac{\partial W}{\partial M} =$$

$$= \frac{1}{EJ_y} \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} M_y(\varphi_1) \frac{\partial M_y}{\partial M} \, R \, \mathrm{d}\varphi_1 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} M_y(\varphi_2) \frac{\partial M_y}{\partial M} \, R \, \mathrm{d}\varphi_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y} \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M}{2R} + \frac{F_d}{2} \right) (R - R\cos\varphi_1) \left(\frac{1}{2R} \right) (R - R\cos\varphi_1) \, R \, \mathrm{d}\varphi_1 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{M}{2R} + \frac{F_d}{2} \right) (R - R\cos\varphi_2) \left(-\frac{1}{2R} \right) (R - R\cos\varphi_2) \, R \, \mathrm{d}\varphi_2 \right] =$$

$$= \frac{MR}{2EJ_y} \left(\frac{3}{4}\,\pi - 2 \right) = \frac{500 \cdot 10^3 \cdot 500}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 4,533 \cdot 10^4} \left(\frac{3}{4}\,\pi - 2 \right) =$$

$$= 4,677 \cdot 10^3 \,\mathbf{rad} = 0,268^\circ$$

Stanovení svislého posuvu u_C v místě C pomocí Castiglianovy věty

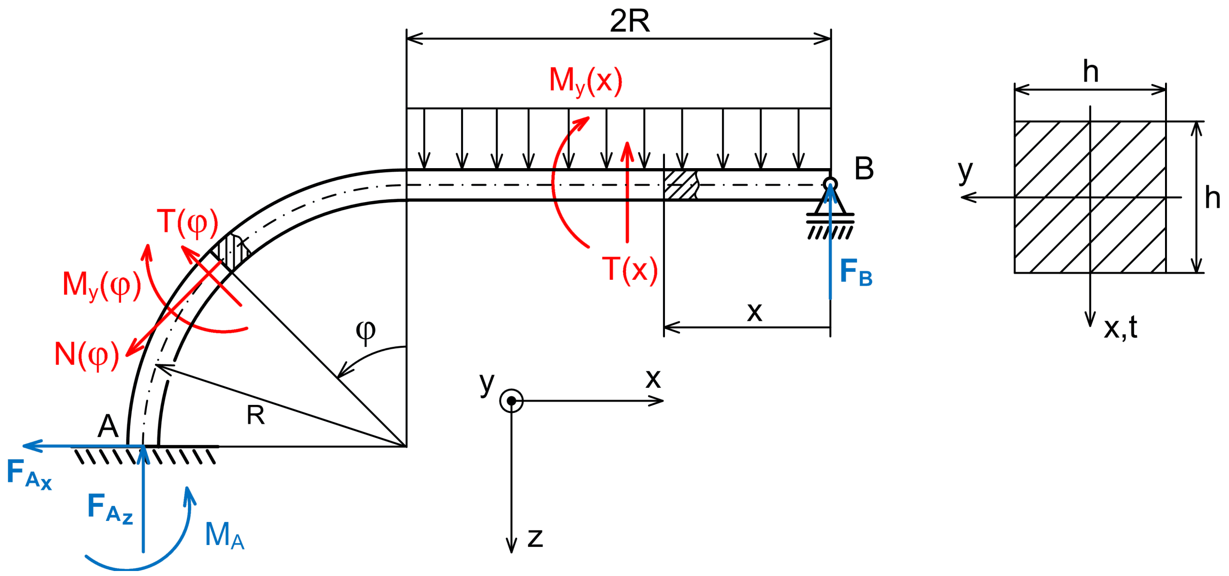
$$u_C = \frac{\partial W}{\partial F_d} =$$

$$\frac{1}{EJ_y} \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} M_y(\varphi_1)\, \frac{\partial M_y}{\partial F_d}\, R\,\mathrm{d}\varphi_1 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} M_y(\varphi_2)\, \frac{\partial M_y}{\partial F_d}\, R\,\mathrm{d}\varphi_2 \right] =$$

$$\frac{1}{EJ_y} \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M}{2R} + \frac{F_d}{2} \right) (R - R\cos\varphi_1)\, \frac{1}{2}\, (R - R\cos\varphi_1)\, R\,\mathrm{d}\varphi_1 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{M}{2R} + \frac{F_d}{2} \right) (R - R\cos\varphi_2)\, \frac{1}{2}\, (R - R\cos\varphi_2)\, R\,\mathrm{d}\varphi_2 \right] = 0$$

Př.2: Proveďte pevnostní kontrolu prismatického prutu znázorněného na obrázku.



$q = 500$ Nm^{-1}, $R = 0,5$ m, $h = 15$ mm, mez kluzu $\sigma_K = 400$ MPa, dovolená bezpečnost $k_D = 2,5$

Poměrná tloušťka v zakřivené části $\frac{h}{R}$ je rovna $\frac{15}{500} = 0,03$, což je hodnota značně menší než mezní poměr $\frac{h}{R} = \frac{1}{5} = 0,2$. Prut v této oblasti tedy můžeme považovat za slabě zakřivený.

Statický rozbor pro úplně uvolněné těleso:

$$\mu = 4 \qquad \nu = 3 \qquad s = \mu - \nu = 4 - 3 = 1$$

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá.

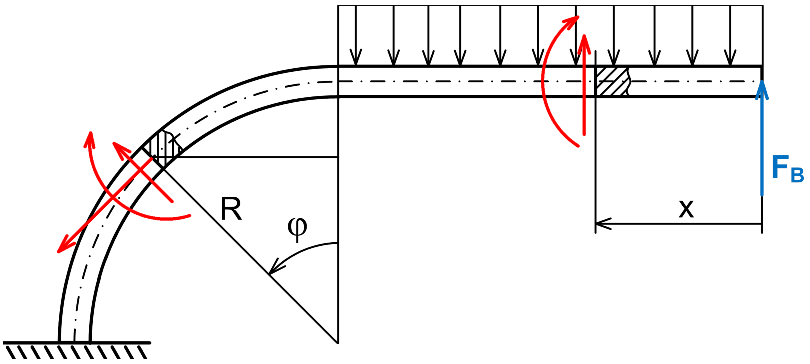
Podmínky statické rovnováhy pro úplně uvolněný prut

$$\sum F_x \ : \ F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_z \ : \ F_{Az} + F_B - 2qR = 0$$

$$\sum M_A \ : \ M_A - 4qR^2 + 3F_BR = 0$$

Částečně uvolněný prut



Deformační podmínka pro uvolněnou vazbu

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_B} = 0$$

Průběhy ohybových momentů $M_y(s)$ a posouvajících sil $T(s)$ podél prutu

$$M_y(x) = F_B x - \frac{qx^2}{2}$$

$$T(x) = -F_B + qx$$

$$M_y(\varphi) = F_B(2R + R\sin\varphi) - 2qR(R + R\sin\varphi)$$

$$T(\varphi) = -F_B\cos\varphi + 2qR\cos\varphi$$

$$N(\varphi) = F_B\sin\varphi - 2qR\sin\varphi$$

Pozn: V souladu se zatížením a realizovaným částečným uvolněním bylo nutné vyjádřit ohybový moment ve tvaru $M_y(M, F_B)$. Toho bylo dosaženo tak, že prvky prutu byly uvolňovány z pravé strany, od místa B, kde působí F_B.

Řešení deformační podmínky pomocí Castigliánovy věty

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_B} = \frac{1}{EJ_y}\left[\int\limits_0^{2R} M_y(x)\,\frac{\partial M_y}{\partial F_B}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} M_y(\varphi)\,\frac{\partial M_y}{\partial F_B}\,R\,\mathrm{d}\varphi\right] = 0$$

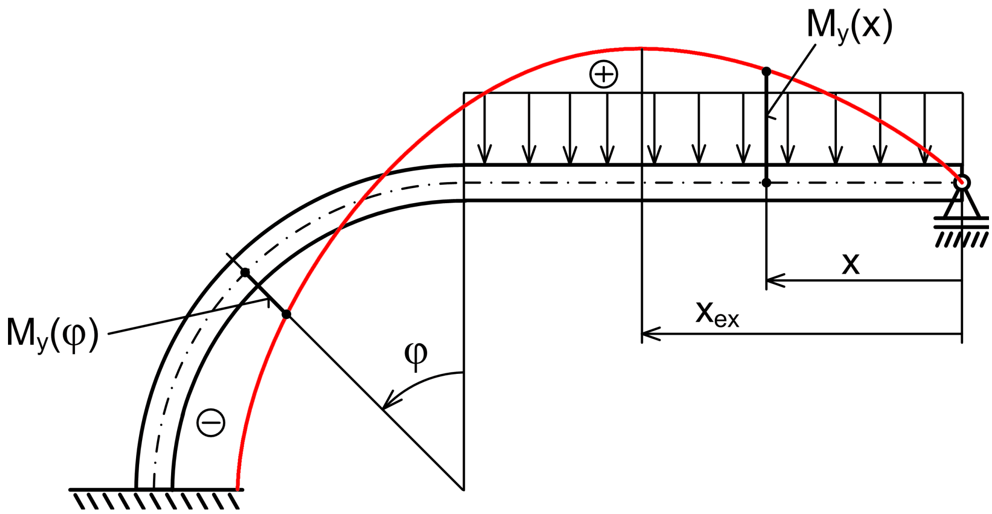
$$\int\limits_0^{2R}\left(F_B x - \frac{qx^2}{2}\right) x\,\mathrm{d}x +$$

$$+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[F_B(2R + R\sin\varphi) - 2qR(R + R\sin\varphi)\right](2R + R\sin\varphi)R\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

Tato rovnice obsahuje jedinou neznámou, kterou je F_B. Po vyjádření integrálů v předchozí rovnici a algebraické úpravě dostáváme pro F_B

$$F_B = qR\,\frac{8 + \frac{5}{2}\pi}{\frac{20}{3} + \frac{9}{4}\pi} = 1,1543\,qR = 1,1543\cdot 500\cdot 0,5 = 288,6\ \mathrm{N}$$

Průběh ohybových momentů $M_y(x)$ je dán dříve uvedenými vztahy do kterých dosadíme F_B. Znázorněno graficky



Z průběhu je zřejmé, že maximální ohybový moment $M_{y,max}$ může být buď v místě vetknutí $\varphi = \frac{\pi}{2}$, nebo v místě lokálního extrému x_{ex} v přímé části prutu. Příslušné hodnoty je zapotřebí vypočítat a následně porovnat.

$$M_y(\varphi = \frac{\pi}{2}) = 3F_B R - 4qR^2 = 288,6 \cdot 1,5 - 4 \cdot 500 \cdot 0,5^2 = -67,1\,\text{Nm}$$

$$T(x_{ex}) = 0 = -F_B + qx_{ex} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{ex} = \frac{F_B}{q} = \frac{288,6}{500} = 0,5772\,\text{m}$$

$$M_y(x_{ex}) = F_B x_{ex} - \frac{qx_{ex}^2}{2} = 288,6 \cdot 0,5772 - \frac{500 \cdot 0,5772^2}{2} = 83,3\,\text{Nm}$$

$$M_{y,max} = 83,3\,\text{Nm}$$

Pevnostní kontrola:

Modul průřezu:

$$W_y = \frac{h^3}{6} = \frac{15^3}{6} = 562,5\,\text{mm}^3$$

Maximální ohybové napětí $\sigma_{o,max}$

$$\sigma_{o,max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{83,3 \cdot 10^3}{562,5} = 148,1\,\text{MPa}$$

Bezpečnost

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{o,max}} = \frac{400}{148,1} = 2,70 \; > \; k_D = 2,5$$

Prut pevnostně vyhovuje.

8 NAMÁHÁNÍ NA KRUT

8.1 Základní vztahy pro napětí a deformaci v řezu

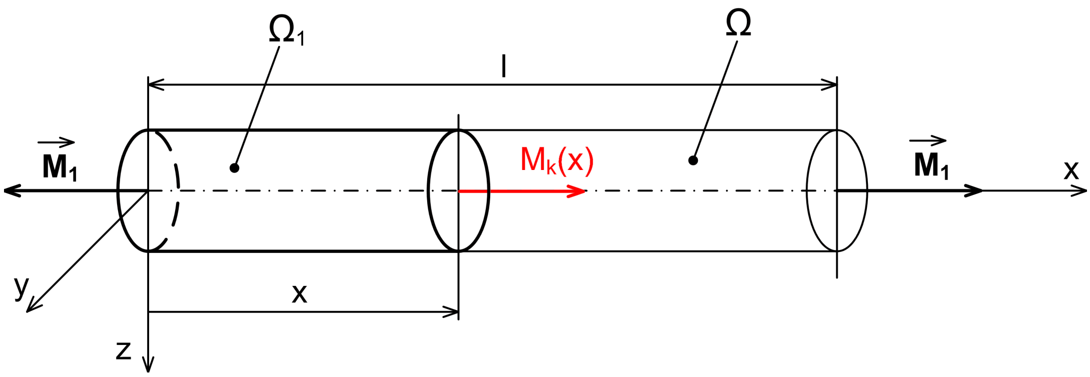
Def.: **Prostým krutem** rozumíme namáhání přímého prismatického prutu kruhového nebo mezidruhového průřezu, je-li splněno

a) platí obecné prutové předpoklady

b) příčné průřezy zůstávají v průběhu zatěžování rovinnými a otáčejí se kolem střednice, která zůstává přímá

c) jedinou nenulovou složkou VVU je kroutící moment $M_k(x)$, který je konstantní po celé délce prutu

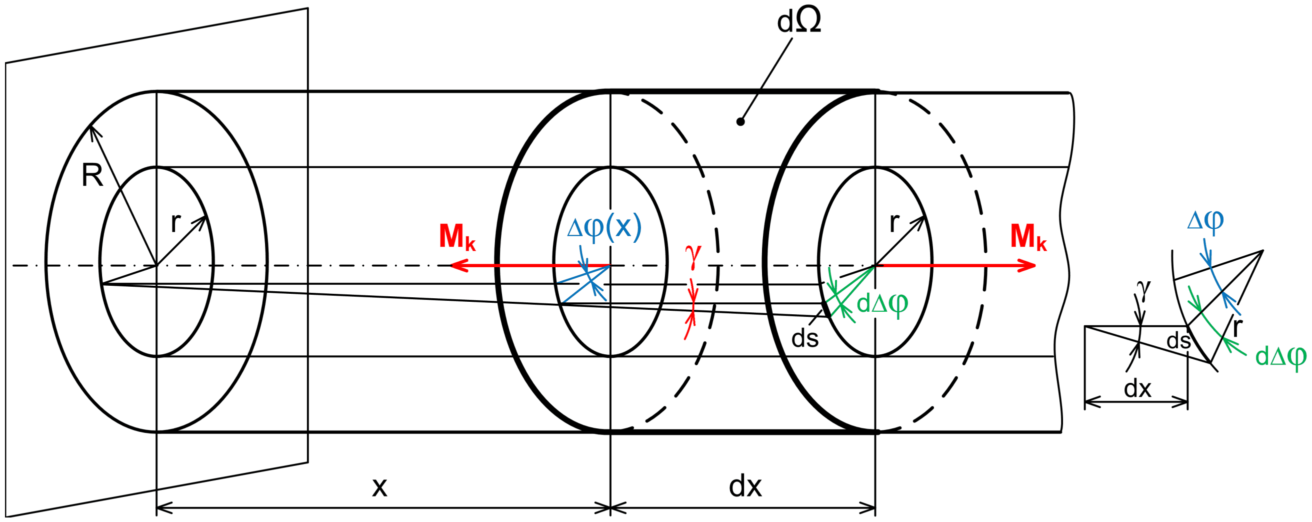
V prvním kroku stanovíme kroutící moment $M_k(x)$ na základě podmínky rovnováhy uvolněného prvku prutu Ω_1.



Momentová podmínka

$$\sum M_x \ : \ M_k(x) = M_1 \tag{8.1}$$

V dalším kroku stanovíme průběh přetvoření (zkosu) γ a napětí τ v příčném řezu v místě x na základě příslušné pracovní podmínky ad b)



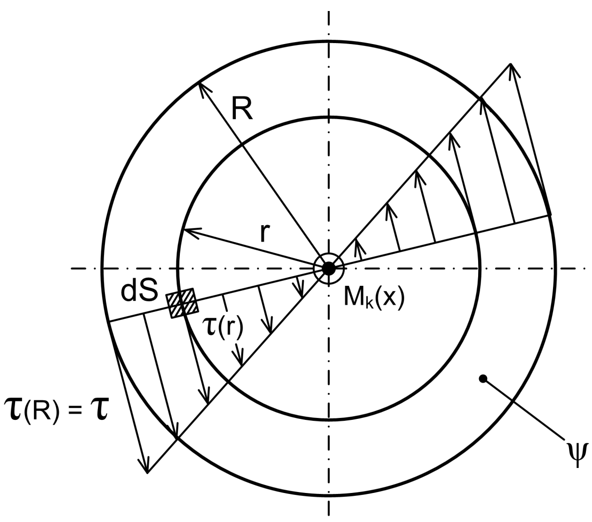
$$ds = \gamma \, dx = r \, d\Delta\varphi$$

$$\gamma = r \, \frac{d\Delta\varphi}{dx} = r\vartheta \tag{8.2}$$

Nyní aplikujeme Hookeův zákon pro prostý smyk

$$\tau(r) = G\gamma(r) = G \, \frac{d\Delta\varphi}{dx} \, r \tag{8.3}$$

Průběhy zkosu $\gamma(r)$ a smykového napětí $\tau(r)$ v průřezu jsou tedy lineárně závislé na souřadnici r. Průběh napětí je uveden na následujícím obrázku



Z praktických důvodů je vhodné vyjádřit zkos $\gamma(r)$ a smykové napětí $\tau(r)$ v závislosti na namáhání, tj. kroutícím momentu $M_k(x)$. Za tímto účelem využijeme podmínku momentové ekvivalence

$$M_k(x) = \int_\psi \tau(r)\, r \, \mathrm{d}S = G \, \frac{\mathrm{d}\Delta\varphi}{\mathrm{d}x} \int_\psi r^2 \, \mathrm{d}S$$

$$M_k(x) = G \, \frac{\mathrm{d}\Delta\varphi}{\mathrm{d}x} \, J_p = G \, \vartheta(x) J_p \tag{8.4}$$

ze které stanovíme veličinu $\mathrm{d}\Delta\varphi$, která představuje vzájemný úhel natočení krajních řezů elementu prutu délky $\mathrm{d}x$ (zkroucení elementu), ϑ je poměrný úhel zkroucení

$$\mathrm{d}\Delta\varphi = \frac{M_k(x)}{G J_p} \, \mathrm{d}x \tag{8.5}$$

Natočení $\Delta\varphi(x)$ průřezu v místě x vzhledem k levému okraji prutu je rovno

$$\Delta\varphi(x) = \int_0^x \mathrm{d}\Delta\varphi = \int_0^x \frac{M_k(x)}{G J_p} \, \mathrm{d}x = \frac{M_k x}{G J_p} \tag{8.6}$$

a pro natočení (zkroucení) celého prismatického prutu zatíženého silovými dvojicemi M na obou koncích prutu $\Delta\varphi(l)$ obdržíme

$$\Delta\varphi(l) = \frac{M l}{G J_p} \tag{8.7}$$

Po dosazení rovnice (8.4) do (8.3) a algebraické úpravě dostáváme vztah pro průběh smykového napětí $\tau(r)$ v obvyklé podobě

$$\tau(r) = \frac{M_k}{J_p} \, r \tag{8.8}$$

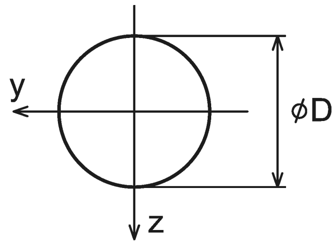
Pro maximální smykové napětí τ v krajním vlákně $r = R$ platí

$$\tau = \tau(R) = \frac{M_k}{\frac{J_p}{R}} = \frac{M_k}{W_k} \tag{8.9}$$

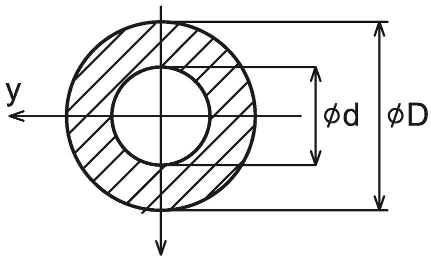
kde veličina $\boldsymbol{W_k}$ **se nazývá modul průřezu v krutu**, který je definován následovně

$$W_k = \frac{J_p}{R} \tag{8.10}$$

Pro kruhový a mezikruhový průřez dostáváme



$$W_k = \frac{J_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi D^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}$$



$$W_k = \frac{J_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4)$$

8.2 Pevnostní kontrola

Stanovíme maximální smykové napětí τ_{max} v prutu

$$\tau_{max} = \max\{\tau(x)\} \tag{8.11}$$

U prismatických prutů je možné provést přímo kontrolu v nebezpečném průřezu s maximálním kroutícím momentem $M_{k,max}$

$$\tau_{max} = \frac{M_{k,max}}{W_k} \tag{8.12}$$

Bezpečnost $\boldsymbol{k_K}$ vůči smykové mezi kluzu $\boldsymbol{\tau_K}$ je potom rovna

$$k_K = \frac{\tau_K}{\tau_{max}} \geqq k_D \tag{8.13}$$

kde k_D je dovolená, resp. doporučená, bezpečnost.

V případě, že v materiálovém listě nenalezneme mez kluzu ve smyku τ_K, lze ji stanovit na základě podmínky mezního stavu pružnosti (podmínek plasticity) maximálního smykového napětí (podmínka Trescova) resp. podmínky oktaedrického smykového napětí (podmínka HMH), viz kapitola o napjatosti

$\tau_K = 0,5\ \sigma_K$ - podmínka Trescova

$\tau_K = 0,577\ \sigma_K$ - podmínka HMH

8.3 Energie napjatosti

Potřebné vztahy odvodíme na základě práce vnitřních sil $\mathrm{d}A$ na elementu $\mathrm{d}\Omega$ délky $\mathrm{d}x$, viz obrázek

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}A = -\frac{1}{2}\, M_k\, \Delta\varphi + \frac{1}{2}\, M_k(\Delta\varphi + \mathrm{d}\Delta\varphi)$$

$$\mathrm{d}W = \frac{1}{2}\, M_k\, \mathrm{d}\Delta\varphi \overset{(8.5)}{=} \frac{M_k^2\, \mathrm{d}x}{GJ_p} \tag{8.14}$$

Energie napjatosti celého prutu je potom rovna

$$\mathrm{d}W = \int\limits_\gamma \mathrm{d}W = \int\limits_\gamma \frac{M_k^2(x)\, \mathrm{d}x}{2GJ_p} \tag{8.15}$$

Energie napjatosti W prismatického prutu zatíženého na koncích silovými dvojicemi M je dán následujícím vztahem

$$W = \frac{M^2 l}{2GJ_p} \tag{8.16}$$

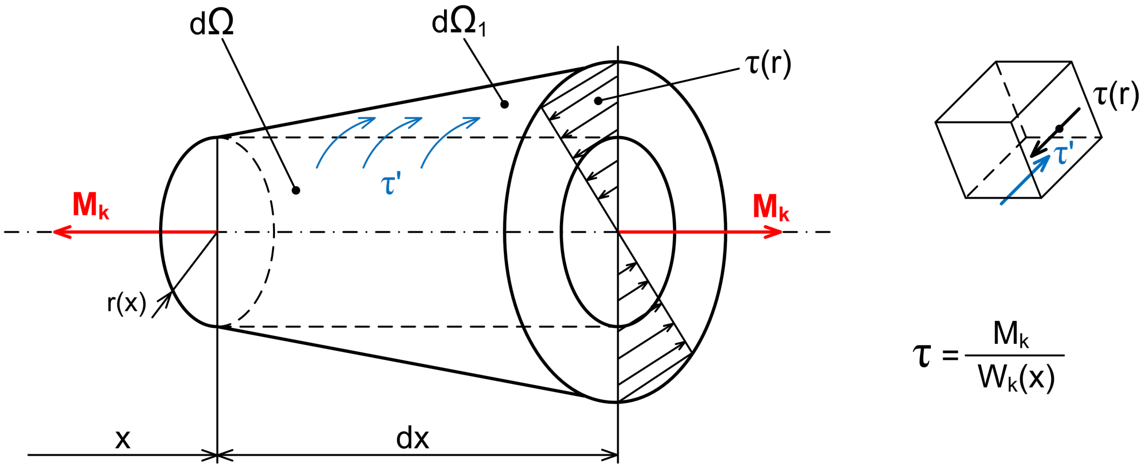
Úhel natočení v místě působení silové dvojice M je možné stanovit také pomocí Castiglianovy věty

$$\Delta\varphi_M = \frac{\partial W}{\partial M} = \int\limits_\gamma \frac{M_k(x)}{2GJ_p}\, \frac{\partial M_k}{\partial M}\, \mathrm{d}x \tag{8.17}$$

8.4 Vliv odchylek od případu prostého krutu na napjatost

Zde se omezíme pouze na vliv změny průřezu prutu podél střednice, která může být spojitá nebo skoková (konstrukční vrub).

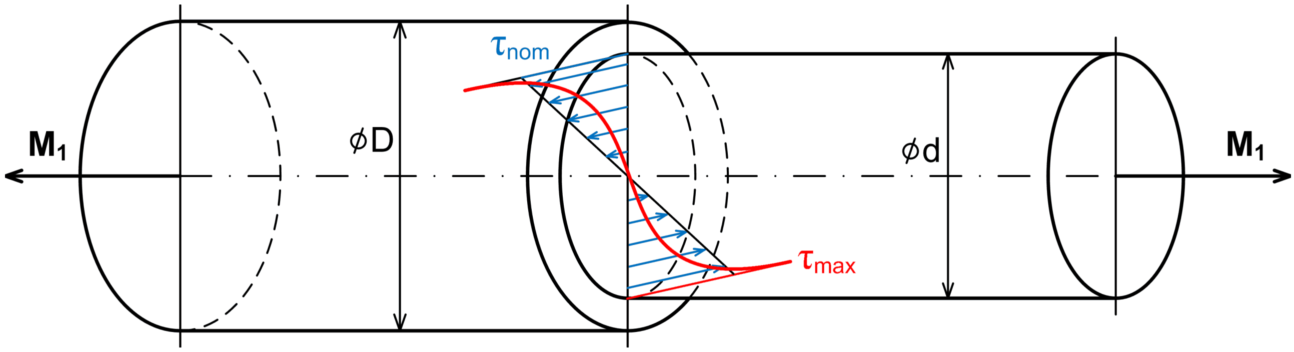
Vliv spojité změny průřezu:



Z momentové podmínky rovnováhy subelementu $d\Omega_1$ vyplývá, že na válcové ploše musí působit smykové napětí τ', což je porušení prutové napjatosti, kdy napětí mohou působit pouze v příčném řezu. **V dalším předpokládáme, že toto napětí je podstatně menší než smykové napětí v krajním vlákně ($\tau' \ll \tau$) a můžeme je tedy zanedbat.**

Vliv skokové změny průřezu (vrubu):

V místě vrubu vzniká obecná prostorová napjatost a dochází zde rovněž ke koncentraci napětí. V rámci prosté PP se tento problém řeší smluvním způsobem, zavedením tzv. součinitele koncentrace napětí α_τ, kterým se násobí nominální napětí τ_{nom} stanovené pomocí teorie prosté pružnosti pro prut a to pro menší průřez ve vrubu



$$\tau_{max} = \alpha_\tau \, \tau_{nom} = \alpha_\tau \, \frac{M_k}{W_k} = \alpha_\tau \, \frac{16 M_1}{\pi d^3} \qquad (8.18)$$

Bezpečnost v místě vrubu je potom rovna

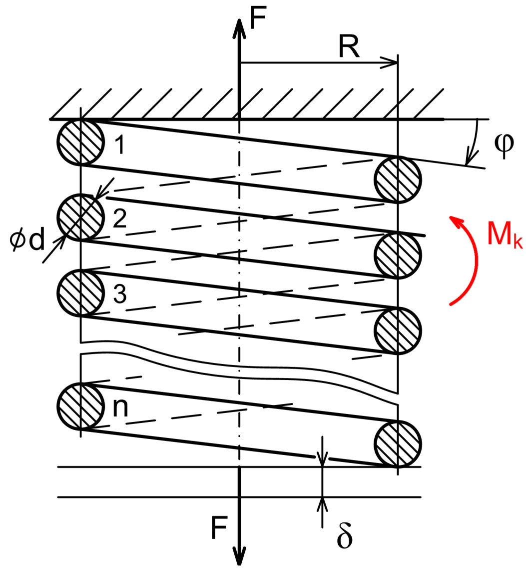
$$k_K = \frac{\tau_K}{\tau_{max}} \geqq k_D \qquad (8.19)$$

Na rozdíl od spojité změny průřezu je vliv skokové změny průřezu na napjatost podstatný a většinou ho není možné zanedbat.

Deformace prutu, v našem případě úhel natočení $\Delta\varphi$, nebývá vruby příliš ovlivněna, protože jde o veličinu integrální, na které se podílejí především přímé úseky prutu, kde teorie prosté PP platí s dostatečnou přesností.

8.5 Válcová pružina s malým stoupáním

Jedním z typických strojních dílů, kde je možné aplikovat vztahy odvozené pro idealizovaný případ prostého krutu je válcová pružina s malým stoupáním φ, viz obr. Ke stanovení posunutí δ volného konce pružiny zatíženého silou F je přitom možné velice efektivně použít energetického přístupu, kdy energie napjatosti W je rovna práci vnější síly F. Naším cílem nyní bude pevnostní kontrola pružiny a stanovení tzv. zapružení δ.



Pevnostní kontrola

$$M_k = FR\cos\varphi \doteq FR \qquad \tau = \frac{M_k}{W_k} = \frac{16M_k}{\pi d^3}$$

$$k_K = \frac{\tau_K}{\tau_{max}} \geqq k_D$$

Energie napjatosti W

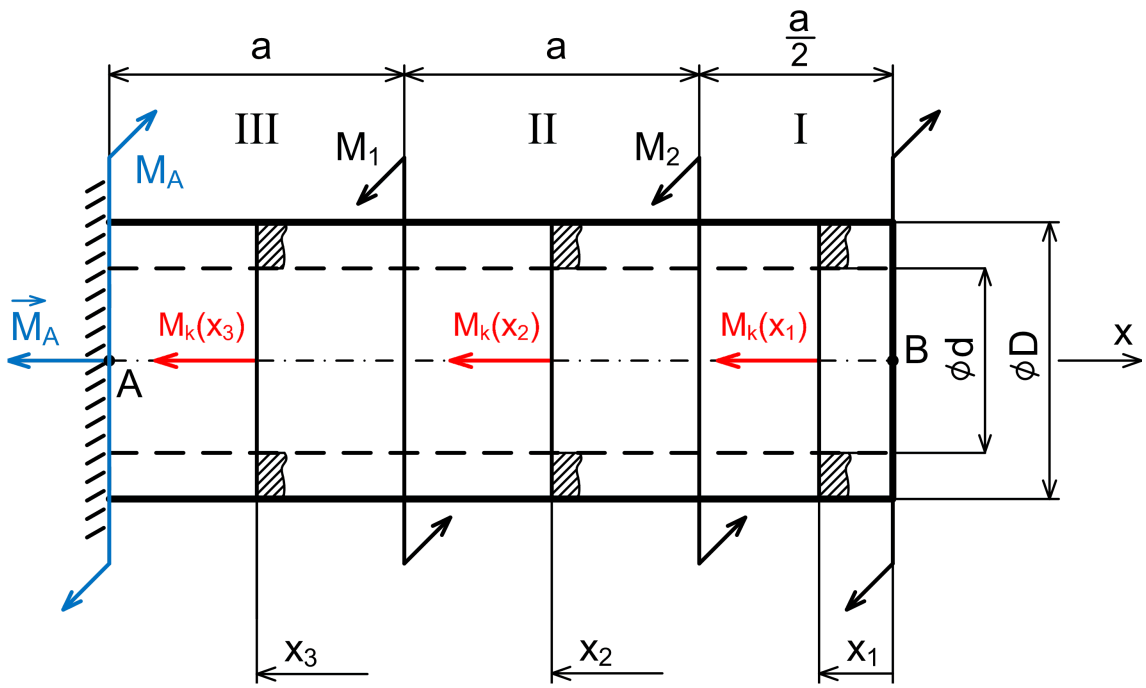
$$W = \frac{M_k^2 l}{2GJ_p} = \frac{M_k^2\, 2\pi Rn}{2G\,\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{32M_k^2 Rn}{Gd^4} = \frac{32F^2R^3n}{Gd^4}$$

$$W = A = \frac{1}{2}F\delta$$

Posuv zatíženého konce pružiny (zapružení): $$\delta = \frac{64FR^3n}{Gd^4}$$

8.6 Namáhání na krut, demonstrační příklady

Př.1: Navrhněte příčné rozměry prutu mezikruhového průřezu a stanovte úhel natočení $\Delta\varphi_B$ v místě B



$M_1 = 1000$ Nm, $M_2 = 1000$ Nm, $M_3 = 600$ Nm, $a = 0,5$ m, $\frac{d}{D} = 0,8$ u mezikruhového průřezu, mez kluzu ve smyku $\tau_K = 200$ MPa, bezpečnost $k_D = 2$, modul pružnosti ve smyku $G = 0,8 \cdot 10^5$ MPa

Statický rozbor pro úplně uvolněné těleso:

$$\mu = 3 \qquad \nu = 3 \qquad s = \mu - \nu = 3 - 3 = 0$$

Úloha je staticky určitá.

Podmínka silové rovnováhy a styková výslednice:

$$\sum M \; : \; -M_A + M_1 + M_2 - M_3 = 0$$

$$M_A = M_1 + M_2 - M_3 = 1000 + 1000 - 600 = 1400 \text{ Nm}$$

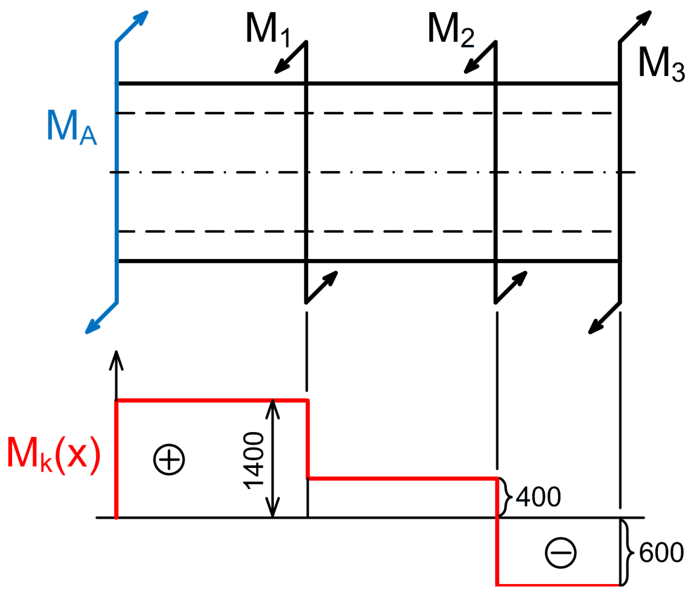
Průběhy kroutících momentů $M_k(x)$ v úsecích I, II a III stanovíme z momentových podmínek statické rovnováhy každého uvolněného prvku. Vektor $M_k(x)$ v příčném řezu v místě x přitom považujeme za kladný, má-li směr vnější normály řezu.

$$M_k(x_1) = -M_3 = -600 \text{ Nm}$$

$$M_k(x_2) = -M_3 + M_2 = 400 \text{ Nm}$$

$$M_k(x_3) = -M_3 + M_2 + M_1 = 1400 \text{ Nm}$$

Grafické znázornění průběhu kroutících momentů $M_k(x)$



Maximální kroutící moment:

$$M_{k,max} = 1400 \text{ Nm}$$

Pevnostní návrh příčného průřezu:

$$\tau_{max} = \frac{M_{k,max}}{W_k} = \frac{M_{k,max}}{\frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4)} = \frac{16M_{k,max}}{\pi D^3(1-\alpha^4)} = \frac{\tau_K}{k_D}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_{k,max}\,k_D}{\pi(1-\alpha^4)\tau_K}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1400 \cdot 10^3 \cdot 2}{\pi(1-0,8^4) \cdot 200}} = 49,4 \doteq 50 \text{ mm}$$

$$d = \alpha D = 0,8 \cdot 50 = 40 \text{ mm}$$

Polární moment průřezu J_p:

$$J_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32}(50^4 - 40^4) = 3,623 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

Stanovení úhlu natočení $\Delta\varphi_B$ v místě B pomocí zkroucení jednotlivých úseků

$$\Delta\varphi_B = \sum \frac{M_{k,i}\,l_i}{GJ_{p,i}} =$$

$$= \frac{1}{GJ_p}\left[M_k(x_1) \cdot 0,5a + M_k(x_2) \cdot a + M_k(x_3) \cdot a\right] =$$

$$= \frac{10^6}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 3,625 \cdot 10^5} \cdot (-600 \cdot 0,5^2 + 400 \cdot 0,5 + 1400 \cdot 0,5) =$$

$$= 0,02586 \text{ rad} = 1,48^\circ$$

Stanovení úhlu natočení $\Delta\varphi_B$ v místě B pomocí Castiglianovy věty

$$\Delta\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_3} = \frac{1}{GJ_p}\left[\int\limits_0^{0{,}5a} M_k(x_1)\,\frac{\partial M_k}{\partial M_3}\,\mathrm{d}x_1 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0{,}5a}^{1{,}5a} M_k(x_2)\,\frac{\partial M_k}{\partial M_3}\,\mathrm{d}x_2 + \int\limits_{1{,}5a}^{2{,}5a} M_k(x_3)\,\frac{\partial M_k}{\partial M_3}\,\mathrm{d}x_3\right] =$$

$$= \frac{1}{GJ_p}\left[\int\limits_0^{0{,}5a} (-M_3)\,(-1)\,\mathrm{d}x_1 + \right.$$

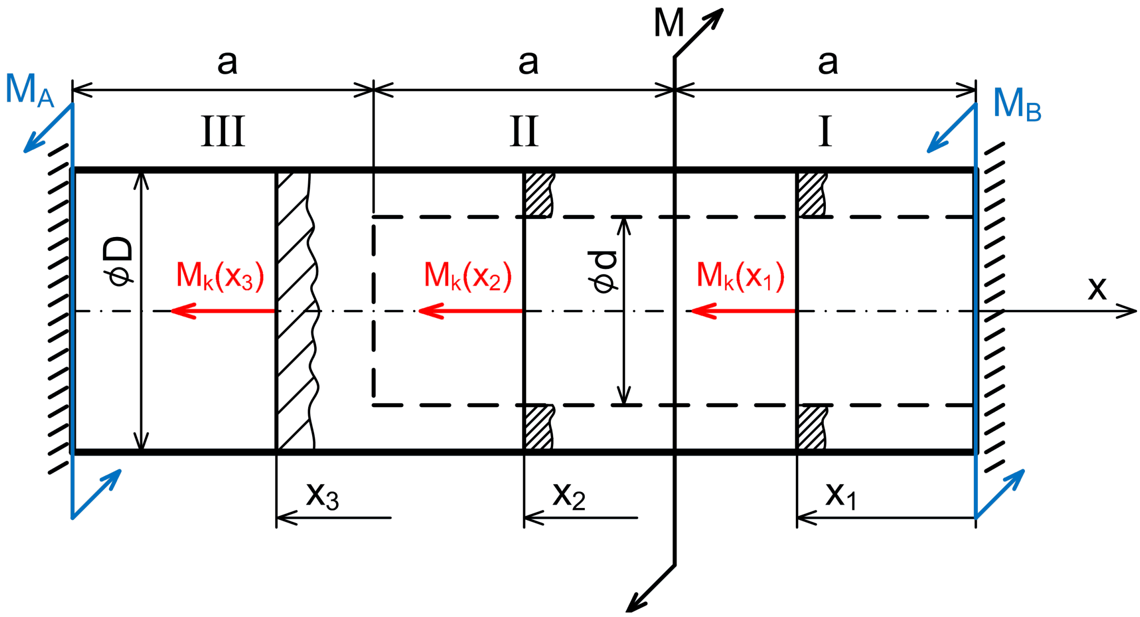
$$+ \int\limits_{0{,}5a}^{1{,}5a} (-M_3 + M_2)\,(-1)\,\mathrm{d}x_2 +$$

$$\left. + \int\limits_{1{,}5a}^{2{,}5a} (-M_3 + M_2 + M_1)\,(-1)\,\mathrm{d}x_3\right] =$$

$$= \frac{1}{GJ_p}\left[M_3 \cdot 0,5a + (M_3 - M_2)\cdot a + (M_3 - M_2 - M_1)\cdot a\right] =$$

$$= -0,0258\ \text{rad} = -1,48^\circ$$

Př.2: Proveďte pevnostní kontrolu prismatického prutu znázorněného na obrázku.



$M = 1000$ Nm, $a = 0,5$ m, $D = 40$ mm, $d = 30$ mm, mez kluzu $\tau_K = 200$ MPa, dovolená bezpečnost $k_D = 2$

Statický rozbor pro úplně uvolněné těleso:

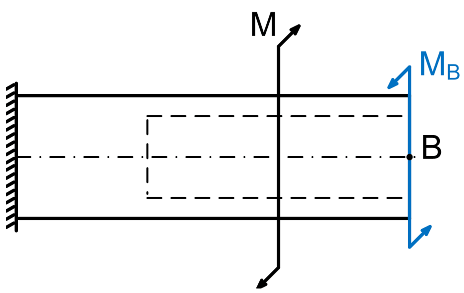
$$\mu = 2 \qquad \nu = 1 \qquad s = \mu - \nu = 2 - 1 = 1$$

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá.

Podmínka statické rovnováhy pro úplně uvolněný prut

$$M_A + M_B - M = 0$$

Částečně uvolněný prut



Deformační podmínka pro uvolněnou vazbu

$$\Delta\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = 0$$

Průběh kroutících momentů $M_k(x)$ podél prutu

$M_k(x_1) = M_B$

$M_k(x_2) = M_B - M$

$M_k(x_2) = M_B - M$

Pozn: V souladu se zatížením a realizovaným částečným uvolněním bylo nutné vyjádřit ohybový moment ve tvaru $M_y(M, M_B)$. Za tím účelem byly uvolňovány prvky prutu z pravé strany, kde působí M_B.

Řešení deformační podmínky pomocí Castigliánovy věty

$$\Delta\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = \int\limits_0^a \frac{M_k(x_1)}{GJ_{p_1}} \frac{\partial M_k}{\partial M_B}\,\mathrm{d}x_1 +$$

$$+ \int\limits_a^{2a} \frac{M_k(x_2)}{GJ_{p_2}} \frac{\partial M_k}{\partial M_B}\,\mathrm{d}x_2 + \int\limits_{2a}^{3a} \frac{M_k(x_3)}{GJ_{p_3}} \frac{\partial M_k}{\partial M_B}\,\mathrm{d}x_3 = 0$$

$$\int\limits_0^a \frac{M_B}{GJ_{p_1}} \cdot 1 \cdot \mathrm{d}x_1 + \int\limits_a^{2a} \frac{M_B - M}{GJ_{p_2}} \cdot 1 \cdot \mathrm{d}x_2 + \int\limits_{2a}^{3a} \frac{M_B - M}{GJ_{p_3}} \cdot 1 \cdot \mathrm{d}x_3 = 0$$

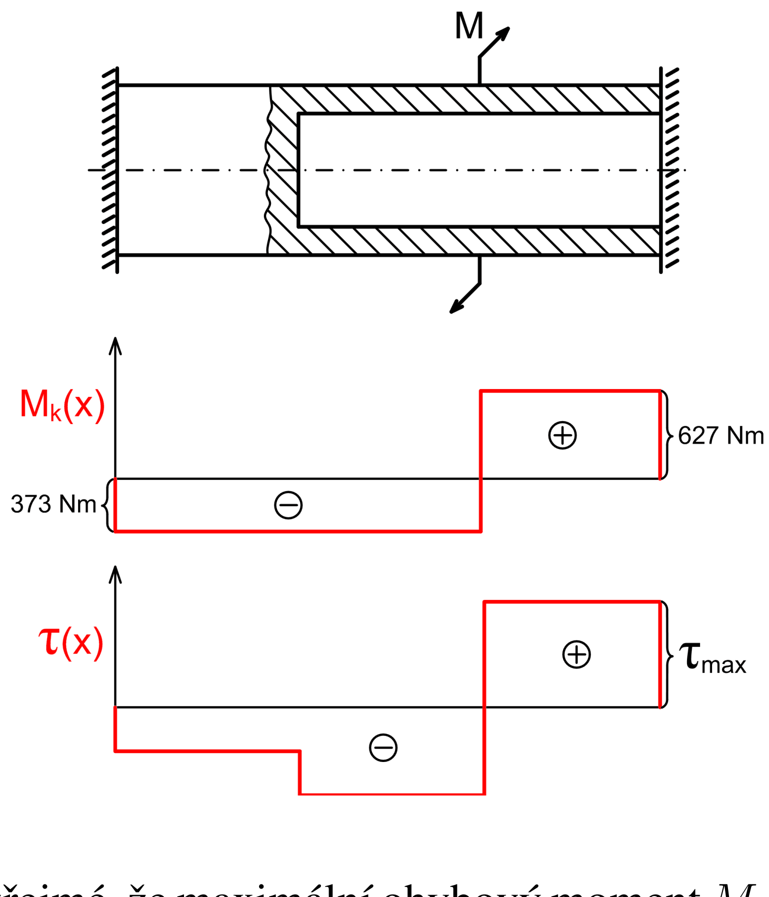
$$\frac{M_B\,a}{GJ_{p_1}} + \frac{(M_B - M)a}{GJ_{p_2}} + \frac{(M_B - M)a}{GJ_{p_3}} = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{GJ_{p_1}(= J_{p_2})}{a}$$

$$M_B + M_B - M + M_B \frac{J_{p1}}{J_{p3}} - M \frac{J_{p1}}{J_{p3}} = 0$$

Z této rovnice již lze stanovit jedinou neznámou, kterou je moment ve vetknutí M_B

$$M_B = \frac{M\left(\frac{J_{p1}}{J_{p3}} + 1\right)}{\frac{J_{p1}}{J_{p3}} + 2} = \frac{M\left(\frac{\frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}}{\frac{\pi D^4}{32}} + 1\right)}{\frac{D^4 - d^4}{D^4} + 2} = 627 \text{ Nm}$$

Průběh kroutících momentů $M_k(x)$ je dán dříve uvedenými vztahy, do kterých dosadíme za M_B. Znázorněno graficky



Z průběhu je zřejmé, že maximální ohybový moment $M_{k,max}$ je v úseku I a má hodnotu M_B. Z hlediska namáhání jde zároveň o nebezpečný úsek, protože je zde minimální modul průřezu W_k, což vede k maximálnímu smykovému napětí τ_{max}.

Pevnostní kontrola:
Modul průřezu

$$W_{k,1} = \frac{J_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{16 \cdot 40}(40^4 - 30^4) = 8590 \text{ mm}^3$$

Maximální smykové napětí τ_{max}

$$\tau_{max} = \frac{M_{k,max}}{W_k} = \frac{627 \cdot 10^3}{8590} = 73,0 \text{ MPa}$$

Bezpečnost

$$k_K = \frac{\tau_K}{\tau_{max}} = \frac{200}{73} = 2,74 \ > \ k_D = 2$$

Prut pevnostně vyhovuje.

Pozn: Deformační podmínku je možné v našem příkladu řešit také na základě principu superposice použitím vztahu odvozeného pro zkroucení prismatického prutu. Natočení prutu v místě B $\Delta\varphi_M$ pouze od silové dvojice M se musí rovnat v absolutní hodnotě natočení $\Delta\varphi_{M_B}$ pouze od stykové výslednice M_B tak, aby výsledné natočení v uložení bylo nulové

$$|\Delta\varphi_M| = |\Delta\varphi_{M_B}|$$

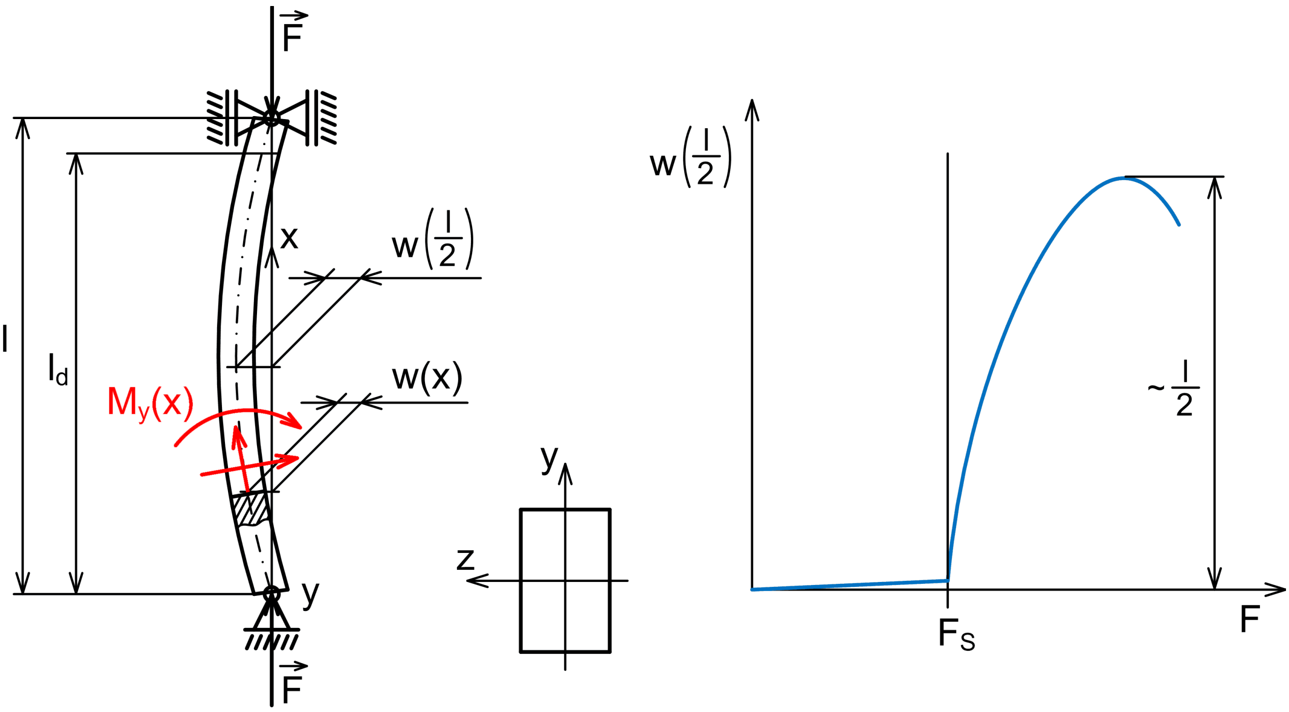
$$\frac{Ma}{GJ_{p_3}} + \frac{Ma}{GJ_{p_2}} = \frac{M_B\, a}{GJ_{p_3}} + \frac{M_B\, a}{GJ_{p_2}} + \frac{M_B\, a}{GJ_{p_1}} \qquad (J_{p_1} = J_{p_2})$$

$$M_B\left(\frac{J_{p_1}}{J_{p_3}} + 2\right) = M\left(\frac{J_{p_1}}{J_{p_3}} + 1\right) \quad \Rightarrow \quad M_B = \frac{M\left(\frac{J_{p_1}}{J_{p_3}} + 1\right)}{\frac{J_{p_1}}{J_{p_3}} + 2}$$

9 MEZNÍ STAV VZPĚRNÉ STABILITY PRUTŮ

Definice: Mezním stavem vzpěrné stability rozumíme stav, kdy se změní charakter podstatné deformace a to ze stlačování na ohyb.

Pro pochopení problematiky nejprve uvedeme výsledky experimentu se stlačovaným přímým prutem obdélníkového průřezu. Postupně zvětšujeme zatížení F a měříme průhyb uprostřed prutu $w\left(\frac{l}{2}\right)$



Prut se začíná významněji prohýbat při dosažení kritického zatížení F_s, což odpovídá dosažení mezního stavu stability prutu. Ohyb se přitom děje kolem osy y, která je **minimální hlavní centrální osou kvadratického momentu průřezu**.

$$\frac{M_y(x)}{EJ_y} = \frac{1}{R} = \frac{w''(x)}{(1 + w'^2(x))^{\frac{3}{2}}} \tag{9.1}$$

$$M_y(x) = Fw(x) \tag{9.2}$$

Dosazením (9.2) do (9.1) obdržíme

$$\frac{Fw(x)}{EJ_y} = \frac{1}{R} = \frac{w''(x)}{(1 + w'^2(x))^{\frac{3}{2}}} \tag{9.3}$$

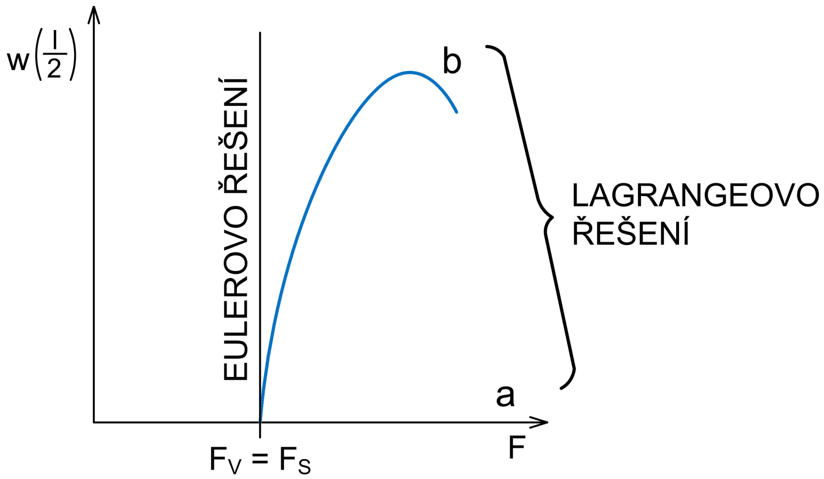
Jde o diferenciální rovnici 2. řádu s obecným řešením ve tvaru

$$w(x) = w(F, x, C_1, C_2) \tag{9.4}$$

kterou poprvé vyřešil Lagrange pro následující okrajové podmínky

$$x = 0 \qquad w(0) = 0 \qquad x = l_d \doteq l \qquad w(l) = 0$$

Lagrangeovo řešení je znázorněno v následujícím obrázku



který vykazuje dvě rozdílné oblasti

a) $F < F_v$ - prut je stlačován

b) $F > F_v$ - existují dvě řešení:

1) prut je stlačován, jde o případ **labilní rovnováhy** - případ a)

2) prut je ohýbán, jde o případ **stabilní rovnováhy** - případ b)

Místo na grafu $F = F_v$ se nazývá **bodem rozdvojení rovnováhy**. Do tohoto stavu stabilní stlačování se stává labilním a stabilním se stává ohyb.

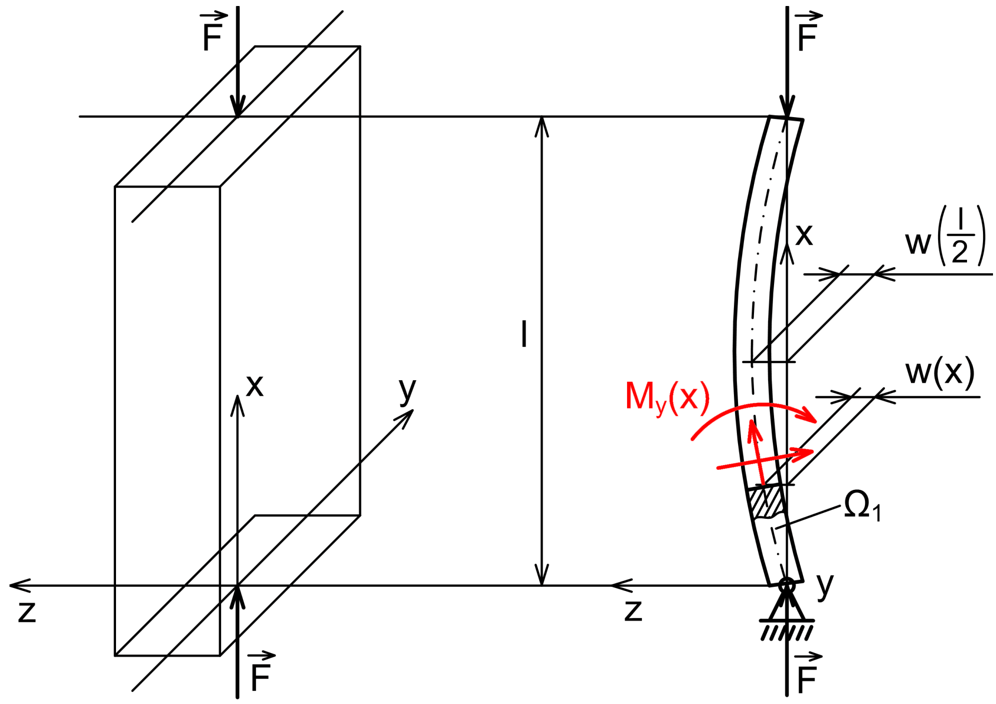
Z porovnání s úvodním obrázkem plyne, že **teoreticky stanovený bod rozdvojení rovnováhy odpovídá meznímu stavu vzpěrné stability ideálního přímého prutu, tedy $\boldsymbol{F_s = F_v}$.**

V praxi nedovolujeme ohýbání stlačovaného prutu, který musí být dostatečně bezpečný vůči MS stability. Při výpočtu se potom stačí omezit pouze na stanovení F_v, a to v oblasti, kde je w' malé, respektive zanedbatelné ($w'(x) = 0$). Touto cestou se poprvé vydal Euler, jehož řešení si tu uvedeme

Eulerovo řešení pro ideální přímý prut

Předpoklady řešení: střednice prutu je přímka, síla F působí přesně v ose, průřez je prizmatický a nešroubový, prut je dostatečně štíhlý, materiál prutu je homogenní, isotopický a nekonečně pevný.

Předpokládáme prut obdélníkového průřezu, osy y a z jsou hlavními centrálními osami kvadratických momentů průřezu. Ohyb se děje kolem osy minimálního KM, v našem případě tedy kolem osy y



Při odvození se vychází z diferenciální rovnice průhybové čáry, která má v souladu s (9.1) a s přihlédnutím ke znaménkové konvenci (str. 104) následující tvar

$$EJ_y w''(x) = -M_y(x) \tag{9.5}$$

Ohybový moment $M_y(x)$ stanovíme z momentové podmínky pro prvek prutu Ω_1, uvolněný ve zdeformovaném stavu

$$M_y(x) = Fw \tag{9.6}$$

Dosadíme (9.6) do (9.5) a zavedeme parametr p definičním vztahem (9.8)

$$EJ_y w''(x) = -Fw \quad \Rightarrow \quad w''(x) + \frac{F}{EJ_y}\, w = 0 \tag{9.7}$$

$$p^2 = \frac{F}{EJ_y} \tag{9.8}$$

Po dosazení (8) do (7) obdržíme

$$w''(x) + p^2\, w(x) = 0 \tag{9.9}$$

Jde o homogenní diferenciální rovnici 2. řádu s následujícím obecným řešením (viz matematika)

$$w(x) = C_1 \sin px + C_2 \cos px \tag{9.10}$$

Aplikací okrajové podmínky prutu na spodním okraji $x = 0$, $w(0) = 0$ do rovnice (9.10) dostaneme pro integrační konstantu $C_2 = 0$ a jejím zpětným dosazením do (9.10) potom rovnici průhybové čáry prutu, kterou je sinusovka

$$w(x) = C_1 \sin px \tag{9.11}$$

Na tuto rovnici nyní aplikujeme okrajovou podmínku platnou na horním okraji $x = l$, $w(l) = 0$, což vede k rovnici (9.12)

$$0 = C_1 \sin pl \tag{9.12}$$

Tato podmínka je splněna, platí-li

a) $C_1 = 0$, přičemž p a tedy i zatížení F dle (8) může být libovolné, což odpovídá labilnímu stlačování

b) $\sin pl = 0 \quad \rightarrow \quad pl = k\pi$ (13) kde $k = 0, 1, \ldots, n$

V dalším se soustředíme na případ b) popsaný (9.13), který odpovídá ohýbanému prutu. Z množiny možných řešení vybereme to, které vede k minimálnímu nenulovému zatížení F, tedy je nejnebezpečnější. V tomto případě $k = 1$ a na základě (9.13) dostáváme

$$pl = \pi \tag{9.14}$$

Dosazením (9.8) do (9.14) a algebraickou úpravou dostáváme finální vztah (9.15) pro velikost kritické síly F_v

$$\sqrt{\frac{F_v}{EJ_y}}\, l = \pi \quad \Rightarrow \quad F_v = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2} \tag{9.15}$$

Podmínku (9.14) dále vložíme to rovnice průhybové čáry (9.12) a obdržíme

$$w(x) = C_1 \sin \frac{\pi}{l}\, x \tag{9.16}$$

Průhyb uprostřed prutu je roven

$$w\left(\tfrac{\pi}{l}\right) = C_1 \sin \frac{\pi}{2} = C_1 \tag{9.17}$$

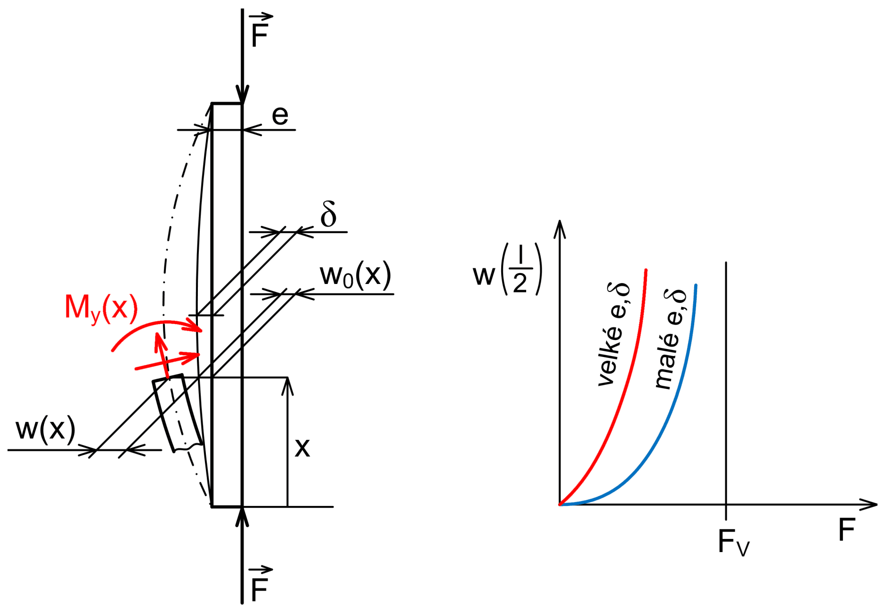
kde C_1 je jakákoliv konstanta. **Průhyb zde je tedy neurčitý a je znázorněn na předchozím obrázku svislou čarou, která graficky představuje Eulerovo řešení.**

9.1 Vliv odchylek od ideálního případu

9.1.1 Vliv zakřivení střednice a excentrického působení vnějšího zatížení F

Předpokládáme střednici před zatížením ve tvaru sinusovky

$$w_0(x) = \delta \sin \frac{\pi}{l}\, x \tag{9.18}$$



Ohybový moment $M_y(x)$ je roven

$$M_y(x) = F[e + w_0(x) + w(x)] \tag{9.19}$$

a po dosazení do diferenciální rovnice průhybové čáry (9.5) dostáváme

$$EJ_y w''(x) + Fw(x) = -Fe - Fw_0(x) \tag{9.20}$$

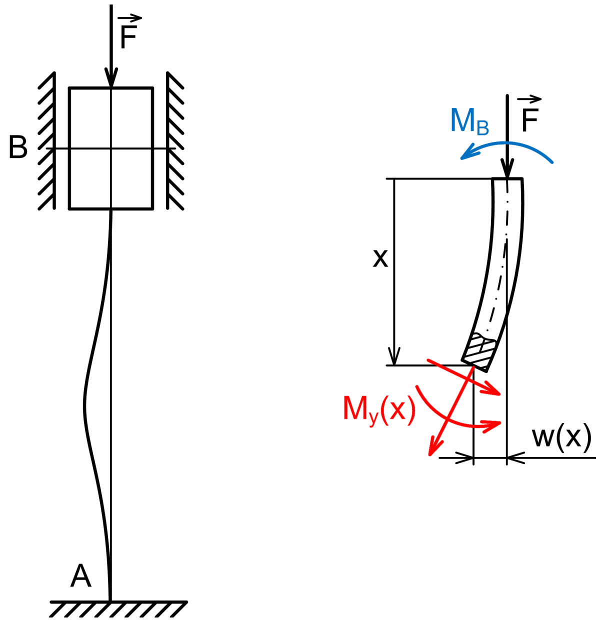
Řešení diferenciální rovnice (9.20) je uvedeno ve skriptech PPI. Z jejího rozboru vyplývá, že **bod rozdvojení rovnováhy v tomto případě neexistuje**. Při zatížení $F = F_v$ však dochází k podstatnému zvětšení průhybu w.

9.1.2 Vliv proměnlivosti průřezu a modulu pružnosti E podél střednice

Bod rozdvojení rovnováhy a tedy i mezní stav vzpěrní stability existuje. Velikost kritické síly F_v závisí na průběhu funkce $EJ_y = f(x)$ - viz skripta.

9.1.3 Vliv uložení prutu

Abychom posoudili vliv uložení na velikost kritické síly F_v řešíme úlohu s tužšími vazbami, viz obrázek



Ohybový moment $M_y(x)$

$$M_y(x) = -M_B + Fw(x) \tag{9.21}$$

Dosadíme do (9.5) a po úpravě dostaneme diferenciální rovnici průhybové čáry (9.23)

$$w''(x) + \frac{F}{EJ_y}\, w(x) = \frac{M_B}{EJ_y} \tag{9.22}$$

Obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice (9.22) má tvar

$$w(x) = C_1 \sin px + C_2 \cos px + A \tag{9.23}$$

kde A je partikulární integrál, který musí vyhovovat (9.22)

$$\frac{F}{EJ_y} A = \frac{M_B}{EJ_y} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{M_B}{F} \tag{9.24}$$

Zpětným dosazením do (9.23) obdržíme

$$w(x) = C_1 \sin px + C_2 \cos px + \frac{M_B}{F} \tag{9.25}$$

Pro aplikaci jedné okrajové podmínky potřebujeme rovněž derivaci průhybové čáry (9.25)

$$w'(x) = C_1 p \cos px - C_2 p \sin px \tag{9.26}$$

Pro stanovení integračních konstant nyní formulujeme okrajové podmínky úlohy:

$$x = 0 \quad w(0) = 0 \ \rightarrow (9.25) \ \Rightarrow \ 0 = C_2 + \frac{M_B}{F} \ \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{M_B}{F}$$

$$x = 0 \quad w'(0) = 0 \ \rightarrow (9.26) \ \Rightarrow \ 0 = C_1 p \qquad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$x = l \quad w(l) = 0 \ \rightarrow (9.25) \ \Rightarrow \ 0 = C_1 \sin pl + C_2 \cos pl + \frac{M_B}{F}$$

$$-\frac{M_B}{F} \cos pl + \frac{M_B}{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{M_B}{F}(1 - \cos pl) = 0}$$

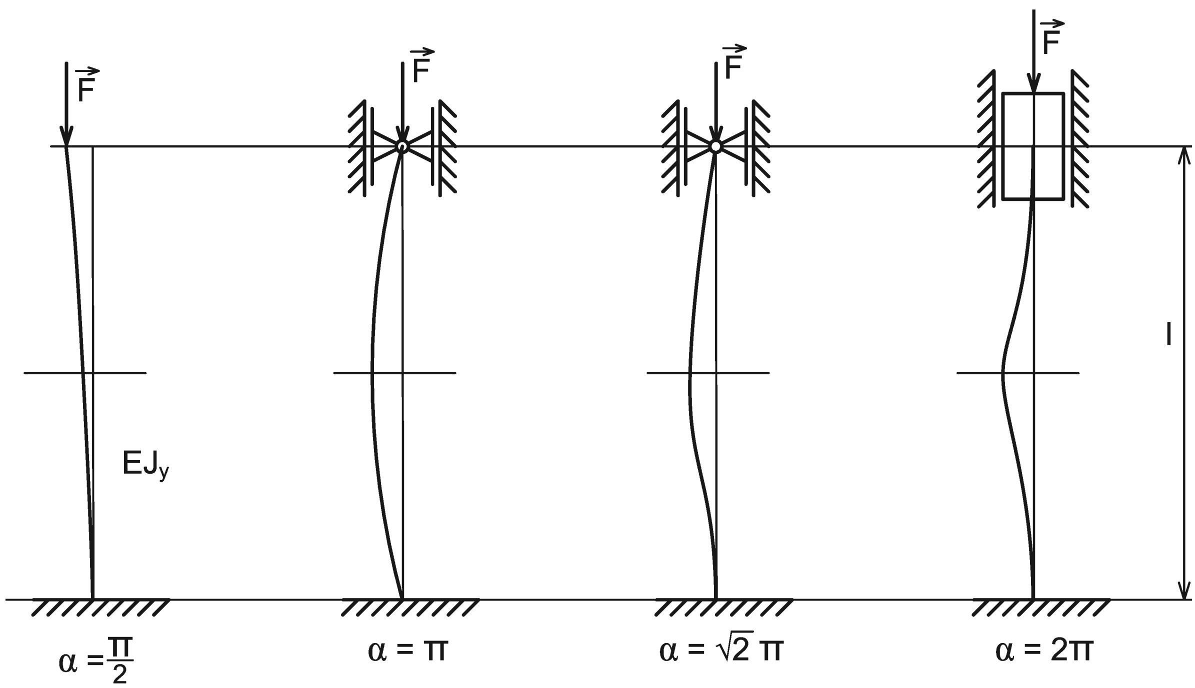
Předchozí rovnice je splněna, platí-li

$$\cos pl = 1 \quad \Rightarrow \quad pl = k \cdot 2\pi \quad k = 1, \ldots, n \tag{9.27}$$

Z množiny řešení pro různá k vybíráme to, které vede k minimální kritické síle F_v, tj. pro $k = 1$. Po dosazení za p dle (9.8) obdržíme relaci pro kritickou sílu F_v

$$\sqrt{\frac{F_v}{EJ_y}}\, l = 2\pi \quad \Rightarrow \quad F_v = \frac{4\pi^2 EJ_y}{l^2} \tag{9.28}$$

Ukazuje se, že **vliv uložení na velikost kritické síly $\boldsymbol{F_v}$ je podstatný**. Podle druhu uložení rozeznáváme čtyři případy Eulerova vzpěru, uvedené na následujícím obrázku



Vztah pro kritickou sílu F_v je možné zobecnit zavedením součinitele uložení α následovně

$$F_v = \frac{\alpha^2 EJ_y}{l^2} \tag{9.29}$$

Tuhost uložení u případů na obrázku roste zleva doprava. Poměr kritických sil pro oba krajní případy je $16 : 1$, což je závislost podstatná.

9.1.4 Vliv reálného materiálu

Při odvozování vztahů jsme doposud předpokládali, že materiál prutu je nekonečně pevný a lineárně pružný. U skutečného materiálu může meznímu stavu vzpěrné stability předcházet mezní stav pružnosti, případně mezní stav křehké pevnosti. Při pevnostní kontrole nás zajímá první aktuální mezní stav, který nastane při nejmenším vnějším zatížení.

Podívejme se nyní z tohoto pohledu na tlakové namáhání prutu z reálného materiálu a to buď ve stavu tvárném, charakterizovaném mezí kluzu v tlaku $\sigma_{kd} \approx \sigma_k$ nebo ve stavu křehkém, charakterizovaném mezí pevnosti v tlaku σ_{Rd}.

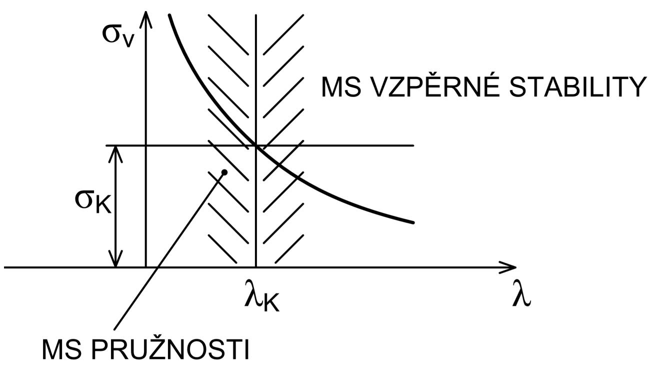
Nejprve se zaměříme na **materiál ve stavu tvárném**. Meznímu stavu vzpěrné stability prutu odpovídá následující tlakové napětí

$$\sigma_v = \frac{F_v}{S} \overset{(9.29)}{=} \frac{\alpha^2 E J_y}{Sl^2} = \frac{\alpha^2 E i_y^2 S}{Sl^2} = \frac{\alpha^2 E}{\left(\frac{l}{i_y}\right)^2} = \frac{\alpha^2 E}{\lambda^2} \tag{9.30}$$

kde veličina **$\boldsymbol{\lambda}$ je tzv. štíhlost prutu** definovaná následovně

$$\lambda = \frac{l}{i_y} \tag{9.31}$$

Relace (9.31) představuje tzv. Eulerovu hyperbolu, kterou je možné znázornit graficky



Hodnotě napětí $\sigma_v = \sigma_K$ odpovídá mezní štíhlost λ_k

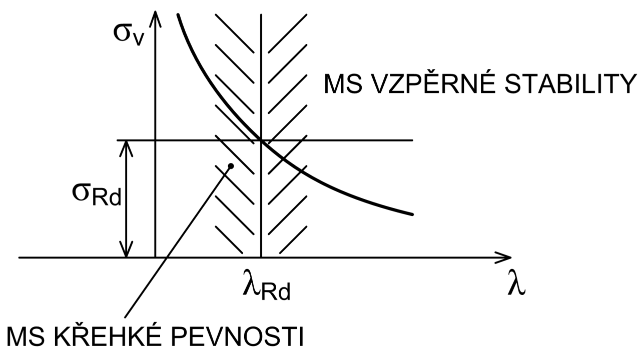
$$\sigma_v = \sigma_K \quad \rightarrow \quad (9.30) \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha^2 E}{\lambda^2} = \sigma_K \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \sqrt{\frac{\alpha^2 E}{\sigma_K}} \qquad (9.32)$$

která rozděluje předchozí obrázek na dvě oblasti

1) $\lambda < \lambda_k$ prut je tlustý a **aktuálním mezním stavem je mezní stav pružnosti**

2) $\lambda \geqq \lambda_k$ prut je štíhlý a **aktuálním mezním stavem je mezní stav vzpěrné stability**

Materiál ve stavu křehkém, grafické znázornění



Hodnotě napětí $\sigma_v = \sigma_{Rd}$ odpovídá mezní štíhlost λ_{Rd}

$$\sigma_v = \sigma_{Rd} \quad \rightarrow \quad (9.30) \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha^2 E}{\lambda_R^2} = \sigma_{Rd} \quad \Rightarrow \quad \lambda_R = \sqrt{\frac{\alpha^2 E}{\sigma_{Rd}}} \qquad (9.33)$$

která rozděluje předchozí obrázek na dvě oblasti

1) $\lambda < \lambda_R$ prut je tlustý a **aktuálním mezním stavem je mezní stav křehké pevnosti**

2) $\lambda \geqq \lambda_R$ prut je štíhlý a **aktuálním mezním stavem je mezní stav vzpěrné stability**

9.2 Pevnostní kontrola přímého stlačovaného prutu

Předpokládáme, že materiál prutu je ve stavu tvárném, charakterizovaném mezí kluzu σ_K. Postup výpočtu je následující

1) Na základě geometrických charakteristik prutu stanovíme poloměr setrvačnosti průřezu prutu i_y a štíhlost prutu λ

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{S}} \qquad \lambda = \frac{l}{i_y}$$

2) Podle typu uložení určíme součinitel α a vypočteme mezní štíhlost λ_k

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\alpha^2 E}{\sigma_k}}$$

3) V závislosti na příslušné relaci vypočteme bezpečnost buď vzhledem k meznímu stavu vzpěrné stability nebo vůči meznímu stavu pružnosti

a) $\lambda \geqq \lambda_k \qquad F_v = \dfrac{\alpha^2 E J_y}{l^2} \qquad k_v = \dfrac{F_v}{F} \geqq k_D$

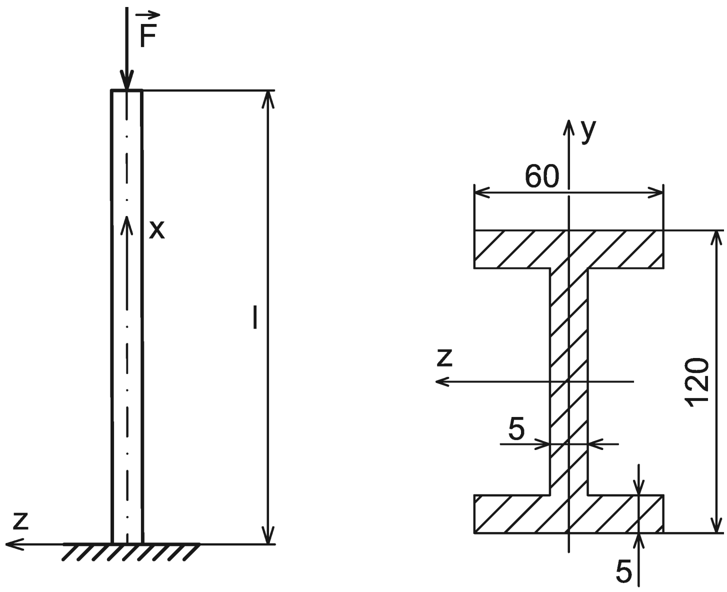
b) $\lambda < \lambda_k \qquad \sigma = \dfrac{F}{S} \qquad k_K = \dfrac{\sigma_K}{\sigma}$

Pozn: Vzhledem k vysoké nebezpečnosti mezního stavu vzpěrné stability jsou dovolené resp. doporučené bezpečnosti značně vysoké, např. $k_D = 4$ resp. 5.

U materiálu ve stavu křehkém se postupuje analogicky.

9.3 Demonstrační příklad

Př.1: Proveďte pevnostní kontrolu přímého prutu osově zatíženého tlakovou silou F. Materiál prutu je ve stavu tvárném.



$F = 2000$ N, $l = 3$ m, $E = 2,1 \cdot 10^4$ MPa, mez kluzu $\sigma_K = 350$ MPa , $k_D = 4$

Minimální hlavní centrální kvadratický moment J_{min}. Z obrázku průřezu je zřejmé, že jde o kvadratický moment J_y

$$J_y = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 60^3 + \frac{1}{12} \cdot 110 \cdot 5^3 = 1,811 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

Poloměr kvadratického momentu i_y a štíhlost prutu λ

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{S}} = \sqrt{\frac{1,811 \cdot 10^5}{1150}} = 12,55 \text{ mm} \qquad \lambda = \frac{l}{i_y} = \frac{3 \cdot 10^3}{12,55} = 239,0$$

Podle způsobu uložení jde o 1. případ Eulerova vzpěru se součinitelem uložení - $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Kritická štíhlost prutu λ_k

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\alpha^2 E}{\sigma_k}} = \lambda_k = \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 E}{\sigma_k}} = \lambda_k = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{4 \cdot 350}} = 38,5$$

Vzhledem k tomu, že skutečná štíhlost prutu $\lambda = 239,0$ je větší než kritická štíhlost $\lambda_k = 38,5$, aktuálním mezním stavem je mezní stav vzpěrné stability.

Kritická síla

$$F_v = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 E J_y}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1,811 \cdot 10^5}{4 \cdot (3 \cdot 10^3)^2} = 10\ 426\ \text{N}$$

Bezpečnost

$$k_v = \frac{F_v}{F} = \frac{10\ 426}{2000} = 5,21 > k_D = 4$$

Prut pevnostně vyhovuje.

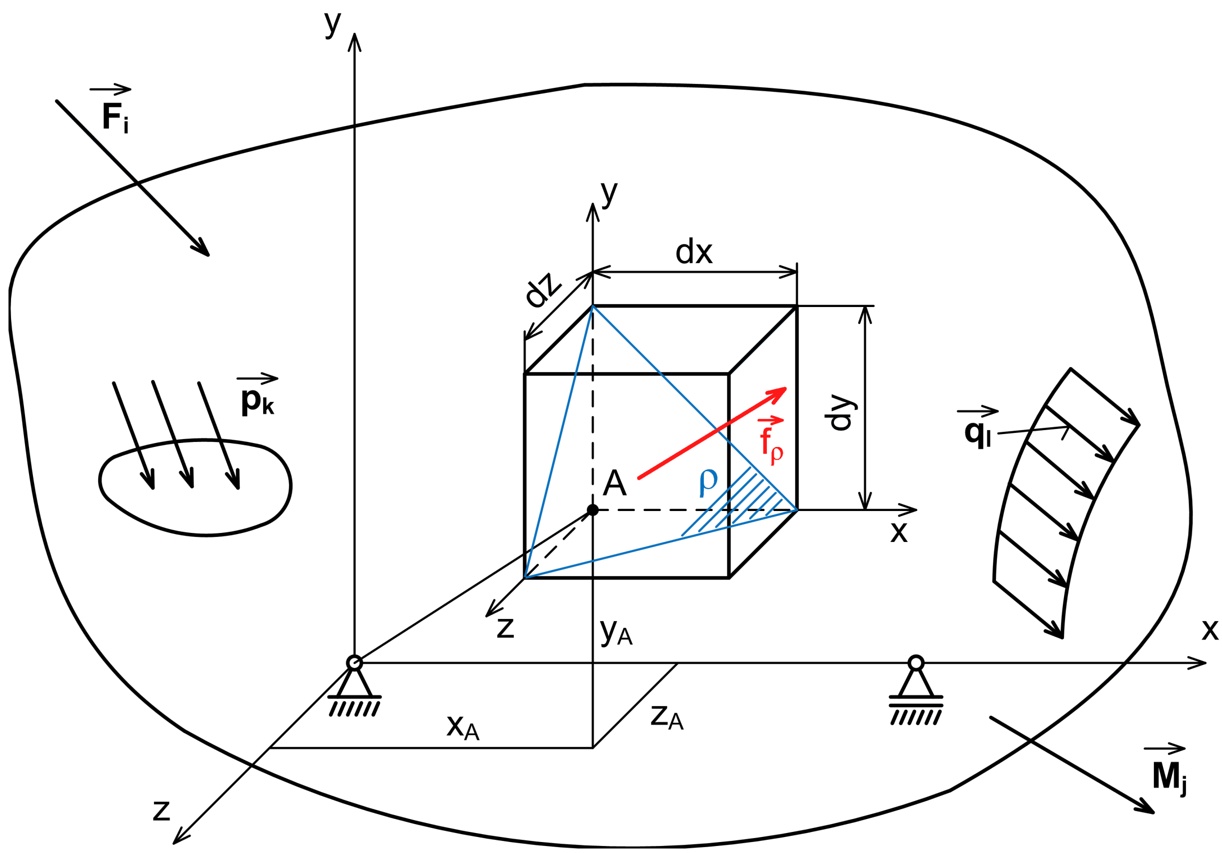
10 NAPJATOST V BODĚ TĚLESA

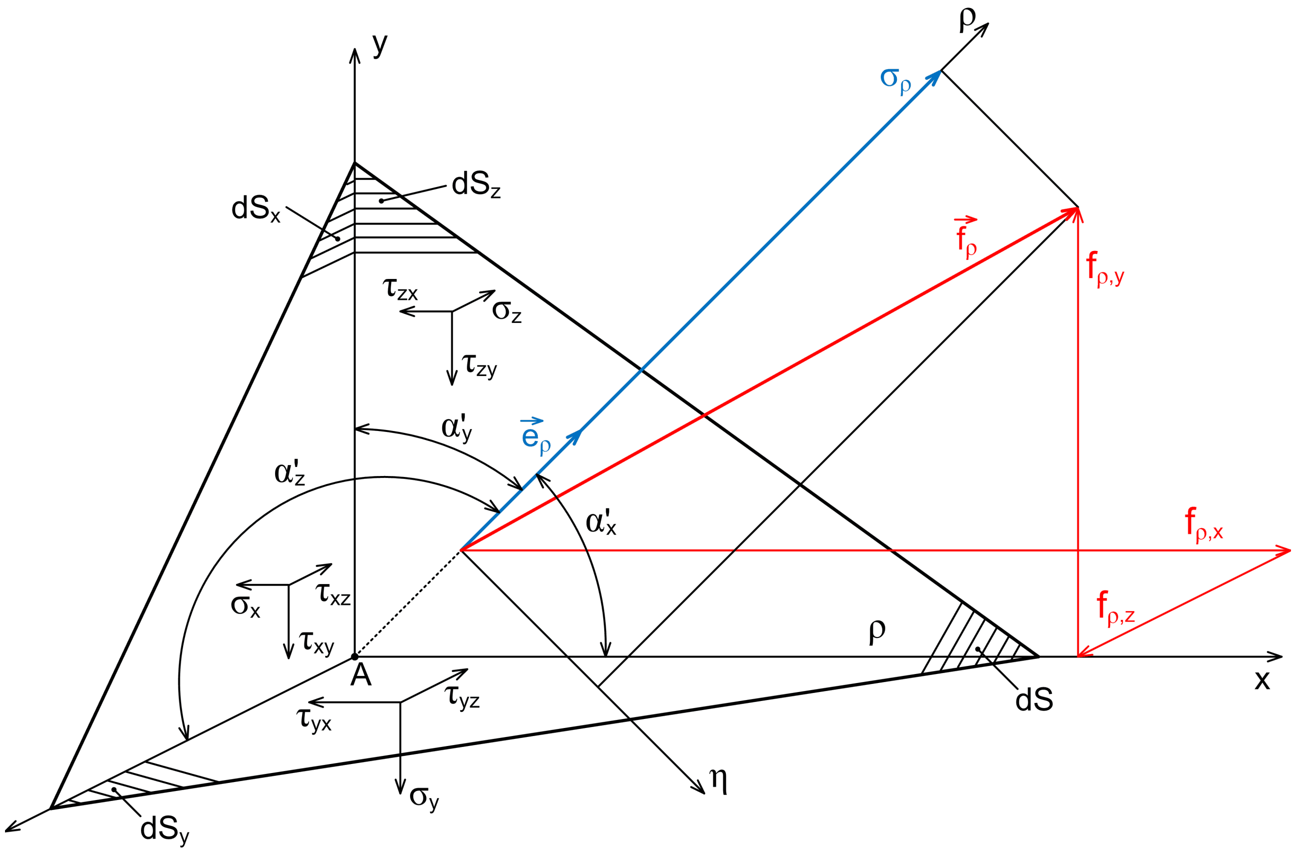
Definice: Napjatostí v bodě tělesa rozumíme množinu obecných napětí $\vec{f}_\rho$, působících ve všech řezech ρ, procházejícím tímto bodem.

V úvodní kapitole PPI jsme bez důkazu uvedli, že napjatost je určena tenzorem napětí T_σ. Nyní se budeme napjatostí zabývat podrobněji. Příslušné vztahy si odvodíme a předchozí výrok dokážeme.

10.1 Základní vztahy pro napětí v obecném řezu

Základním krokem ke stanovení obecného napětí $\vec{f}_\rho$ v řezu ρ je uvolnění elementárního čtyřstěnu v okolí obecného bodu A souřadnicovými rovinnými řezy a obecným řezem ρ a následná formulace podmínek statické rovnováhy, viz obr.





Poloha obecného řezu ρ je určena jednotkovým vektorem normály $\vec{e}_\rho$, jehož složkami jsou směrové kosiny α_x, α_y a α_z

$$\vec{e}_\rho = \alpha_x\, \vec{i} + \alpha_y\, \vec{j} + \alpha_z\, \vec{k} \tag{10.1}$$

kde

$$\alpha_x = \cos\alpha'_x \qquad \alpha_y = \cos\alpha'_y \qquad \alpha_z = \cos\alpha'_z$$

Zapsáno maticově

$$\{\alpha\} = |\alpha_x \;\; \alpha_y \;\; \alpha_z|^T \tag{10.2}$$

Pro směrové kosiny platí známý vztah

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1 \tag{10.3}$$

Vektor obecného napětí f_ρ je vyjádřen následovně

$$\vec{f}_\rho = f_{\rho,x}\,\alpha_x + f_{\rho,y}\,\alpha_y + f_{\rho,z}\,\alpha_z \tag{10.4}$$

Zapsáno maticově

$$\{f_\rho\} = |f_{\rho,x}\ \ f_{\rho,y}\ \ f_{\rho,z}|^T \tag{10.5}$$

Podmínky statické rovnováhy

$$\sum F_x\ :\ f_{\rho,x}\,\mathrm{d}S = \sigma_x\,\mathrm{d}S_x + \tau_{yx}\,\mathrm{d}S_y + \tau_{zx}\,\mathrm{d}S_z \quad \Big/ \cdot \frac{1}{\mathrm{d}S}$$

Po úpravě s uvážením $\frac{\mathrm{d}Sx}{\mathrm{d}S} = \alpha_x$ atd. obdržíme

$$\begin{aligned} & f_{\rho,x} = \sigma_x\,\alpha_x + \tau_{yx}\,\alpha_y + \tau_{zx}\,\alpha_z \\ \text{Analogicky}\qquad & f_{\rho,y} = \tau_{xy}\,\alpha_x + \sigma_y\,\alpha_y + \tau_{zy}\,\alpha_z \\ & f_{\rho,z} = \tau_{xz}\,\alpha_x + \tau_{yz}\,\alpha_y + \sigma_z\,\alpha_z \end{aligned} \tag{10.6}$$

Zapsáno maticově

$$\begin{vmatrix} f_{\rho,x} \\ f_{\rho,y} \\ f_{\rho,z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{vmatrix} \tag{10.7}$$

a symbolicky

$$\{f_\rho\} = [T_\sigma] \cdot \{\alpha\} \tag{10.8}$$

kde veličina $\boldsymbol{T_\sigma}$ **je tzv. tenzor napětí**, který je z důvodu platnosti věty o sdruženosti smykových napětí ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$ atd.) vyjádřen symetrickou maticí, obsahující 6 nezávislých prvků. Z matematického pohledu jde o symetrický tenzor druhého řádu.

Obecné napětí $\vec{f}_\rho$ má složku normálovou σ_ρ a smykovou τ_ρ, které získáme jako průměty do příslušných směrů pomocí skalárních součinů

$$\sigma_\rho = \vec{e}_\rho\, \vec{f}_\rho = \{\alpha\}^T\, \{f_\rho\} = \{\alpha\}^T\, [T_\sigma]\{\alpha\} \tag{10.9}$$

$$\tau_\rho = \vec{e}_\eta\, \vec{f}_\rho = \{\beta\}^T\, \{f_\rho\} = \{\beta\}^T\, [T_\sigma]\{\alpha\} \tag{10.10}$$

Smykové napětí můžeme vypočítat rovněž pomocí Pythagorovy věty

$$\tau_\rho = \sqrt{f_\rho^2 - \sigma_\rho^2} = \sqrt{f_{\rho,x}^2 + f_{\rho,y}^2 + f_{\rho,z}^2 - \sigma_\rho^2} \tag{10.11}$$

Z předchozích vztahů (10.8), (10.9) a (10.10) resp. (10.11) vyplývá, že obecné napětí f_ρ a jeho složky σ_ρ a τ_ρ v libovolném řezu ρ jsou určeny **tenzorem napětí** $\boldsymbol{T_\sigma}$.

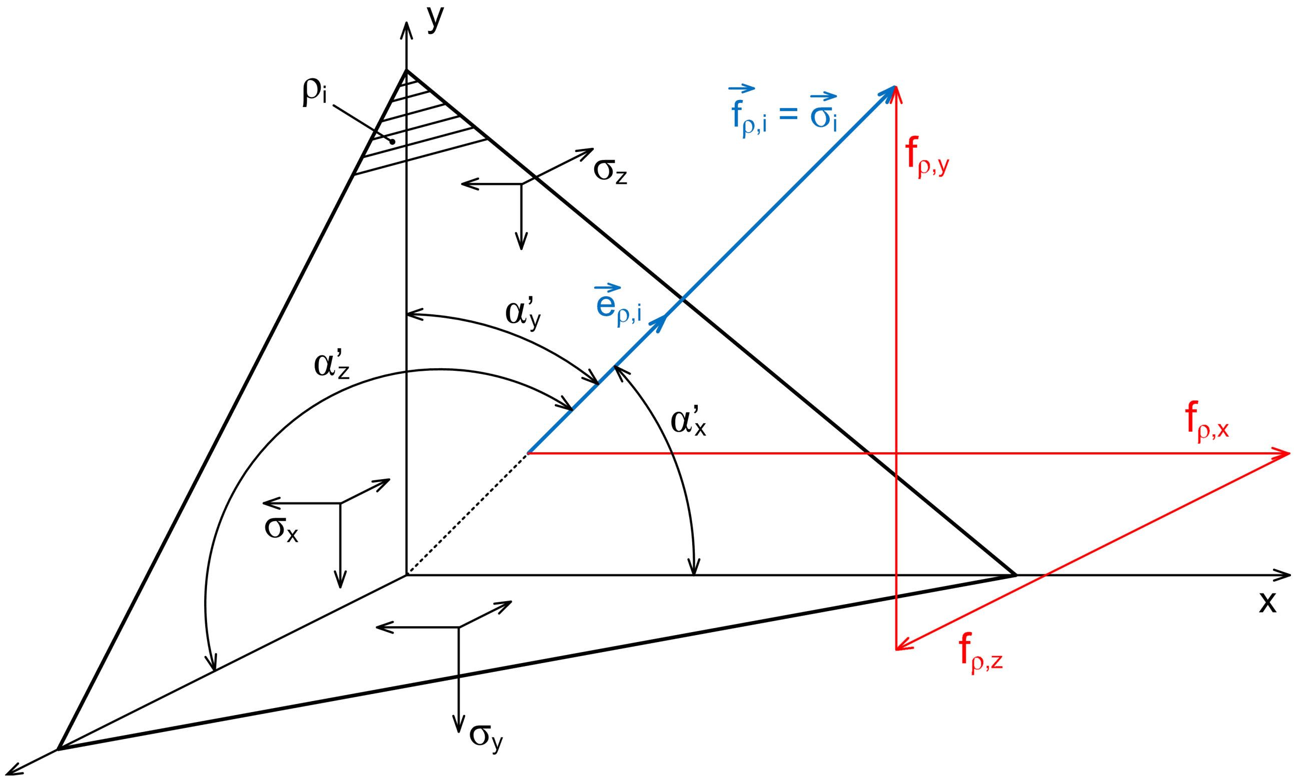
V souladu s úvodní definicí nám tedy tenzor napětí $\boldsymbol{T_\sigma}$ popisuje napjatost v okolí obecného bodu $\boldsymbol{A}$ tělesa.

Napjatost považujeme za **homogenní**, jestliže tenzory napětí T_σ ve všech bodech tělesa jsou stejné. Pokud jsou tenzory v bodech tělesa různé, jedná se o **nehomogenní** napjatost.

10.2 Hlavní roviny, hlavní napětí a hlavní směry

Definice: Hlavní rovina je taková rovina, kde nepůsobí smykové napětí. Příslušné normálové napětí se nazývá hlavním napětím a odpovídající směr hlavním směrem.

Předpokládejme nyní, že rovina ρ_i je rovinou hlavní, ve které působí hlavní napětí σ_i, viz obr.



Obecné napětí $\vec{f}_{\rho,i}$ je potom rovno normálovému, tj. hlavnímu napětí σ_i a má směr normály $\vec{e}_{\rho,i}$ hlavní roviny ρ_i

$$\vec{f}_{\rho,i} = \sigma_i \, \vec{e}_{\rho,i} \qquad \{f_{\rho,i}\} = \sigma_i \, \{\alpha_i\} \tag{10.12}$$

a pro jeho složky platí

$$f_{\rho,x} = \sigma_i \, \alpha_{x,i} \;\; ; \;\; f_{\rho,y} = \sigma_i \, \alpha_{y,i} \;\; ; \;\; f_{\rho,z} = \sigma_i \, \alpha_{z,i} \tag{10.13}$$

Po dosazení (10.13) do (10.6) a formální algebraické úpravě obdržíme soustavu rovnic (10.14), ke které připojíme známý vztah pro směrové kosiny

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i)\, \alpha_{x,i} + \tau_{yx}\, \alpha_{y,i} + \tau_{zx}\, \alpha_{z,i} = 0 \\ \tau_{xy}\, \alpha_{x,i} + (\sigma_y - \sigma_i)\, \alpha_{y,i} + \tau_{zy}\, \alpha_{z,i} = 0 \\ \tau_{xz}\, \alpha_{x,i} + \tau_{yz}\, \alpha_{y,i} + (\sigma_z - \sigma_i)\, \alpha_{z,i} = 0 \end{aligned} \tag{10.14}$$

$$\alpha_{x,i}^2 + \alpha_{y,i}^2 + \alpha_{z,i}^2 = 1 \tag{10.15}$$

Relace (10.14) představují soustavu homogenních lineárních rovnic pro stanovení směrových kosinů hlavní roviny ρ_i s hlavním napětím σ_i. Aby řešení nebylo triviální, tj. $\alpha_{x,i} = \alpha_{y,i} = \alpha_{z,i} = 0$, což je v rozporu s (10.15), musí být determinant soustavy (10.14) nulový, což znamená, že tyto tři rovnice jsou lineárně závislé

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0 \tag{10.16}$$

Vyčíslením determinantu obdržíme tzv. **charakteristickou rovnici (10.17)**

$$\sigma_i^3 - \Delta_1\, \sigma_i^2 + \Delta_2\, \sigma_i - \Delta_3 = 0 \tag{10.17}$$

kde $\boldsymbol{\Delta_1}$, $\boldsymbol{\Delta_2}$ a $\boldsymbol{\Delta_3}$ jsou tzv. invarianty tenzoru napětí $\boldsymbol{T_\sigma}$, jejichž hodnota se nemění při ortogonální transformaci souřadnicového systému

$$\Delta_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} \tag{10.18}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Hlavní napětí σ_i jsou potom kořeny kubické charakteristické rovnice (10.17). Je možné dokázat, že v tomto případě jsou všechny tři kořeny σ_I, σ_{II} a σ_{III} reálná čísla. Dále zavedeme nové číselné indexy 1, 2 a 3, tak, aby platila relace

$$\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \sigma_3 \tag{10.19}$$

Veličina $\boldsymbol{\sigma_1}$ se nazývá maximální hlavní napětí, $\boldsymbol{\sigma_2}$ je střední hlavní napětí a $\boldsymbol{\sigma_3}$ je minimální hlavní napětí.

Poloha příslušných hlavních směrů se stanoví pomocí vybraných dvou rovnic ze soustavy (10.14) a z rovnice (10.15). Pro hlavní směr 1, příslušející hlavnímu napětí σ_1, dostáváme soustavu rovnic

$$(\sigma_x - \sigma_1)\, \alpha_{x,1} + \tau_{yx}\, \alpha_{y,1} + \tau_{zx}\, \alpha_{z,1} = 0$$

$$\tau_{xy}\, \alpha_{x,1} + (\sigma_y - \sigma_1)\, \alpha_{y,1} + \tau_{zy}\, \alpha_{z,1} = 0 \tag{10.20}$$

$$\alpha^2_{x,1} + \alpha^2_{y,1} + \alpha^2_{z,1} = 1$$

Ze které vypočteme směrové kosiny $\alpha_{x,1}$, $\alpha_{y,1}$, $\alpha_{z,1}$ směru 1

Analogicky postupujeme při stanovení směrových kosinů $\alpha_{x,2}$, $\alpha_{y,2}$, $\alpha_{z,2}$ hlavního směru 2 a směrových kosinů $\alpha_{x,3}$, $\alpha_{y,3}$, $\alpha_{z,3}$ hlavního směru 3.

Pokusme se nyní stanovit vzájemnou polohu směrů hlavních směrů 1, 2 a 3. Pro tento účel využijeme rovnic (10.12) a (10.8)

$$\{f_{\rho,i}\} = \sigma_i \{\alpha_i\} = [T_\sigma] \{\alpha_i\} \tag{10.21}$$

Rovnici (10.21) nyní aplikujme na hlavní napětí σ_1 a potom na σ_2

$$\sigma_1 \{\alpha_1\} = [T_\sigma] \{\alpha_1\} \qquad / \ \{\alpha_2\}^T$$

$$\sigma_1 \{\alpha_2\}^T \{\alpha_1\} = \{\alpha_2\}^T [T_\sigma] \{\alpha_1\} \tag{10.22}$$

$$\sigma_2 \{\alpha_2\} = [T_\sigma] \{\alpha_2\} \qquad / \ \{\alpha_1\}^T$$

$$\sigma_2 \{\alpha_1\}^T \{\alpha_2\} = \{\alpha_1\}^T [T_\sigma] \{\alpha_2\} \tag{10.23}$$

Když odečteme rovnici (10.23) od rovnice (10.22) obdržíme po úpravě

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \{\alpha_2\}^T \{\alpha_1\} = 0$$

Analog.

$$(\sigma_2 - \sigma_3) \{\alpha_3\}^T \{\alpha_2\} = 0 \tag{10.24}$$

$$(\sigma_3 - \sigma_1) \{\alpha_1\}^T \{\alpha_3\} = 0$$

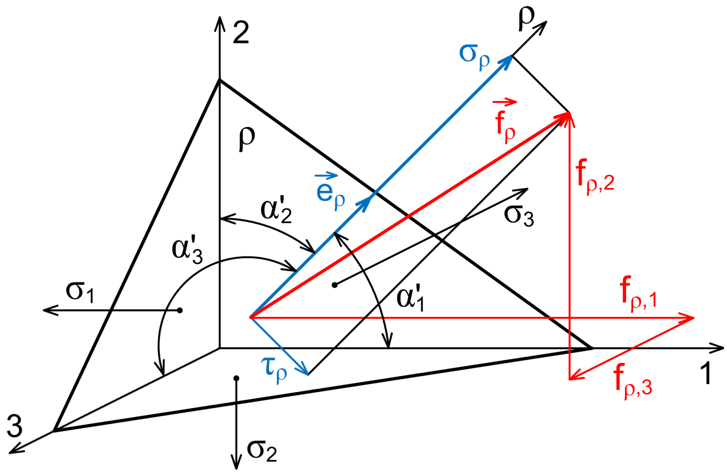
Z předchozích vztahů plyne, že pokud velikost dvou hlavních napětí je stejná, musí být vzájemná poloha odpovídajících hlavních směrů kolmá. V případě rovnosti hlavních napětí může být vzájemný úhel odpovídajících hlavních směrů jakýkoliv a tedy může být i kolmý.
Z této analýzy vyplývá, že v bodě tělesa A lze vždy vést tři navzájem kolmé hlavní směry 1, 2 a 3 ve kterých působí hlavní napětí σ_1, σ_2 a σ_3.

Napjatost v bodě tělesa můžeme tedy vyjádřit pomocí hlavních napětí $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$ a $\boldsymbol{\sigma_3}$ působících v třech vzájemně kolmých hlavních směrech, jejichž poloha je určena třemi nezávislými směrovými kosiny. Tato skutečnost souvisí s existencí tří podmínek pro součet čtverců směrových kosinů a tří podmínek ortogonality pro použitý hlavní pravoúhlý souřadnicový systém.

Odvozené vztahy nám nyní dovolují přejít z obecného souřadnicového systému x, y a z k hlavnímu souřadnicovému systému 1, 2 a 3, ve kterém má tenzor napětí T_σ pouze tři nenulové členy v podobě hlavních napětí σ_1, σ_2 a σ_3, ležících na hlavní diagonále. Tato skutečnost vede ke značnému zjednodušení matematických formulací, což využijeme v dalších kapitolách.

10.3 Hlavní souřadnicový systém, vztahy pro obecné napětí a jeho složky

Naším cílem je nyní stanovit obecné napětí $\vec{f}_\rho$ a jeho složky σ_ρ a τ_ρ v obecném řezu ρ, jehož poloha je určena směrovými kosiny α_1, α_2 a α_3, viz obr.



V hlavním souřadnicovém systému platí formálně stejné vztahy, které byly odvozeny pro obecný souřadnicový systém. Při určení obecného napětí $\vec{f}_\rho$ vyjdeme z rovnice (10.8)

$$\{f_\rho\} = [T_\sigma]\,\{\alpha\}$$

Vyjádřeno maticově

$$\begin{vmatrix} f_{\rho,1} \\ f_{\rho,2} \\ f_{\rho,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} \qquad (10.25)$$

Složky obecného napětí jsou potom rovny

$$f_{\rho,1} = \sigma_1\alpha_1 \qquad f_{\rho,2} = \sigma_2\alpha_2 \qquad f_{\rho,3} = \sigma_3\alpha_3 \qquad (10.26)$$

Pro velikost obecného napětí f_ρ dostáváme vztah

$$f_\rho = \sqrt{\sigma_1^2\alpha_1^2 + \sigma_2^2\alpha_2^2 + \sigma_3^2\alpha_3^2} \tag{10.27}$$

Normálové napětí je dáno průmětem obecného napětí f_ρ do normály roviny, což realizujeme pomocí skalárního součinu

$$\sigma_\rho = \{\alpha\}^T \{f_\rho\} = |\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3| \cdot \begin{vmatrix} \sigma_1\alpha_1 \\ \sigma_2\alpha_2 \\ \sigma_3\alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_\rho = \sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2 \tag{10.28}$$

Smykové napětí τ_ρ v obecné rovině ρ potom vypočteme pomocí Pythagorovy věty

$$\tau_\rho = \sqrt{f_\rho^2 - \sigma_\rho^2} =$$

$$= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2\alpha_1^2\alpha_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\alpha_2^2\alpha_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\alpha_3^2\alpha_1^2} \tag{10.29}$$

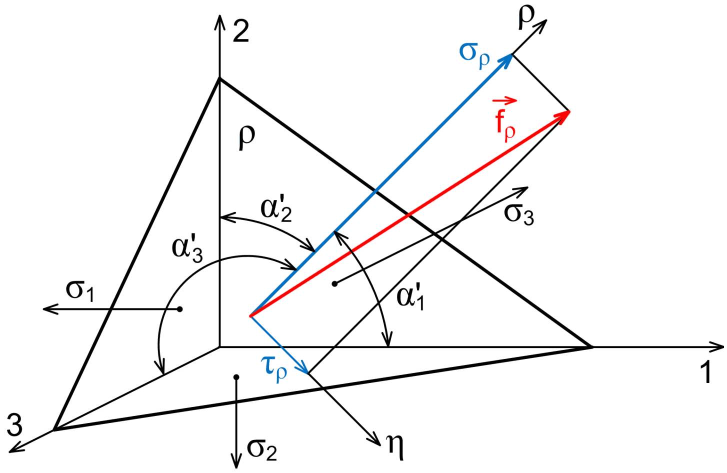
V teorii plasticity hraje významnou roli tzv. **oktaedrická rovina**, jejíž normála svírá se souřadnicovými osami stejný úhel. Příslušné smykové napětí τ_o dostaneme dosazením odpovídajících směrových kosinů $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ do předchozí rovnice

$$\tau_o = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \tag{10.30}$$

10.4 Znázornění napjatosti v Mohrově rovině, Mohrovy kružnice

Jedním z atributů symetrických tenzorů druhého řádu, jakým je tenzor napětí T_σ, je možnost grafického znázornění příslušného stavu (napjatosti), v našem případě v Mohrově rovině σ_ρ, τ_ρ. Za účelem odvození potřebných vztahů řešme nyní následující inversní úlohu:

Napjatost je dána hlavními napětími $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Dále jsou dána dvě čísla, která představují normálové napětí σ_ρ a smykové napětí τ_ρ v obecném řezu ρ. Máme zjistit, zda taková rovina reálně existuje a v kladném případě stanovit její polohu. Úlohu řešíme v hlavním souřadnicovém systému 1,2 a 3.



Pro matematickou formulaci úlohy využijeme rovnice (10.27) a (10.28), doplněné o známý vztah pro součet čtverců směrových kosinů

$$\sigma_1^2\alpha_1^2 + \sigma_2^2\alpha_2^2 + \sigma_3^2\alpha_3^2 = f_\rho^2 = \sigma_\rho^2 + \tau_\rho^2$$

$$\sigma_1\alpha_1^2 + \sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2 = \sigma_\rho \qquad (10.31)$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

Jde o soustavu 3 lineárních rovnic pro stanovení čtverců směrových kosinů α_1^2, α_2^2 a α_3^2, které lze vypočítat např. Cramerovým pravidlem

$$\alpha_1^2 = \frac{D_1}{D_S} = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_\rho^2 + \tau_\rho^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_\rho & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Po provedené algebraické úpravě obdržíme

$$\alpha_1^2 = \frac{D_1}{D_S} = \frac{\tau_\rho^2 + (\sigma_\rho - \sigma_2)(\sigma_\rho - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

Analog.
$$\alpha_2^2 = \frac{D_2}{D_S} = \frac{\tau_\rho^2 + (\sigma_\rho - \sigma_1)(\sigma_\rho - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \qquad (10.32)$$

$$\alpha_3^2 = \frac{D_3}{D_S} = \frac{\tau_\rho^2 + (\sigma_\rho - \sigma_1)(\sigma_\rho - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Pro čtverce směrových kosinů platí následující vztahy:

$$0 \leqq \alpha_1^2 \leqq 1 \qquad 0 \leqq \alpha_2^2 \leqq 1 \qquad 0 \leqq \alpha_3^2 \leqq 1 \qquad (10.33)$$

Předpokládáme-li relaci $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, potom pro splnění levých nerovností v předchozím vztahu (10.33) musí v souladu s (10.32) platit

$$\tau_\rho^2 + (\sigma_\rho - \sigma_2)(\sigma_\rho - \sigma_3) \geqq 0 \qquad \tau_\rho^2 + (\sigma_\rho - \sigma_1)(\sigma_\rho - \sigma_3) \leqq 0$$

$$\tau_\rho^2 + (\sigma_\rho - \sigma_1)(\sigma_\rho - \sigma_2) \geqq 0 \qquad (10.34)$$

První ze vztahů (10.34) lze formálně upravit následovně

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho(\sigma_2 + \sigma_3) + \tau_\rho^2 + \sigma_2\sigma_3 \geqq 0$$

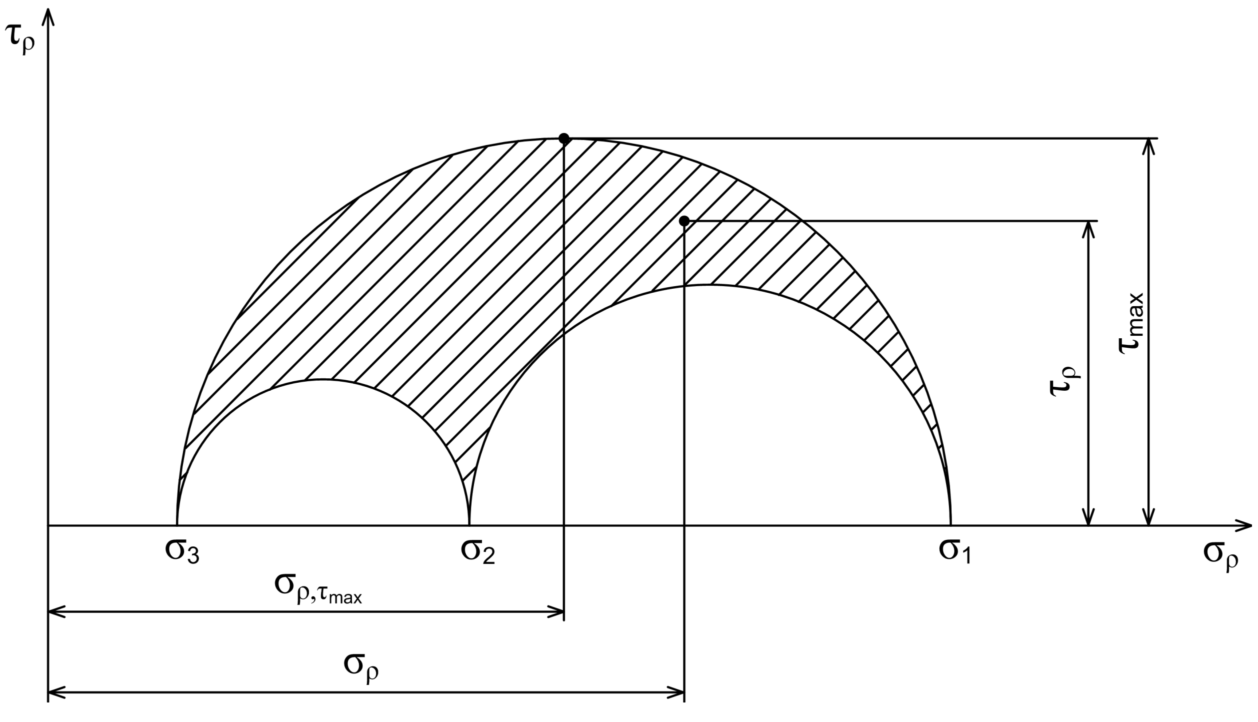
$$\left(\sigma_\rho - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_\rho^2 - \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \sigma_2\sigma_3 \geqq 0$$

$$\left(\sigma_\rho - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_\rho^2 \geqq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

Analog.
$$\left(\sigma_\rho - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_\rho^2 \leqq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \qquad (10.35)$$

$$\left(\sigma_\rho - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_\rho^2 \geqq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

Rovnice (10.35) vymezují v Mohrově rovině σ_ρ, τ_ρ oblast mezi tzv. Mohrovými kružnicemi. Pravé strany nerovností (10.33), které jsme zde neuplatnili, tuto skutečnost neovlivňují (viz skripta).



Oblast mezi Mohrovými kružnicemi, včetně nich znázorňuje složky napětí σ_ρ, τ_ρ ve všech řezech ρ, které můžeme bodem tělesa vést, graficky tedy vyjadřuje napjatost v bodě tělesa.

Z obrázku názorně vyplývají vztahy pro maximální normálové napětí $\sigma_{\rho,max}$ a $\tau_{\rho,max}$

$$\sigma_{\rho,max} = \sigma_1 \qquad \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{10.36}$$

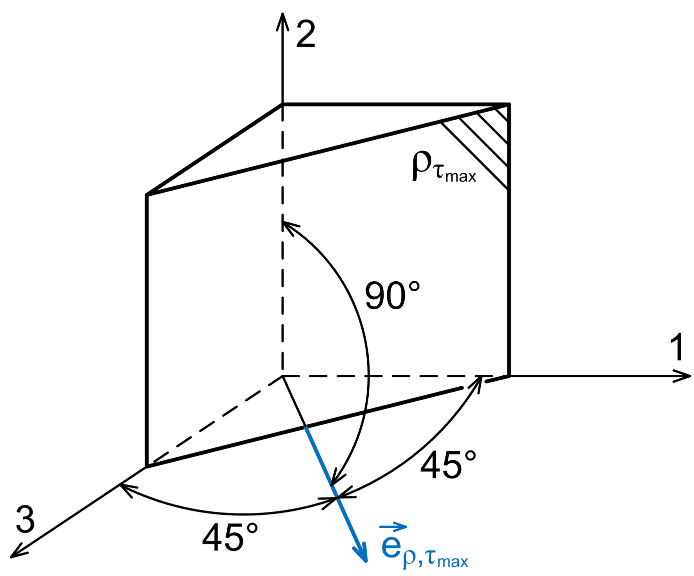
V rovině maximálního smykového napětí působí rovněž normálové napětí $\sigma_{\rho,\tau_{max}}$

$$\sigma_{\rho,\tau_{max}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \tag{10.37}$$

Polohu roviny maximálního smykového napětí lze vypočítat dosazením $\tau_{\rho,max}$ a $\sigma_{\rho,\tau_{max}}$ do rovnic (10.32)

$$\alpha_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \alpha_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

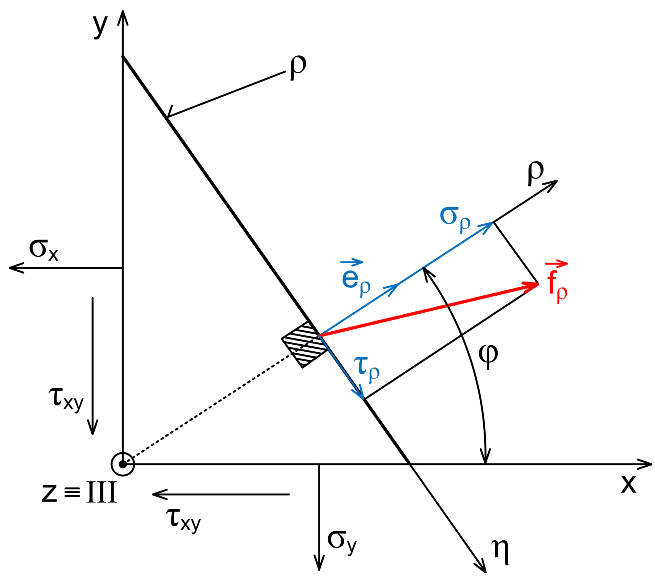
Vektor normály roviny maximálního smykového napětí $\tau_{\rho,max}$ je symetrálou hlavních směrů 1 a 3, viz obr.



10.5 Zvláštní případy napjatosti

10.5.1 Rovinná napjatost

Při rovinné napjatosti je jednou z hlavních napětí rovno nule. V našem případě nechť $\sigma_{III} = \sigma_z = 0$. Do hlavního směru III vložíme obecnou souřadnicovou osu z. Hledejme nyní obecné napětí $\vec{f_\rho}$ a jeho složky σ_ρ a τ_ρ v řezu ρ, rovnoběžném s osou z, jehož normála $\vec{e_\rho}$ svírá s osou x úhel φ, viz obrázek. Smykové napětí τ_ρ v řezu ρ přitom považujeme za kladné, otáčí-li elementem v řezu ve směru hodinových ručiček.



Jelikož směr z je směrem hlavním, platí pro složky napětí v příslušné hlavní rovině

$$\sigma_z = \sigma_{III} = 0 \qquad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \tag{10.38}$$

a tenzor napětí T_σ má v tomto případě tvar

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{10.39}$$

Obecné napětí f_ρ a jeho složky vypočteme aplikací obecného vztahu (10.8) - $\{f_\rho\} = [T_\sigma]\ \{\alpha\}$, který musí platit i pro rovinnou napjatost

$$\begin{vmatrix} f_{\rho,x} \\ f_{\rho,y} \\ f_{\rho,z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix} \tag{10.40}$$

Složky obecného napětí jsou rovny

$$\begin{aligned} f_{\rho,x} &= \sigma_x \cos\varphi + \tau_{xy} \sin\varphi \\ f_{\rho,y} &= \tau_{xy} \cos\varphi + \sigma_y \sin\varphi \\ f_{\rho,z} &= 0 \end{aligned} \tag{10.41}$$

a velikost obecného napětí f_ρ stanovíme pomocí Pythagorovy věty

$$f_\rho = \sqrt{f_{\rho,x}^2 + f_{\rho,y}^2} =$$

$$= \sqrt{(\sigma_x \cos\varphi + \tau_{xy} \sin\varphi)^2 + (\tau_{xy} \cos\varphi + \sigma_y \sin\varphi)^2} \tag{10.42}$$

Normálové napětí σ_ρ získáme jako průmět obecného napětí $\vec{f_\rho}$ do směru normály řezu $\vec{e_\rho}$ pomocí skalárního součinu

$$\sigma_\rho = \{\alpha\}^T \ \{f_\rho\} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sigma_x \cos\varphi + \tau_{xy} \sin\varphi \\ \tau_{xy} \cos\varphi + \sigma_y \sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \sigma_x \cos^2\varphi + 2\tau_{xy} \sin\varphi \cos\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi =$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \tag{10.43}$$

Smykové napětí τ_ρ představuje průmět obecného napětí $\vec{f}_\rho$ do tečného směru η definovaného směrovými kosiny $\{\beta\}$:

$$\{\beta\} = |\cos(90-\varphi) \quad \cos(180-\varphi)|^T = |\sin\varphi \quad -\cos\varphi|^T$$

$$\tau_\rho = \left| \sin\varphi \;\; -\cos\varphi \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \sigma_x \cos\varphi + \tau_{xy}\sin\varphi \\ \\ \tau_{xy}\cos\varphi + \sigma_y \sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \sigma_x \sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}\sin^2\varphi - \tau_{xy}\cos^2\varphi - \sigma_y\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi - \tau_{xy}\cos 2\varphi \tag{10.44}$$

Poloha hlavního směru I se určí z definice příslušné hlavní roviny

$$\tau_\rho = 0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi_I - \tau_{xy}\cos 2\varphi_I$$

$$\tan 2\varphi_I = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad \varphi_I = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{10.45}$$

Odpovídající hlavní napětí σ_I potom odpovídá normálovému napětí v této hlavní rovině

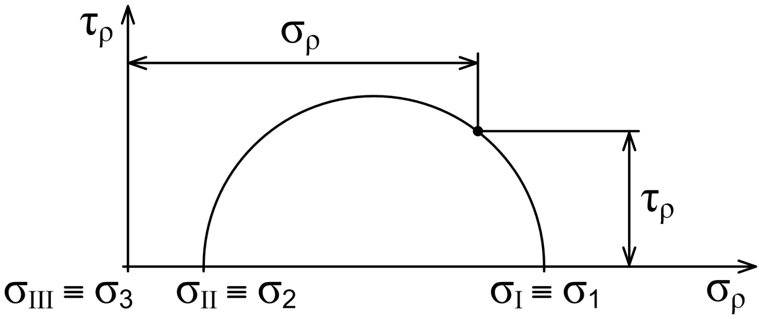
$$\sigma_I = \sigma_\rho(\varphi = \varphi_I) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi_I - \tau_{xy}\sin 2\varphi_I \tag{10.46}$$

Hlavní směr II je k hlavnímu směru I kolmý, tedy $\varphi_{II} = \varphi_I + \frac{\pi}{2}$ a příslušné hlavní napětí φ_{II} je rovno

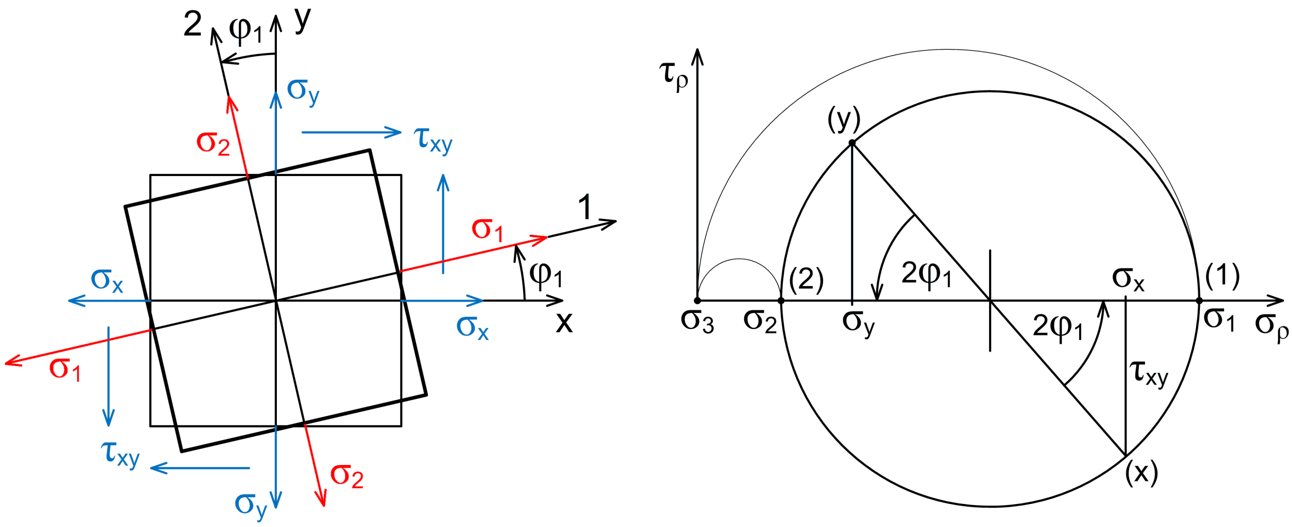
$$\sigma_{II} = \sigma_\rho(\varphi = \varphi_{II}) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi_{II} - \tau_{xy}\sin 2\varphi_{II} \tag{10.47}$$

Rovnice (10.46) a (10.47) představují v Mohrově rovině rovnici kružnice. Úhlu φ mezi dvěma směry resp. mezi dvěma řezy ρ a ρ' odpovídá dvojnásobný směrový úhel 2φ na Mohrově kružnici.

Příslušnou Mohrovu kružnici můžeme nakreslit buď pomocí vypočtených nenulových hlavních napětí σ_I a σ_{II},



nebo graficky, pomocí složek napětí ve dvou vzájemně kolmých řezech x a y

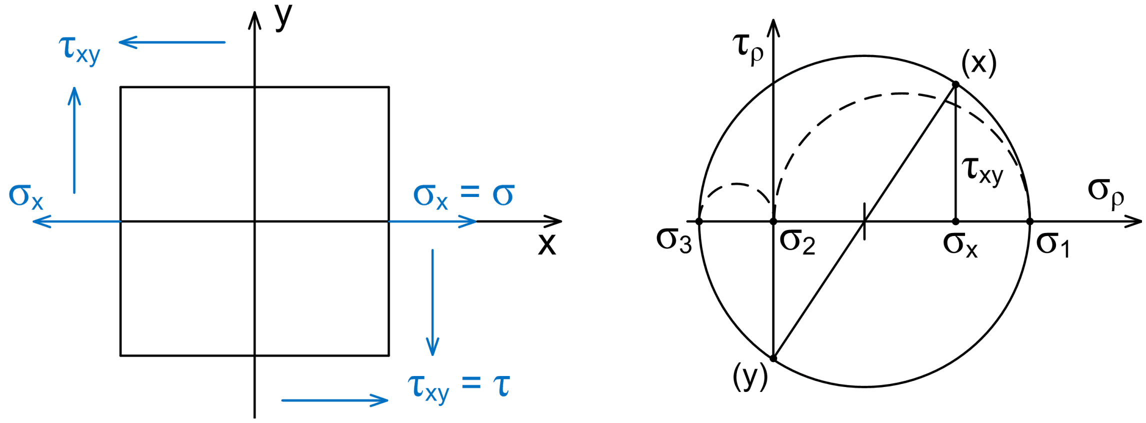


Po stanovení obou nenulových hlavních napětí σ_I a σ_{II} zavedeme nové označení pomocí arabských číslic 1, 2 a 3 tak, aby byla splněna pro nás již známá relace $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. V příkladu uvedeném na předchozím obrázku dostáváme pro nenulová hlavní napětí σ_1 a σ_2 následující vztah

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (10.48)$$

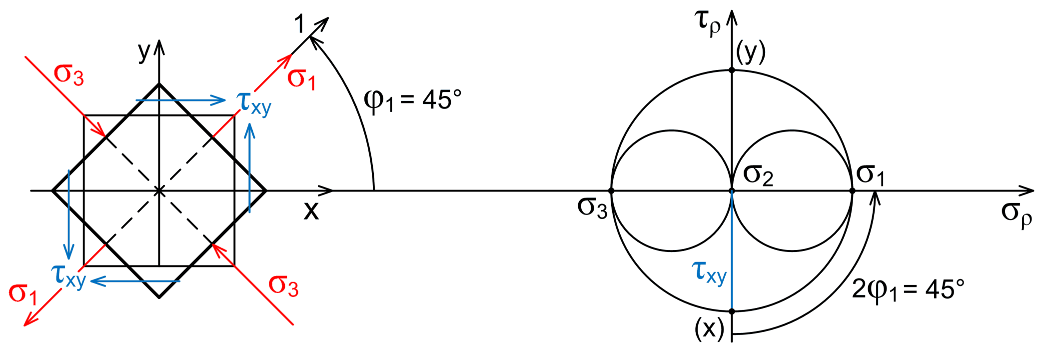
10.5.2 Prutová napjatost a prostý smyk

Jde o specifické případy **rovinné napjatosti**. U **prutové napjatosti** je element zatížen následovně



$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \tag{10.49}$$

U prostého smyku je jediným nenulovým napětím smykové napětí $\tau_{xy} = \tau$. Zatížení elementu a odpovídající Mohrova kružnice vypadají následovně



Pro nenulová hlavní napětí σ_1 a σ_3 platí

$$\sigma_{1,3} = \pm\tau_{xy} = \pm\tau \tag{10.50}$$

Hlavní směry 1,2 přitom svírají se základními osami x,y úhel $45°$.

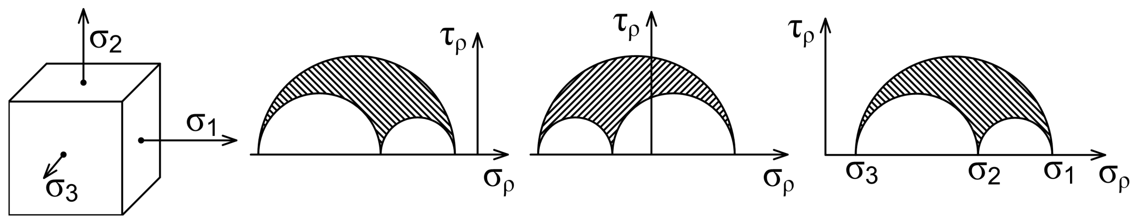
10.6 Klasifikace napjatosti

Typ napjatosti závisí na hodnotách hlavních napětí. Při našich úvahách stále předpokládáme platnost relace $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

a) Trojosá (prostorová) napjatost - 3D. Všechna tři hlavní napětí jsou nenulová

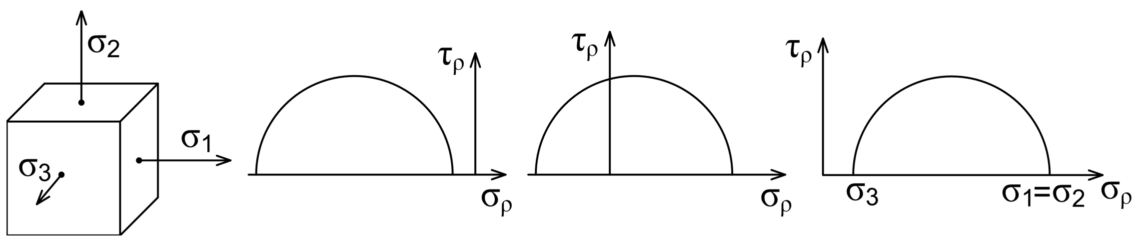
- obecná

Všechna hlavní napětí jsou vzájemně různá, tedy $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$



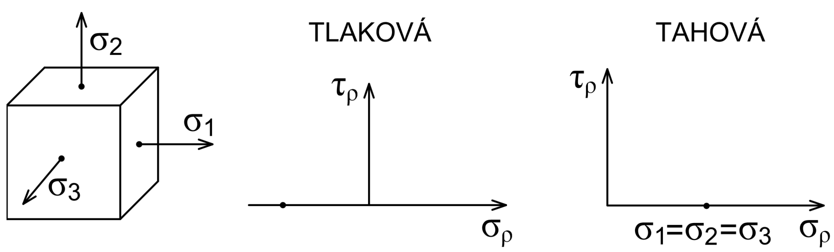
- polorovnoměrná

Dvě hlavní napětí jsou stejná



- rovnoměrná

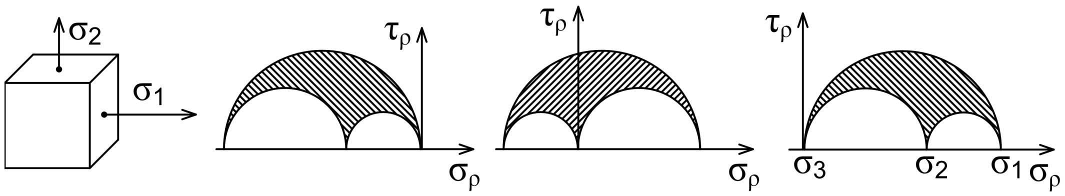
Všechna hlavní napětí jsou stejná $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$



b) Dvojosá (rovinná) napjatost - 2D. Jedno hlavní napětí je nulové, $\sigma_i = 0$

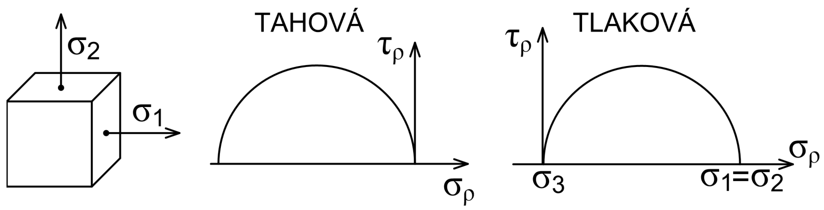
- obecná

Obě nenulová hlavní napětí jsou vzájemně různá



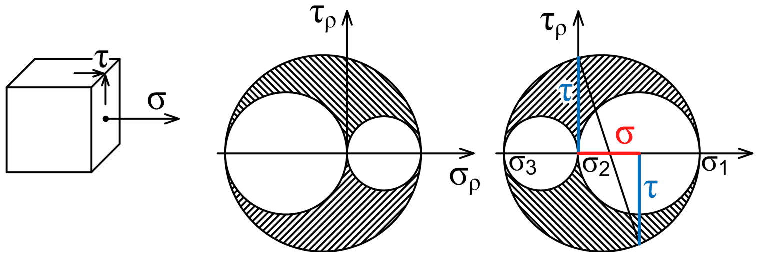
- rovnoměrná

Obě nenulová hlavní napětí jsou stejná



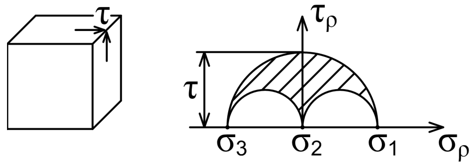
- prutová

Napjatost je určena složkami napětí σ a τ na jedné stěně elementu



- smyková

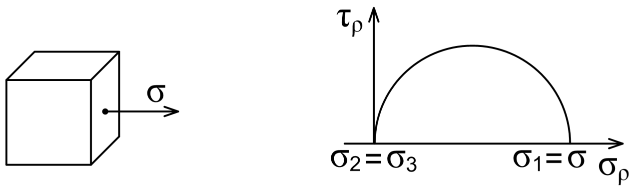
Na element působí pouze smykové napětí τ



c) Jednoosá (přímková) napjatost - 1D. Dvě hlavní napětí jsou nulová

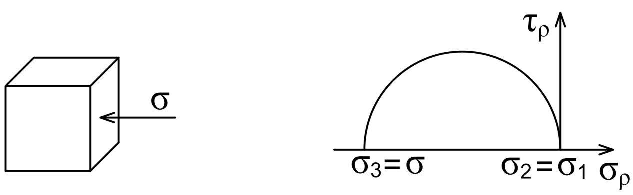
- tahová

Nenulové hlavní napětí je tahové



- tlaková

Nenulové hlavní napětí je tlakové



11 MEZNÍ STAVY MATERIÁLU

Omezíme se na podmínku **mezního stavu pružnosti pro materiál ve stavu tvárném** a podmínku **mezního stavu křehké pevnosti pro materiál ve stavu křehkém**.

11.1 Mezní stav pružnosti

Jde o takový mezní stav (MS), po jehož překročení vznikají v bodě tělesa první plastické deformace. Příslušná podmínka se v literatuře nazývá také **podmínka plasticity**.

Při její formulaci vyjdeme ze základního poznatku teorie dislokací, dle kterého k plastické deformaci dochází, **jestliže smykové napětí v určité (vhodné) krystalografické skluzové rovině dosáhne kritické hodnoty τ_{krit}.** Přeneseme-li tuto myšlenku do prostředí mechaniky kontinua, lze tvrdit, že o vzniku plastických deformací rozhoduje smykové napětí v jisté **charakteristické rovině**.

11.1.1 Podmínka plasticity maximálního smykového napětí τ_{max}

V tomto případě je onou charakteristickou rovinou **rovina maximálního smykového napětí τ_{max}.** Jde přitom o prvotní podmínku plasticity při monotonním zatěžování z nezatíženého stavu. Příslušnou podmínku lze slovně vyjádřit následovně:

Mezního stavu pružnosti je dosaženo, jestliže maximální smykové napětí τ_{max} dosáhne mezní hodnoty τ_{MK}, která je materiálovou charakteristikou. Nezávisí tedy na stavu napjatosti a lze ji proto stanovit na základě tahové zkoušky.

Vyjádřeno matematicky s následnou aplikací známého vztahu (10.36) pro maximální smykové napětí $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

$$\tau_{max} = \tau_{MK} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{11.1}$$

Tento vztah nyní v souladu s předchozím postulátem aplikujeme na zkoušku tahem

$$\sigma_1 = \sigma_K \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \tag{11.2}$$

Po dosazení (11.2) do (11.1) obdržíme relaci pro mezní napětí τ_{MK}

$$\tau_{MK} = \frac{\sigma_K}{2} \tag{11.3}$$

které dosadíme do (11.1), čímž získáme po jednoduché algebraické úpravě **finální podmínku plasticity $\boldsymbol{\tau_{max}}$** v bodě tělesa. Přitom předpokládáme platnost relace $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

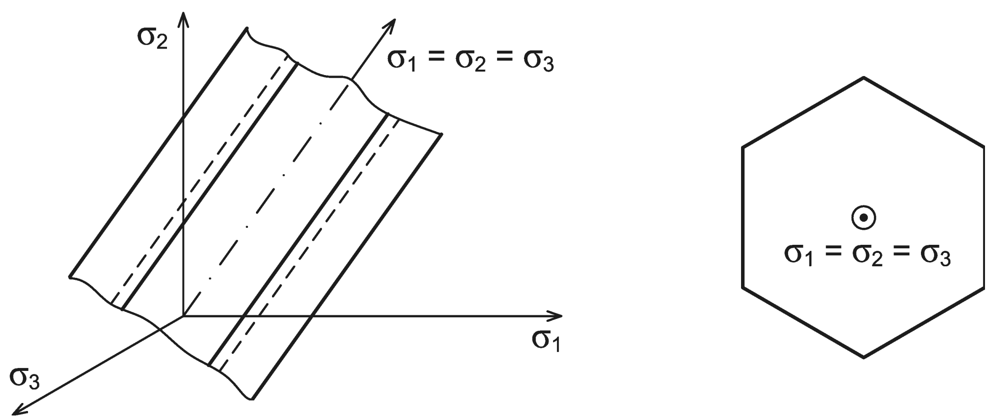
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_K \tag{11.4}$$

V literatuře je tato podmínka někdy označována jako **Trescova podmínka plasticity** dle původního autora. Jejím zajímavým rysem je skutečnost, že nezávisí na velikosti středního hlavního napětí σ_2.

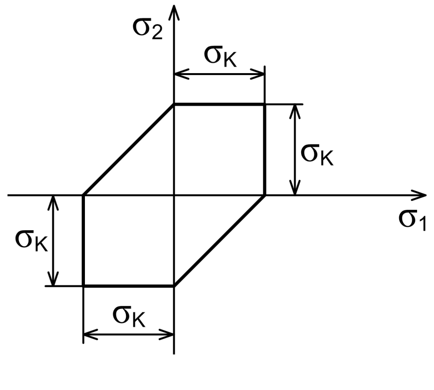
Předchozí podmínku je možné graficky vyjádřit v **Haighově prostoru hlavních napětí $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$ a $\boldsymbol{\sigma_3}$**. Při grafickém znázornění není splněna podmínka $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. V závislosti na poloze příslušného bodu v Haighově prostoru je možné formulovat šest následujících podmínek

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &\leqq \sigma_K \qquad & \sigma_2 - \sigma_1 &\leqq \sigma_K \\ \sigma_2 - \sigma_3 &\leqq \sigma_K \qquad & \sigma_3 - \sigma_2 &\leqq \sigma_K \\ \sigma_3 - \sigma_1 &\leqq \sigma_K \qquad & \sigma_1 - \sigma_3 &\leqq \sigma_K \end{aligned} \tag{11.5}$$

z nichž každá představuje rovinu a spolu vytvářejí povrch šestibokého hranolu s osou v symetrále prostoru $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, viz obrázek

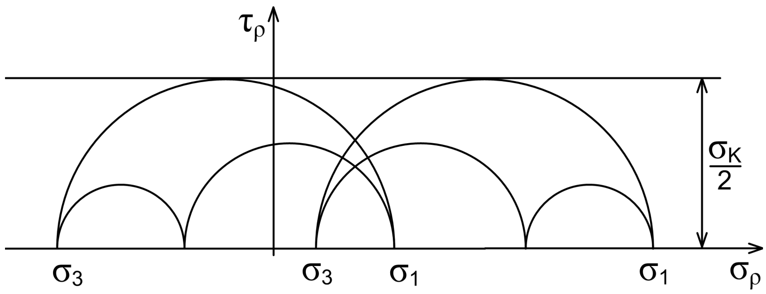


Pro rovinnou napjatost $(\sigma_3 = 0)$ obdržíme mezní křivku ve tvaru šestiúhelníka, který vznikne jako průsečnice mezní plochy (hranolu) se souřadnicovou plochou σ_1, σ_2.



Podmínku plasticity $\boldsymbol{\tau_{max}}$ lze rovněž graficky vyjádřit v **Mohrově rovině $\boldsymbol{\sigma_\rho}$, $\boldsymbol{\tau_\rho}$** formou mezní přímky ve vzdálenosti $\frac{\sigma_K}{2}$, jak plyne z rovnice (11.4) vydělené dvěma

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_K}{2} \tag{11.6}$$



Maximální Mohrovy kružnice se při dosažení MS pružnosti této mezní přímky dotýkají.

V případě **prutové napjatosti** má s ohledem na vztah (10.49) pro hlavní napětí $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$ **podmínka plasticity $\boldsymbol{\tau_{max}}$** následující tvar

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_K \tag{11.7}$$

U **smykové napjatosti** vypadá podmínka plasticity následovně

$$\tau = \tau_K \tag{11.8}$$

kde veličina τ_K se nazývá **mez kluzu ve smyku**.

S ohledem na relaci (10.50) pro hlavní napětí - $\sigma_{1,3} = \pm\tau$ dostáváme následující relaci pro mez kluzu ve smyku dle podmínky **plasticity $\boldsymbol{\tau_{max}}$**

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau = 2\tau_K = \sigma_K \;\Rightarrow\; \tau_K = \frac{\sigma_K}{2} \tag{11.9}$$

11.1.2 Podmínka plasticity oktaedrického smykového napětí τ_{okt}

V tomto případě je onou charakteristickou rovinou rovina oktaedrická se smykovým napětí τ_o. Jde opět o prvotní podmínku plasticity při monotonním zatěžování z nezatíženého stavu. Příslušnou podmínku lze slovně vyjádřit následovně:

Mezního stavu pružnosti je dosaženo, jestliže oktaedrické smykové napětí τ_o dosáhne mezní hodnoty τ_{OK}, která je materiálovou charakteristikou. Nezávisí tedy na stavu napjatosti a lze ji proto stanovit na základě tahové zkoušky.

Vyjádřeno matematicky s následnou aplikací vztahu (10.30) pro oktaedrické smykové napětí $\tau_o = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$

$$\tau_o = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \tau_{OK} \tag{11.10}$$

Tento vztah nyní v souladu s předchozím postulátem aplikujeme na zkoušku tahem

$$\sigma_1 = \sigma_K \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \tag{11.11}$$

Po dosazení (11.11) do (11.10) obdržíme relaci pro mezní napětí τ_{OK}

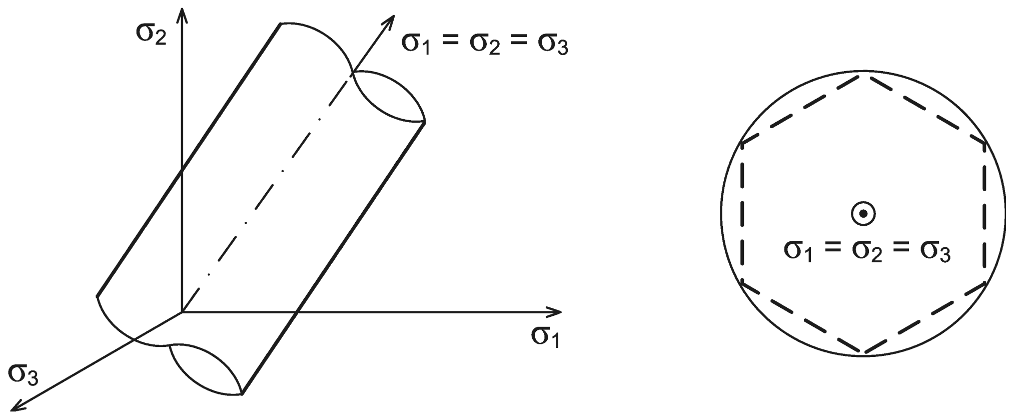
$$\frac{\sqrt{2}}{3}\,\sigma_K = \tau_{OK} \tag{11.12}$$

které dosadíme do (11.10), čímž získáme po jednoduché algebraické úpravě finální **podmínku plasticity τ_{okt}** v bodě tělesa.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_K \tag{11.13}$$

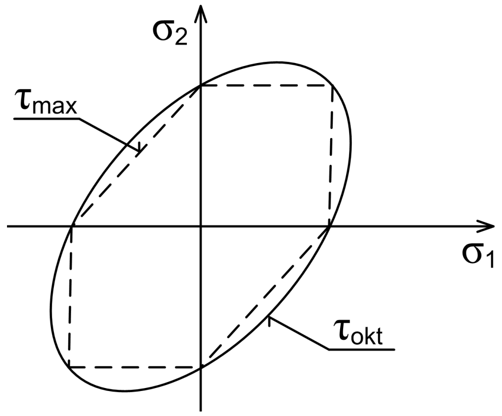
V literatuře je tato podmínka někdy označována podle autorů jako podmínka HMH (Hencky, Mises, Huber), případně jako podmínka Misesova.

Předchozí podmínku (11.13) je možné opět graficky vyjádřit v **Haighově prostoru hlavních napětí $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$ a $\boldsymbol{\sigma_3}$**. Vztah (11.13) po umocnění představuje rovnici válcové plochy s osou v symetrále Haighova prostoru $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, viz obrázek



Válcová mezní plocha plasticity dle podmínky τ_{okt} je opsána mezní ploše ve tvaru šestibokého hranolu, příslušející předchozí podmínce plasticity τ_{max}.

Pro rovinou napjatost $(\sigma_3 = 0)$ obdržíme mezní křivku ve tvaru elipsy, která vznikne jako průsečnice mezní plochy (válce) se souřadnicovou plochou σ_1, σ_2. Tato křivka je opět opsána mezní křivce ve tvaru šestiúhelníka, příslušející podmínce plasticity τ_{max}.



Za účelem grafického vyjádření podmínky plasticity τ_{okt} v Mohrově rovině zavádíme tzv. **Lodeho parametr $\boldsymbol{\mu_\sigma}$**, vyjadřující velikost středního hlavního napětí σ_2 následovně

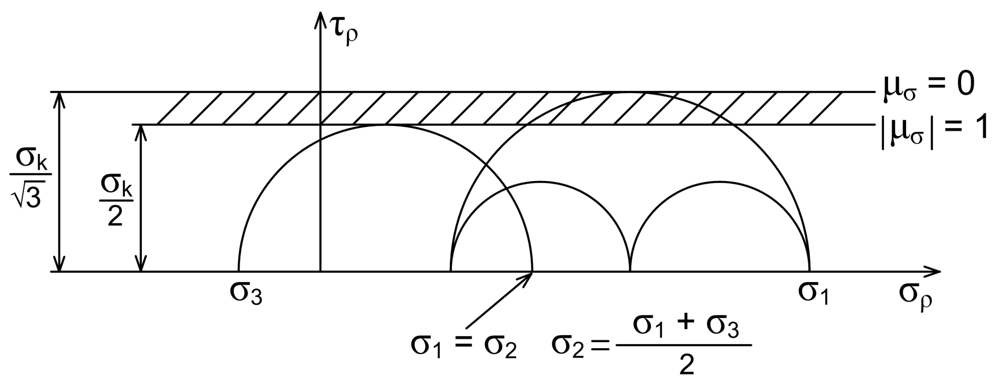
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \mu_\sigma \, \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \qquad (11.14)$$

Vyjádříme-li σ_2 v podmínce (11.13) pomocí Lodeho parametru dle (11.14), dospějeme po algebraické úpravě k formálně jednoduššímu tvaru podmínky plasticity τ_{okt}

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\sigma_K}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \qquad (11.15)$$

pomocí kterého, po vydělení dvěma můžeme parametrickou formou graficky znázornit podmínku plasticity τ_{okt} v Mohrově rovině

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_K}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \qquad (11.16)$$



Z porovnání vztahů (11.4) a (11.15) vyplývá, že největší rozdíl mezi podmínkami plasticity τ_{okt} a τ_{max} je v případě $\mu_\sigma = 0$ $\left(\sigma_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)$, kdy na pravé straně rovnice (11.15) vystupuje $1,155\ \sigma_K$, což představuje rozdíl mezi oběma podmínkami 15,5%. V případě $|\mu_\sigma| = 1$ jsou obě podmínky plasticity shodné.

V případě **prutové napjatosti** s ohledem na vztah (10.49) pro hlavní napětí

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

a s uvážením $\sigma_2 = 0$ po dosazení do (11.13) má **podmínka plasticity $\boldsymbol{\tau_{okt}}$** následující tvar

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_K \tag{11.17}$$

U **smykové napjatosti** vypadá podmínka plasticity následovně

$$\tau = \tau_K \tag{11.18}$$

kde veličina $\boldsymbol{\tau_K}$ se nazývá **mez kluzu ve smyku**.

Po dosazení (11.18) do (11.17), s uvážením $\sigma = 0$ dostáváme po jednoduché formální úpravě následující relaci pro mez kluzu ve smyku τ_K dle podmínky **plasticity $\boldsymbol{\tau_{okt}}$**

$$\tau_K = \frac{\sigma_K}{\sqrt{3}} \tag{11.19}$$

11.2 Mezní stav křehké pevnosti

Jde o takový mezní stav (MS), po jehož dosažení je celistvost tělesa porušena křehkým lomem.

Při matematické formulaci podmínky MS křehké pevnosti vyjdeme z poznatků lomové mechaniky. Křehký lom vzniká iniciací a rychlým šířením trhliny, vytvářející lomovou plochu. O vzniku a šíření trhliny rozhoduje **normálové napětí napětí $\boldsymbol{\sigma_\rho}$ a smykové napětí $\boldsymbol{\tau_\rho}$ v charakteristické rovině $\boldsymbol{\rho}$** před čelem trhliny. Zatímco normálové napětí σ_ρ vede k otevírání trhliny, smykové napětí τ_ρ přispívá ke vzniku plastické zóny před čelem trhliny. V rámci mechaniky kontinua je možné podmínku MS křehké pevnosti postulovat následovně:

O vzniku mezního stavu křehké pevnosti rozhoduje normálové napětí $\boldsymbol{\sigma_\rho}$ a smykové napětí $\boldsymbol{\tau_\rho}$ v charakteristické rovině $\boldsymbol{\rho}$.

Podmínku takového MS stavu je potom možné matematicky vyjádřit následovně

$$A\sigma_\rho + B\tau_\rho + C = 0 \tag{11.20}$$

Zde vystupující veličiny A, B a C jsou materiálovými charakteristikami.

Dále se zaměříme na **podmínku MS křehké pevnosti MOS**, která je kombinací **podmínky maximálního hlavního napětí a Mohrovy podmínky**.

Podmínka MS křehké pevnosti maximálního hlavního napětí:

V tomto případě je charakteristickou rovinou ρ rovina maximálního hlavního napětí σ_1. Složky napětí σ_ρ a τ_ρ v hlavní v této rovině jsou rovny

$$\sigma_\rho = \sigma_1 \qquad\qquad \tau_\rho = 0 \tag{11.21}$$

což dosadíme do obecného vztahu (11.20) a dostáváme

$$A\sigma_1 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = -\frac{C}{A} \tag{11.22}$$

Konstanty v tomto vztahu stanovíme z podmínky při tahové zkoušce

$$\sigma_1 = \sigma_{Rt} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \;\rightarrow\; (11.22) \;\Rightarrow\; -\frac{C}{A} = \sigma_{Rt} \tag{11.23}$$

a po dosazení do (11.22) obdržíme podmínku **MS křehké pevnosti maximálního hlavního napětí** ve finálním tvaru

$$\sigma_1 = \sigma_{Rt} \tag{11.24}$$

Mohrova podmínka MS křehké pevnosti

Charakteristickou rovinou ρ je v tomto případě rovina maximálního smykového napětí $\rho_{\tau_{max}}$ se složkami napětí σ_ρ a τ_ρ dle (10.37) a (10.36)

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \qquad\qquad \tau_\rho = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{11.25}$$

Po dosazení do rovnice (11.20) a formální algebraické úpravě dostáváme

$$A\,\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + B\,\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + C = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{A}$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{B}{A}\,\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{C}{A} = 0 \tag{11.26}$$

Dvě neznámé konstanty $\frac{B}{A}$ a $\frac{C}{A}$ stanovíme aplikací předchozí rovnice na případ tahové a tlakové zkoušky.

Tahová zkouška: $\sigma_1 = \sigma_{Rt} \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \;\; \rightarrow \;\; (11.26) \;\; \rightarrow$

$$\frac{\sigma_{Rt}}{2} + \frac{B}{A}\,\frac{\sigma_{Rt}}{2} + \frac{C}{A} = 0 \tag{11.27}$$

Tlaková zkouška: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\sigma_{Rd} \;\; \rightarrow \;\; (11.26) \;\; \rightarrow$

$$-\frac{\sigma_{Rd}}{2} + \frac{B}{A}\,\frac{\sigma_{Rd}}{2} + \frac{C}{A} = 0 \tag{11.28}$$

Z rovnic (11.27) a (11.28) vypočteme dvě neznámé materiálové konstanty $\frac{B}{A}$ a $\frac{C}{A}$, které dosadíme do rovnice (11.26). Po formální algebraické úpravě obdržíme konečný tvar **Mohrovy podmínky MS křehké pevnosti**

$$\sigma_1 - \varkappa\sigma_3 = \sigma_{Rt} \tag{11.29}$$

kde **materiálový parametr $\boldsymbol{\varkappa}$** je definován jako podíl mezí pevnosti v tahu a tlaku následovně

$$\varkappa = \frac{\sigma_{Rt}}{\sigma_{Rd}} \tag{11.30}$$

Kombinovaná podmínka mezního stavu křehké pevnosti MOS má potom tvar

$$\max\{\sigma_1 - \varkappa\sigma_3, \sigma_1\} = \sigma_{Rt} \tag{11.31}$$

Při grafickém znázornění podmínky MS křehké pevnosti MOS v Haighově prostoru uplatníme zvlášť Mohrovu podmínku a zvlášť podmínku maximálních hlavních napětí s tím, že při grafickém znázornění není automaticky splněna relace $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, vždy záleží na poloze adekvátního bodu v Haighově prostoru.

Pro Mohrovu podmínku pak dostáváme v souladu s (11.29) následujících šest relací

$$\begin{aligned} &\sigma_1 - \varkappa\sigma_2 \leqq \sigma_{Rt} \qquad \sigma_2 - \varkappa\sigma_1 \leqq \sigma_{Rt} \\ &\sigma_2 - \varkappa\sigma_3 \leqq \sigma_{Rt} \qquad \sigma_3 - \varkappa\sigma_2 \leqq \sigma_{Rt} \\ &\sigma_3 - \varkappa\sigma_1 \leqq \sigma_{Rt} \qquad \sigma_1 - \varkappa\sigma_3 \leqq \sigma_{Rt} \end{aligned} \tag{11.32}$$

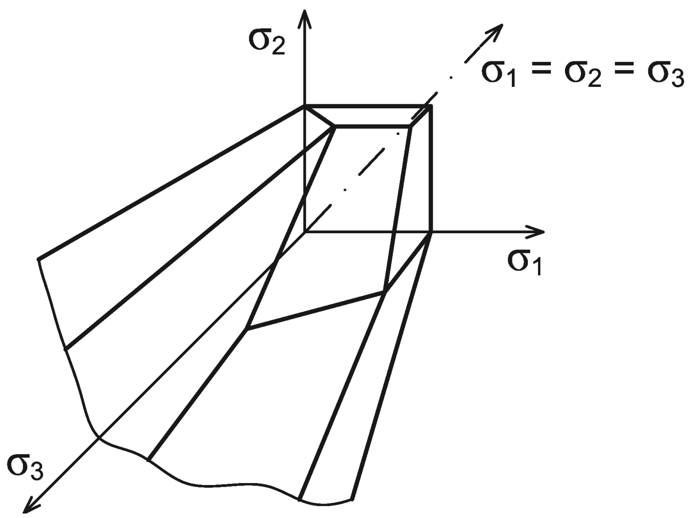
z nichž každá představuje v Haighově prostoru rovinu, které společně vytvářejí povrch šestibokého jehlanu s osou na symetrále prostoru $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Podmínka maximálních hlavních napětí pak vede ke třem vztahům

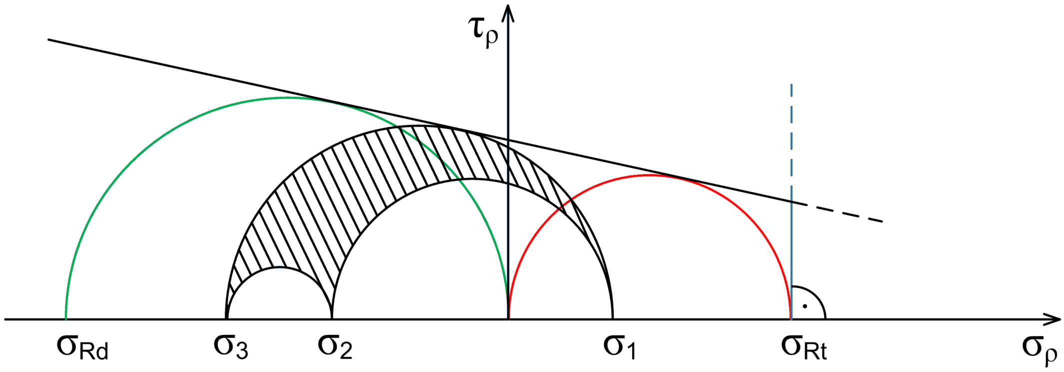
$$\sigma_1 \leqq \sigma_{Rt} \qquad \sigma_2 \leqq \sigma_{Rt} \qquad \sigma_3 \leqq \sigma_{Rt} \tag{11.33}$$

z nichž každý představuje rovnici roviny a ty spolu tvoří trojboký jehlan s osou na symetrále prostoru $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Výsledná mezní plocha MS křehké pevnosti MOS je potom dána průnikem mezních ploch Mohrovy podmínky a podmínky maximálních hlavních napětí, viz obrázek

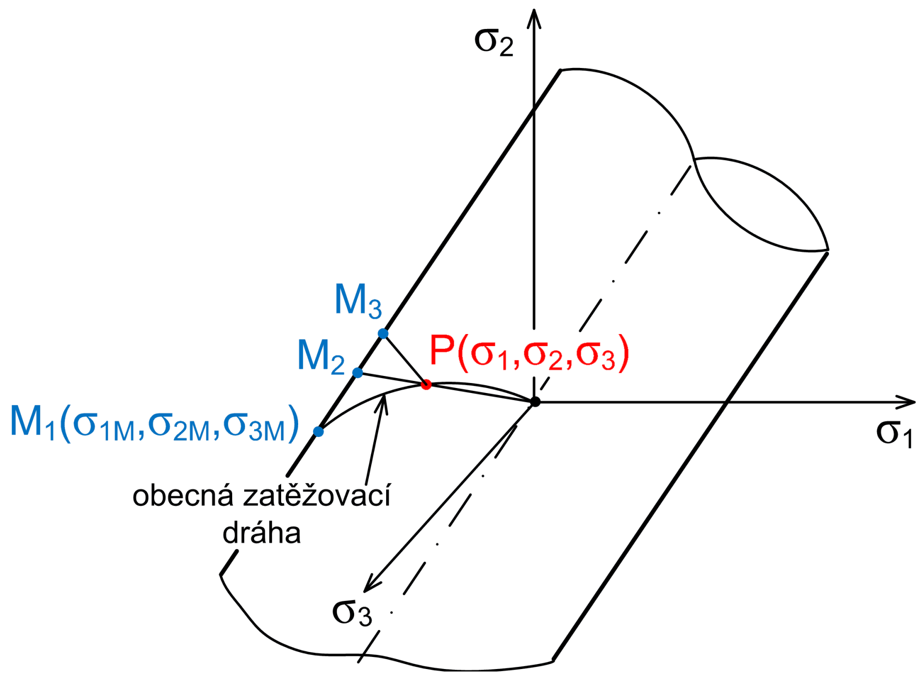


Grafické znázornění podmínky MS křehké pevnosti MOS sestává z tečny k Mohrovým kružnicím, odpovídajícím křehkým pevnostem v tahu a tlaku, stanoveným tahovou resp. tlakovou zkouškou (Mohrova podmínka) a z přímky kolmé k ose σ_ρ (podmínka maximálních hlavních napětí) - odvození viz skripta PPII.



12 PODMÍNKY BEZPEČNOSTI, PROSTÁ BEZPEČNOST, REDUKOVANÉ NAPĚTÍ

Nechť je napjatost v obecném bodě A tělesa při provozním stavu P určena hlavními napětími $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Naším cílem je stanovit bezpečnost vůči aktuálnímu meznímu stavu (MS pružnosti resp. mezní stav křehké pevnosti). Problém je možné řešit na základě geometrických představ v Haighově prostoru (viz obr.) a to pomocí vzdálenosti příslušného bodu P od mezní plochy. Odvození provedeme pro podmínku mezního stavu pružnosti oktaedrického smykového napětí τ_{okt}, graficky znázorněnou plochou plasticity ve tvaru válce, viz obrázek



Pro exaktní řešení potřebujeme znát průběhy hlavních napětí v závislosti na zatěžování - $\sigma_1(Z)$, $\sigma_2(Z)$ a $\sigma_3(Z)$, což představuje v Haighově prostoru tzv. **obecnou zatěžovací dráhu**. Její průsečík M_1 s plochou plasticity určuje hlavní napětí σ_{1M}, σ_{2M} a σ_{3M}, odpovídající meznímu stavu pružnosti. V případě, že zatěžovací dráhu neznáme, můžeme předpokládat tzv. **prosté zatěžování s přímkovou dráhou**, vedoucí k průsečíku M_2, případně **nejkratší přímkovou přetěžovací dráhu kolmou k mezní ploše** (M_3). Podle toho jakou zatěžovací dráhu zvolíme, dostaneme **bezpečnost obecnou, prostou či minimální**.

Bezpečnost (koeficient bezpečnosti) v provozním stavu P lze vyjádřit takto

$$k_K = \frac{\widehat{OM_i}}{\widehat{OP}} = \frac{\widehat{OP} + \widehat{PM_i}}{\widehat{OP}} \doteq 1 + \frac{\overline{PM_i}}{\overline{OP}} =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{(\sigma_{1M} - \sigma_1)^2 + (\sigma_{2M} - \sigma_2)^2 + (\sigma_{3M} - \sigma_3)^2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}} \tag{12.1}$$

V běžných pružnostně-pevnostních výpočtech určujeme **prostou bezpečnost** pro přímkovou zatěžovací dráhu, kde hlavní napětí rostou proporciálně. Pro bezpečnost potom platí

$$k_K = \frac{\sigma_{1M}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{2M}}{\sigma_2} = \frac{\sigma_{3M}}{\sigma_3} \tag{12.2}$$

Po dosazení (12.2) do podmínky plasticity oktaedrického smykového napětí τ_{okt} (11.13) obdržíme

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{1M} - \sigma_{2M})^2 + (\sigma_{2M} - \sigma_{3M})^2 + (\sigma_{3M} - \sigma_{1M})^2} = \sigma_K$$

$$k_K \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_K$$

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} = \frac{\sigma_K}{\sigma_{red}} \tag{12.3}$$

kde veličina σ_{red} je **redukované napětí**, definované následovně

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \tag{12.4}$$

V případě aplikace podmínky plasticity maximálního smykového napětí τ_{max} dostáváme v souladu se (11.4) pro redukované napětí σ_{red} následující vztah

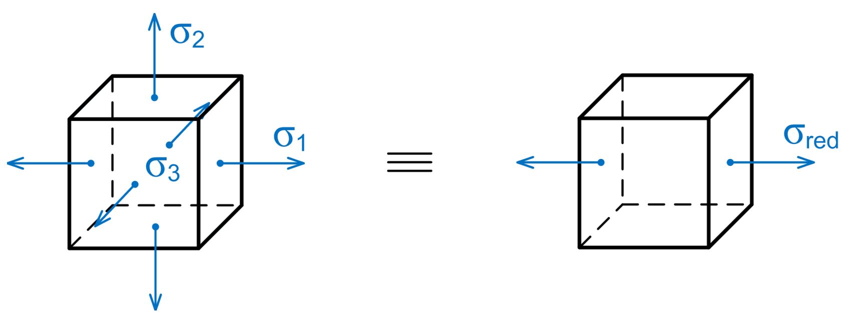
$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \tag{12.5}$$

Z relací (12.4) a (12.5) je zřejmé, že redukovaná napětí jsou dána formálně stejnými vztahy jako jsou příslušné podmínky plasticity, pouze místo hlavních napětí σ_{1M}, σ_{2M} a σ_{3M} v mezním stavu M tu figurují napětí σ_1, σ_2 a σ_3 ve stavu provozním P.

V souladu se vztahem (12.3) je možné vyslovit následující definici redukovaného napětí σ_{red}:

Redukované napětí $\boldsymbol{\sigma_{red}}$ je hodnota napětí fiktivní tahové napjatosti, přiřazené napjatosti prostorové tak, že prostá bezpečnost je vzhledem k mezi kluzu $\boldsymbol{\sigma_k}$ stejná pro prostorovou i pro fiktivní tahovou napjatost.

Tuto skutečnost je možné graficky znázornit následovně



Pozor, tuto náhradu je možné uplatnit pouze pro stanovení prosté bezpečnosti, nikoliv pro jiné výpočty, např. deformace tělesa.

U prutové napjatosti je redukované napětí dle podmínky plasticity τ_{okt} dáno v souladu s (11.17) následovně

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \tag{12.6}$$

a při aplikaci podmínky plasticity τ_{max} dle (11.7) platí

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \tag{12.7}$$

Stejným postupem stanovíme redukované napětí dle podmínky křehké pevnosti MOS

$$\sigma_{red} = \max\{(\sigma_1 - \varkappa\sigma_3); \sigma_1\} \tag{12.8}$$

a pro **prostou bezpečnost $\boldsymbol{k_R}$** vůči MS křehké pevnosti dostáváme

$$k_R = \frac{\sigma_{Rt}}{\sigma_{red}} \tag{12.9}$$

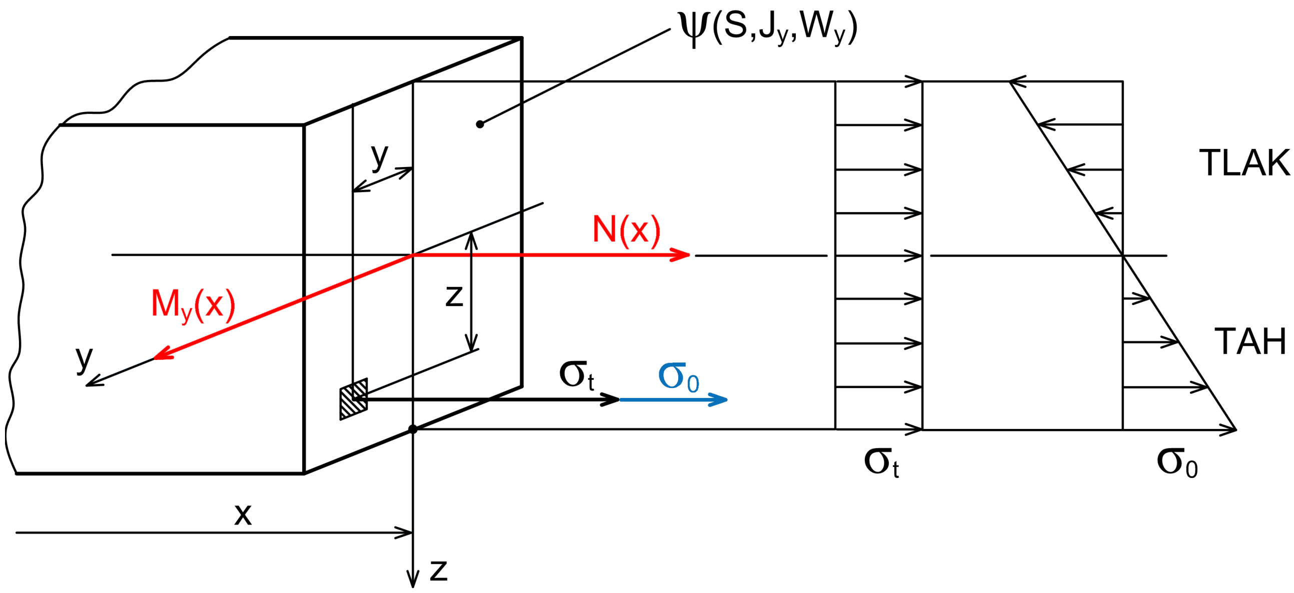
13 KOMBINOVANÁ NAMÁHÁNÍ

13.1 Kombinované namáhání na tah a ohyb

Výslednými vnitřními silovými účinky jsou normálová síla N a ohybový moment M_o. V našem případě se omezíme na prostý základní ohyb kolem osy y. Vektor VVU má potom následující tvar

$$VVU = \{N, 0, M_y, 0\} \tag{13.1}$$

Podmínky v příčném řezu v místě x vypadají následovně



Vzhledem k platnosti principu superposice v oblasti lineární pružnosti je výsledné normálové napětí $\sigma(y, z)$ dáno součtem napětí od ohybu a od tahu

$$\sigma(y, z) = \sigma_t(y, z) + \sigma_o(y, z) = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{J_y}\, z \tag{13.2}$$

Z průběhů obou napětí po průřezu uvedených na předchozím obrázku je zřejmé, že nebezpečné místo je na spodním okraji průřezu, kde jsou maximální ohybové napětí σ_o a tahové napětí σ_t se stejným znaménkem

$$\sigma_{max}(x) = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{W_y} \tag{13.3}$$

Ve sledovaném případě jde o jednoosou napjatost a bezpečnost v řezu je dána vztahem

$$k_K(x) = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}(x)} \tag{13.4}$$

a pro bezpečnost celého prutu platí

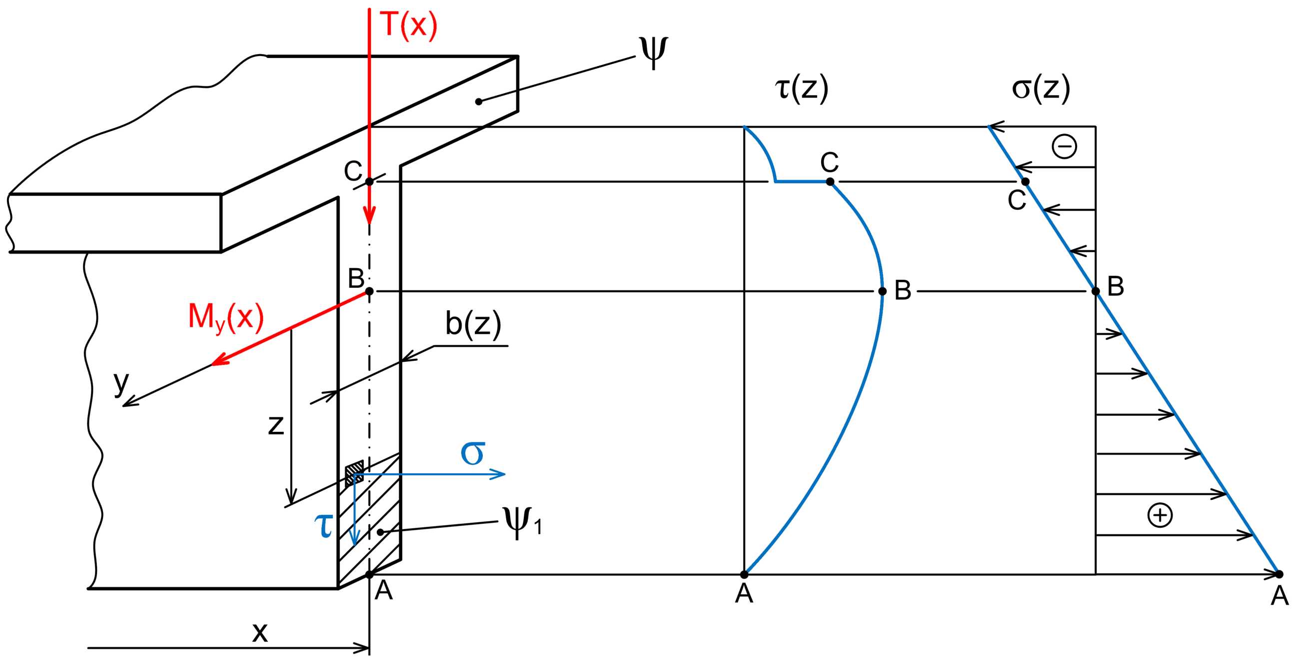
$$k_K = \min\{k_K(x)\} \geqq k_D \tag{13.5}$$

13.2 Kombinované namáhání na ohyb a smyk

Výslednými vnitřními silovými účinky v řezu v místě x jsou posouvající síla T a ohybový moment M_o. V našem případě se opět omezíme na prostý základní ohyb kolem osy y. Vektor VVU má potom následující tvar

$$VVU = \{0, T, M_y, 0\} \tag{13.6}$$

Podmínky v příčném řezu v místě x vypadají následovně



Ohybový moment M_y způsobí ohybové napětí $\sigma(z)$ a posouvající síla T vede ke vzniku smykových napětí $\tau(z)$, jejichž průběhy jsou podle (7.13) a (7.36) vyjádřeny následovně

$$\sigma(z) = \frac{M_y}{J_y}\, z \tag{13.7}$$

$$\tau(z) = \frac{T U_y^{\psi_1}(z)}{b(z) J_y} \tag{13.8}$$

a jsou graficky znázorněny na obrázku.

Ve sledovaném případě jde o prutovou rovinnou napjatost. Pokud vyjdeme z podmínky plasticity τ_{max} použijeme dle (12.7) pro redukované napětí σ_{red} následující vztah

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \tag{13.9}$$

Průběhy složek napětí $\sigma(z)$ a $\tau(z)$ navozují, že nebezpečnými místy mohou být bod A s maximálním ohybovým napětím, bod B s maximálním smykovým napětím nebo bod C na přechodu stojiny do pásnice, kde jsou obě napětí vysoká. V těchto bodech vypočteme velikost σ_{red} a jejich porovnáním určíme maximální redukované napětí $\sigma_{red,max}$ v řezu x.

$$\sigma_{red,A} = \sigma_A$$

$$\sigma_{red,B} = 2\tau_B \tag{13.10}$$

$$\sigma_{red,C} = \sqrt{\sigma_C^2 + 4\tau_C^2}$$

$$\sigma_{red,max} = \max\{\sigma_{red,i}\} \tag{13.11}$$

Prostá bezpečnost v řezu x vůči mezi kluzu je potom rovna

$$k_K(x) = \frac{\sigma_K}{\sigma_{red,max}} \tag{13.12}$$

A pro bezpečnost celého prutu dostáváme

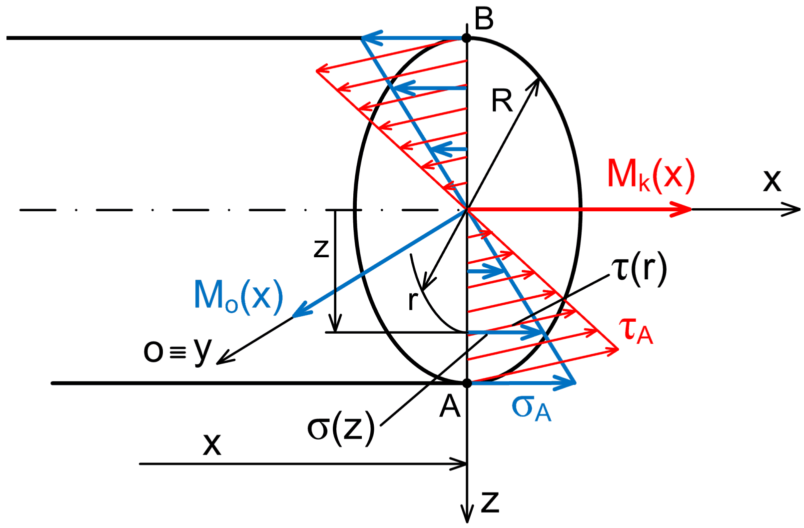
$$k_K = \min\{k_K(x)\} \geqq k_D \tag{13.13}$$

13.3 Kombinované namáhání na ohyb a krut

Výslednými vnitřními silovými účinky v řezu v místě x jsou ohybový moment M_o a kroutící moment M_k. Vektor VVU má potom následující tvar

$$VVU = \{0, 0, M_o, M_k\} \tag{13.14}$$

Podmínky v příčném řezu v místě x u prutu kruhového průřezu vypadají následovně



Ohybový moment M_o způsobí ohybové napětí $\sigma(z)$ a kroutící moment M_k vede ke vzniku smykových napětí $\tau(r)$, jejichž průběhy jsou podle (7.13) a (8.8)

$$\sigma(z) = \frac{M_o}{J_o}\,z \tag{13.15}$$

$$\tau(r) = \frac{M_k}{J_p}\,r \tag{13.16}$$

Nebezpečnými místy průřezu jsou bodu A resp. B na obrysu průřezu, kde jsou hodnoty obou napětí maximální, viz obrázek. Jejich hodnoty jsou následující

$$\sigma(A) = \sigma(z = R) = \frac{M_o(x)}{W_o} \tag{13.17}$$

$$\tau(A) = \tau(r = R) = \frac{M_k(x)}{W_k} \tag{13.18}$$

V daném případě jde o prutovou rovinnou napjatost. Pokud vyjdeme z podmínky plasticity τ_{max} použijeme dle (12.7) pro redukované napětí σ_{red} následující vztah

$$\sigma_{red}(x) = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} = \sqrt{\frac{M_o^2(x)}{W_o^2} + 4 \cdot \frac{M_k^2(x)}{W_k^2}} = \frac{M_{red}(x)}{W_o} \tag{13.19}$$

Při formální úpravě předchozího vztahu byla použita relace mezi moduly kruhového průřezu, dle které platí $W_k = 2W_o$.

Předchozí rovnicí byl zaveden tzv. redukovaný moment M_{red}, jehož hodnota je při použití podmínky plasticity τ_{max}

$$M_{red} = \sqrt{M_o^2 + M_k^2} \tag{13.20}$$

a při aplikaci podmínky plasticity τ_{okt} dostáváme

$$M_{red} = \sqrt{M_o^2 + 0,75M_k^2} \tag{13.21}$$

Prostá bezpečnost vůči mezi kluzu v řezu x je rovna

$$k_K(x) = \frac{\sigma_K}{\sigma_{red}(x)} \tag{13.22}$$

A bezpečnost celého prutu potom vypadá následovně

$$k_K = \min\{k_K(x)\} \geqq k_D \tag{13.23}$$

U prizmatických prutů můžeme postupovat efektivněji. Nebezpečným řezem je tu místo maximálního redukovaného momentu $M_{red,max}$, který vede k maximálnímu redukovanému napětí $\sigma_{red,max}$

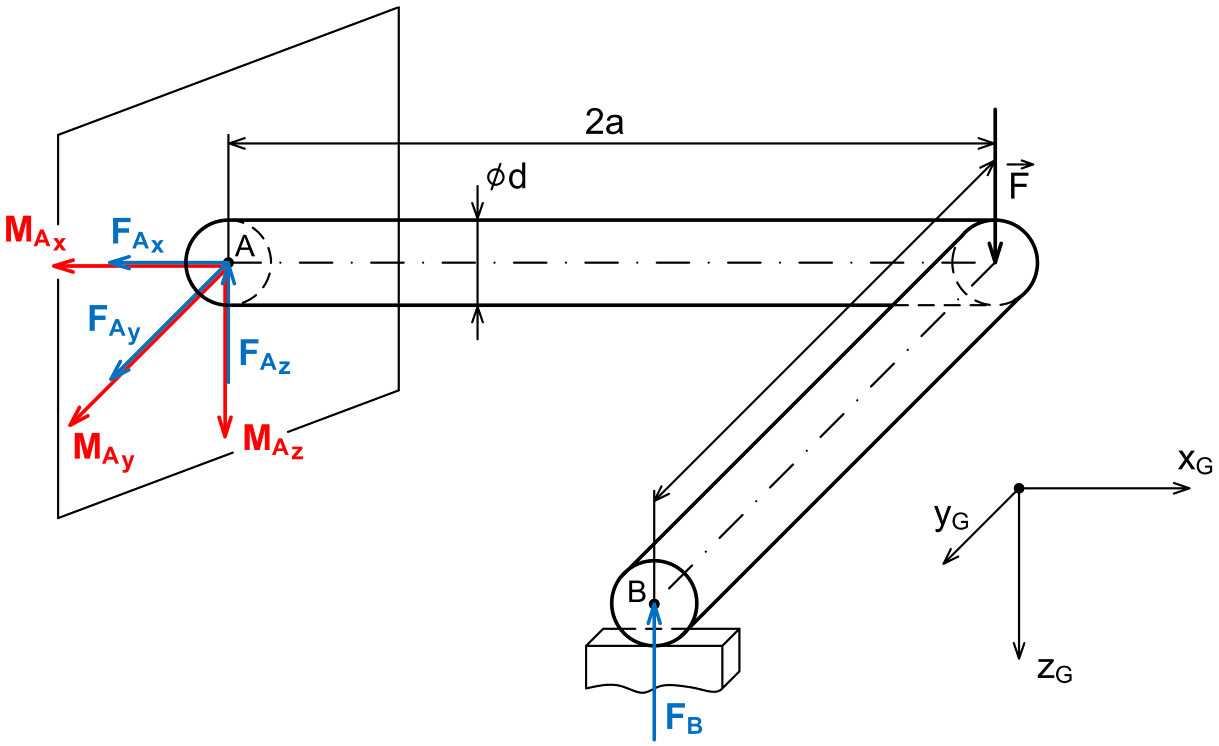
$$\sigma_{red,max} = \frac{M_{red,max}}{W_o} \tag{13.24}$$

Bezpečnost prutu je potom rovna

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{red,max}} \geqq k_D \tag{13.25}$$

Demonstrační příklad:

Navrhněte průměr prutu zatíženého a uloženého dle obrázku



$F = 10^3$ N, $a = 1$ m, $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0,3$, $\sigma_K = 400$ MPa, bezpečnost $k_D = 2$, $d = ?$

Statický rozbor pro úplně uvolněné těleso:

$$\mu = 7 \qquad \nu = 6 \qquad s = \mu - \nu = 7 - 6 = 1$$

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá.

Podmínky statické rovnováhy pro úplně uvolněný prut

$$\sum F_x \ : \ F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y \ : \ F_{Ay} = 0$$

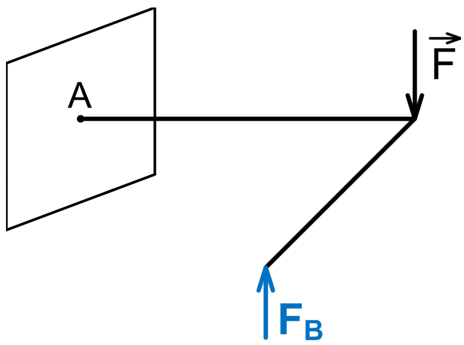
$$\sum F_z \ : \ F_{Az} + F_B - F = 0$$

$$\sum M_x \ : \ M_{Ax} + F_B a = 0$$

$$\sum M_y \ : \ M_{Ay} + F_B 2a - F2a = 0$$

$$\sum M_z \ : \ M_{Az} = 0$$

Částečně uvolněný prut

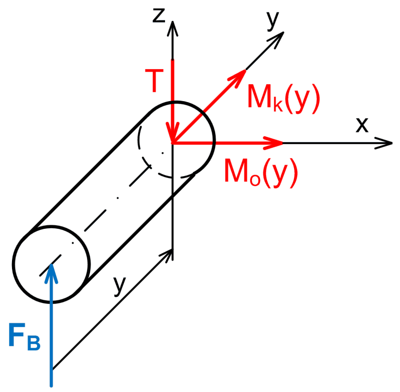


Deformační podmínka pro uvolněnou vazbu

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_B} = \frac{\partial}{\partial F_B}\left(\int\limits_\gamma \frac{M_o^2(s)\mathrm{d}s}{2EJ_o} + \int\limits_\gamma \frac{M_k^2(s)\mathrm{d}s}{2GJ_o}\right) =$$

$$= \int\limits_\gamma \frac{M_o(s)}{EJ_o}\,\frac{\partial M_o}{\partial F_B}\,\mathrm{d}s + \int\limits_\gamma \frac{M_k(s)}{GJ_p}\,\frac{\partial M_k}{\partial F_B}\,\mathrm{d}s = 0$$

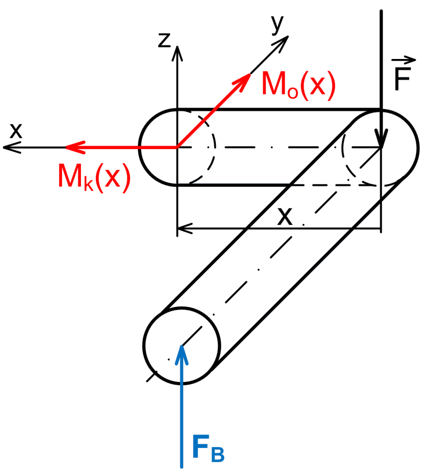
Průběh ohybových momentů $M_o(s)$ a kroutících momentů $M_k(s)$ podél střednice prutu



$$\sum M_x : F_B\, y - M_o(y) = 0$$

$$M_o(y) = F_B\, y$$

$$\sum M_y : M_k(y) = 0$$



$$\sum M_x : M_k(x) + F_B\, a = 0$$

$$M_k(x) = -F_B\, a$$

$$\sum M_y : M_o(x) - F_B\, x + F x = 0$$

$$M_o(x) = F_B\, x - F\, x$$

Řešení deformační podmínky pomocí Castiglianovy věty

$$\frac{1}{EJ_o}\left[\int_0^a F_B\, y\, y\, \mathrm{d}y + \int_0^{2a} (F_B\, x - Fx)\, x\, \mathrm{d}x + \right.$$

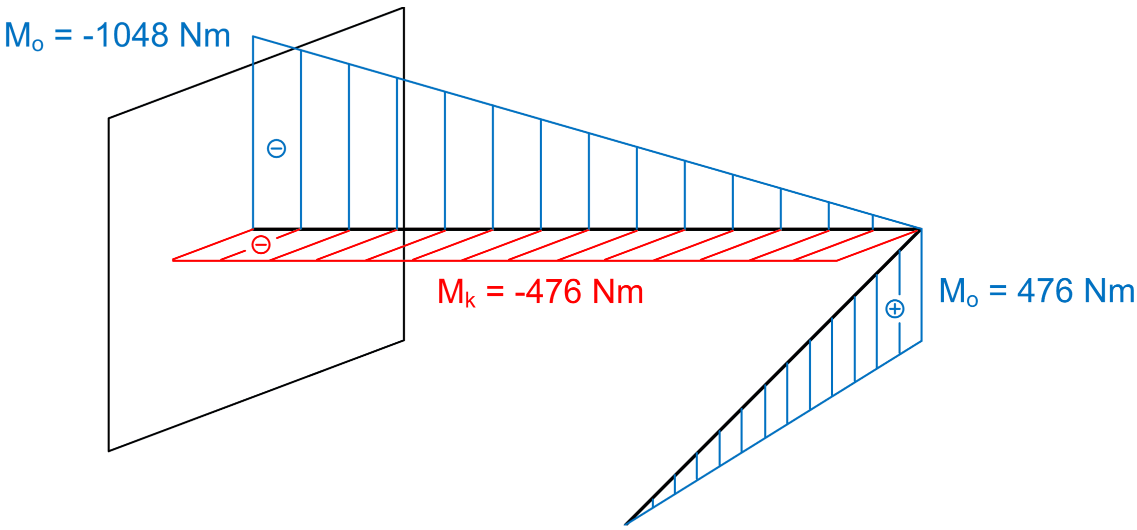
$$\left. \frac{2(1+\mu)}{E\, 2J_o} \int_0^{2a} (-F_B\, a)(-a)\, \mathrm{d}x \right] = 0 \qquad \Big/ EJ_o$$

$$\frac{F_B\,a^3}{3} + \frac{8F_B\,a^3}{3} - \frac{8F\,a^3}{3} + (1+\mu)2F_B\,a^3 = 0 \qquad \Big/ \frac{1}{a^3}$$

$$F_B = \frac{8F}{3(5+2\mu)} = \frac{8\cdot 10^3}{3(5+2\cdot 0,3)} = 0,476\,\mathbf{F} = 476\,\mathbf{N}$$

Pozn. Při řešení bylo použito známého vztahu pro modul pružnosti ve smyku $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ a vazby mezi polárním a osovým kvadratickým momentem u kruhového průřezu $J_p = 2J_o$.

Průběhy ohybových momentů $M_o(s)$ a kroutících momentů $M_k(s)$ podél střednice prutu vyplývají z dříve uvedených vztahů, do kterých dosadíme vypočtené F_B



Pevnostní návrh:

Z průběhů $M_o(s)$ a $M_k(s)$ je zřejmé, že nebezpečným místem je bod A ve vetknutí. Maximální redukovaný moment $M_{max,red}$ dle podmínky plasticity τ_{max} je roven

$$M_{max,red} = \sqrt{M_{oA}^2 + M_{kA}^2} = \sqrt{1048^2 + 476^2} = 1151 \text{ Nm}$$

Neznámý průměr d se potom stanoví pomocí podmínky bezpečnosti a vztahu (19) pro redukované napětí

$$\sigma_{red,max} = \frac{\sigma_K}{k_K} = \frac{M_{red,max}}{W_o} = \frac{16M_{red,max}}{\pi d^3} \quad \Rightarrow$$

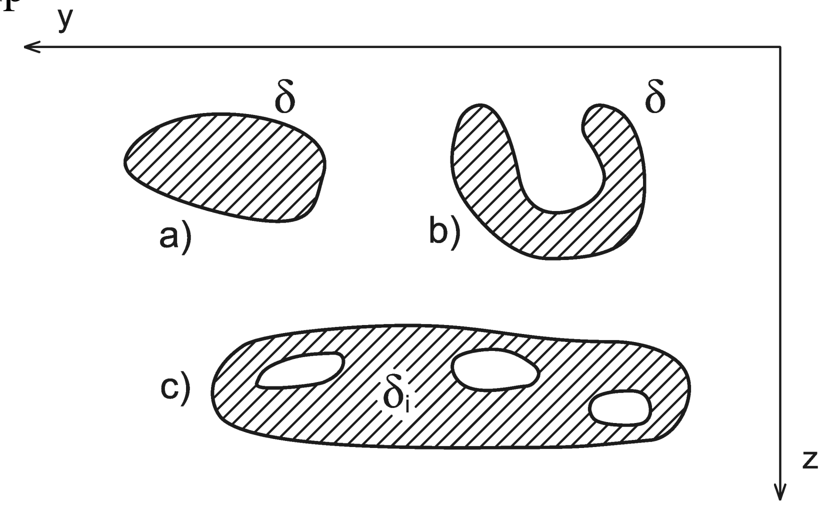
$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{red,max}k_K}{\pi\sigma_K}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1151 \cdot 10^3 \cdot 2}{\pi \cdot 400}} =$$

$$\doteq 30,8 \text{ mm} \doteq 31 \text{ mm}$$

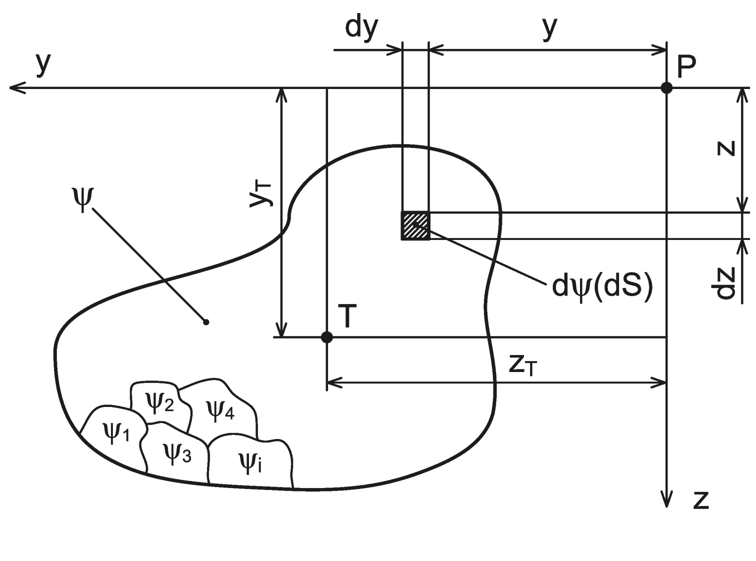
Příloha A: PRŮŘEZOVÉ CHARAKTERISTIKY

Ve vztazích pro výpočet napětí a přetvoření u prutů dle teorií prosté pružnosti vystupují veličiny, které průřez při daném způsobu namáhání charakterizují. Nazývají se **průřezové charakteristiky** a budeme se jimi nyní zabývat souhrnně.

Příčný průřez ψ je určen rovnicí obrysové křivky δ u jednonásobně souvislé oblasti (viz případy a) a b)) resp. rovnicemi obrysových křivek δ_i u případu vícenásobně souvislé oblasti v lokálním souřadném systému, případ c)



Potřebné vztahy odvodíme pro příčný průřez představující jednonásobně souvislou oblast, viz obrázek



1 DEFINICE PRŮŘEZOVÝCH CHARAKTERISTIK

Plocha příčného průřezu S je určena vztahem

$$S = \int_{\psi} \mathrm{d}S = \int_{\psi} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \qquad [\mathrm{mm}^2] \tag{1}$$

Plocha S je veličinou s kladnou číselnou hodnotou, která nezávisí na zvoleném souřadnicovém systému.

Lineární momenty průřezu U_y a U_z k osám y a z jsou definovány následovně

$$U_y = \int_{\psi} z\, \mathrm{d}S \qquad U_z = \int_{\psi} y\, \mathrm{d}S \qquad [\mathrm{m}^3] \tag{2}$$

Lineární momenty průřezu U_y a U_z jsou veličinami s kladnou nebo zápornou číselnou hodnotou, která závisí na poloze souřadnicového systému.

Pomocí lineárních momentů se určují souřadnice těžiště průřezu

$$y_T = \frac{U_z}{S} = \frac{\int_{\psi} y\, \mathrm{d}S}{S} \qquad z_T = \frac{U_y}{S} = \frac{\int_{\psi} z\, \mathrm{d}S}{S} \tag{3}$$

Kvadratické momenty průřezu

a) Osové kvadratické momenty $\boldsymbol{J_y}$ a $\boldsymbol{J_z}$ k osám y a z

$$J_y = \int_{\psi} z^2 \, \mathrm{d}S \qquad J_z = \int_{\psi} y^2 \, \mathrm{d}S \qquad [\mathrm{m}^4] \tag{4}$$

Jde o veličiny s kladnou číselnou hodnotou.

b) Deviační kvadratický moment $\boldsymbol{J_{yz}}$ k osám y a z

$$J_{yz} = \int_{\psi} yz \, \mathrm{d}S \qquad [\mathrm{m}^4] \tag{5}$$

Jeho hodnota může být kladná, záporná nebo nulová, tedy jakékoliv reálné číslo.

c) Polární kvadratický moment $\boldsymbol{J_p}$ k pólu P

$$J_p = \int_{\psi} r^2 \, \mathrm{d}S \qquad [\mathrm{m}^4] \tag{6}$$

K osovým kvadratickým momentům se váží tzv. **poloměry osových kvadratických momentů $\boldsymbol{i_y}$ a $\boldsymbol{i_z}$**, definované následovně

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{S}} \qquad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{S}} \qquad [\mathrm{m}] \tag{7}$$

2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI KVADRATICKÝCH MOMENTŮ

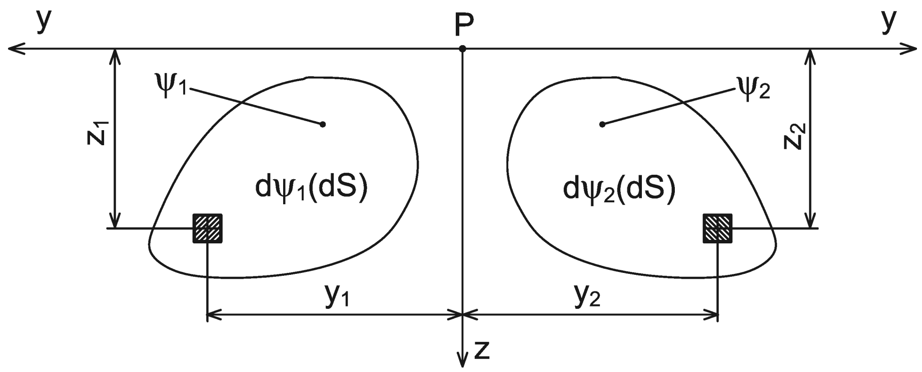
Při jejich odvození se vychází z vlastností dvojných integrálů v definičních vztazích

Kvadratické momenty celého průřezu ψ k daným osám (pólu) jsou rovny součtu kvadratických momentů částí průřezu (podprůřezů) ψ_i ke stejným osám (pólu) - viz definiční obrázek.

$$\psi = \psi_1 \cup \psi_2 \cup \ldots \cup \psi_i \cup \ldots \cup \psi_n = \bigcup_i \psi_i \qquad S = \sum_i S_i$$

$$J_y = \int_{\psi} z^2 \,\mathrm{d}S = \int_{\bigcup_i \psi_i} z^2 \,\mathrm{d}S = \sum_i \int_{\psi_i} z^2 \,\mathrm{d}S = \sum_1^n J_y^i \tag{8}$$

Osové kvadratické momenty dvou symetrických průřezů k ose symetrie a k ose k ní kolmé jsou stejné. Deviační momenty k těmto osám jsou rovněž stejně velké, ale mají opačná znaménka.



Ke každému elementu $\mathrm{d}\psi_1$ lze přiřadit symetrický element $\mathrm{d}\psi_2$ tak, že platí:

$$z_1 = z_2 \quad y_1 = -y_2 \quad \Rightarrow \quad z_1^2 = z_2^2 \,,\; y_1^2 = y_2^2 \,;\; y_1 z_1 = -y_2 z_2$$

$${}^1 J_z = \int_{\psi_1} y_1^2 \,\mathrm{d}S = \int_{\psi_2} y_2^2 \,\mathrm{d}S \stackrel{2}{=} J_z \quad {}^1 J_y = \int_{\psi_1} z_1^2 \,\mathrm{d}S = \int_{\psi_2} z_2^2 \,\mathrm{d}S \stackrel{2}{=} J_y$$

1

$$J_{yz} = \int\limits_{\psi_1} y_1 z_1 \,\mathrm{d}S = -\int\limits_{\psi_2}^{2} y_2 z_2 \,\mathrm{d}S = -J_{yz}$$

Sestává-li průřez ψ ze dvou symetrických částí ψ_1 a ψ_2 ($\psi = \psi_1 \cup \psi_2$), potom dle předchozích relací platí

1 2 1

$$J_z^{\,2} = J_z + J_z = 2 \cdot J_z = 2 \cdot J_z$$

1 2 1

$$J_y^{\,2} = J_y + J_y = 2 \cdot J_y = 2 \cdot J_y$$

1 2

$$J_{yz} = J_{yz} + J_{yz} = 0$$

Předchozí vztahy je možné vyjádřit formou následujících dvou vět

Osové kvadratické momenty symetrického průřezu k ose symetrie a k ose k ní kolmé jsou rovny dvojnásobku hodnot symetrických částí ke stejným osám.

Deviační moment symetrického průřezu k souřadnicovým osám, z nichž alespoň jedna je osou symetrie, je nulový.

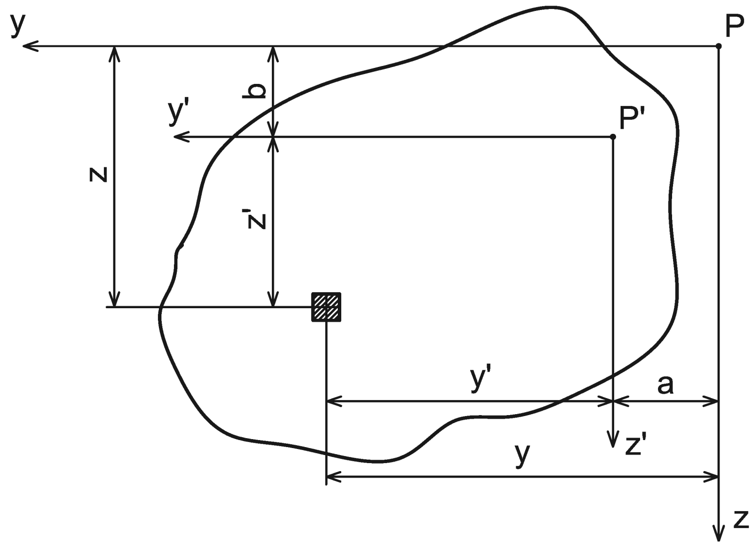
Polární kvadratický moment k počátku pravoúhlého souřadnicového systému je roven součtu osových momentů k osám, které počátkem procházejí.

Důkaz této poslední věty vyplývá z úvodního definičního obrázku

$$J_p = \int\limits_{\psi} r^2 \,\mathrm{d}S = \int\limits_{\psi} (y^2 + z^2) \,\mathrm{d}S = J_z + J_y \tag{9}$$

3 KVADRATICKÉ MOMENTY PRŮŘEZU K POSUNUTÝM OSÁM

Předpokládáme, že známe kvadratické momenty k osám y a z a chceme stanovit kvadratické momenty tohoto průřezu k posunutým osám y' a z', viz obrázek.



Transformace souřadnic vypadá následovně

$$y' = y - a \qquad\qquad z' = z - b$$

Při stanovení kvadratických momentů $J_{y'}$ a $J_{z'}$ vycházíme z definic

$$J_{y'} = \int_{\psi} z'^2 \,\mathrm{d}S = \int_{\psi} (z-b)^2 \,\mathrm{d}S = \int_{\psi} z^2 \,\mathrm{d}S - 2b \int_{\psi} z \,\mathrm{d}S + b^2 \int_{\psi} \mathrm{d}S$$

$$J_{y'} = J_y - 2bU_y + b^2 S \tag{10}$$

$$J_{z'} = \int_{\psi} y'^2 \,\mathrm{d}S = \int_{\psi} (y-a)^2 \,\mathrm{d}S = \int_{\psi} y^2 \,\mathrm{d}S - 2a \int_{\psi} y \,\mathrm{d}S + a^2 \int_{\psi} \mathrm{d}S$$

$$J_{z'} = J_z - 2aU_z + a^2 S \tag{11}$$

Pro polární kvadratický moment $J_{p'}$ platí

$$J_{p'} = J_{y'} + J_{z'} = J_y + J_z - 2bU_y - 2aU_z + (a^2 + b^2)S \qquad (12)$$

Deviační moment $J_{y'z'}$ je dle definice roven

$$J_{y'z'} = \int_{\psi} y'z' \, \mathrm{d}S = \int_{\psi} (y-a)(z-b) \, \mathrm{d}S =$$

$$= \int_{\psi} yz \, \mathrm{d}S - a \int_{\psi} z \, \mathrm{d}S - b \int_{\psi} y \, \mathrm{d}S + ab \int_{\psi} \mathrm{d}S$$

$$J_{y'z'} = J_{yz} - aU_y - bU_z + abS \qquad (13)$$

Jsou-li osy y a z centrálními osami, tedy procházejí-li těžištěm průřezu, potom platí $U_y = U_z = 0$. Předchozí vztahy se potom zjednoduší a obdržíme relace v literatuře označované jako **Steinerovy věty**

$$J_{y'} = J_y + b^2 S \qquad J_{z'} = J_z + a^2 S$$

$$J_{p'} = J_p + (a^2 + b^2)S \qquad J_{y'z'} = J_{yz} + abS \qquad (15)$$

Na základě analýzy předchozích vztahů je možné vyslovit následující větu:

Osový kvadratický moment je nejmenší k té z množiny rovnoběžných os, která prochází těžištěm.

Pro lineární kvadratické momenty průřezu dostáváme v posunutém souřadnicovém systému v souladu s definicemi následující relace

$$U_{y'} = \int\limits_{\psi} z' \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\psi} (z-b) \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\psi} z \, \mathrm{d}S - b \int\limits_{\psi} \mathrm{d}S$$

$$U_{y'} = U_y - bS \tag{14}$$

$$U_{z'} = \int\limits_{\psi} y' \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\psi} (y-a) \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\psi} y \, \mathrm{d}S - a \int\limits_{\psi} \mathrm{d}S$$

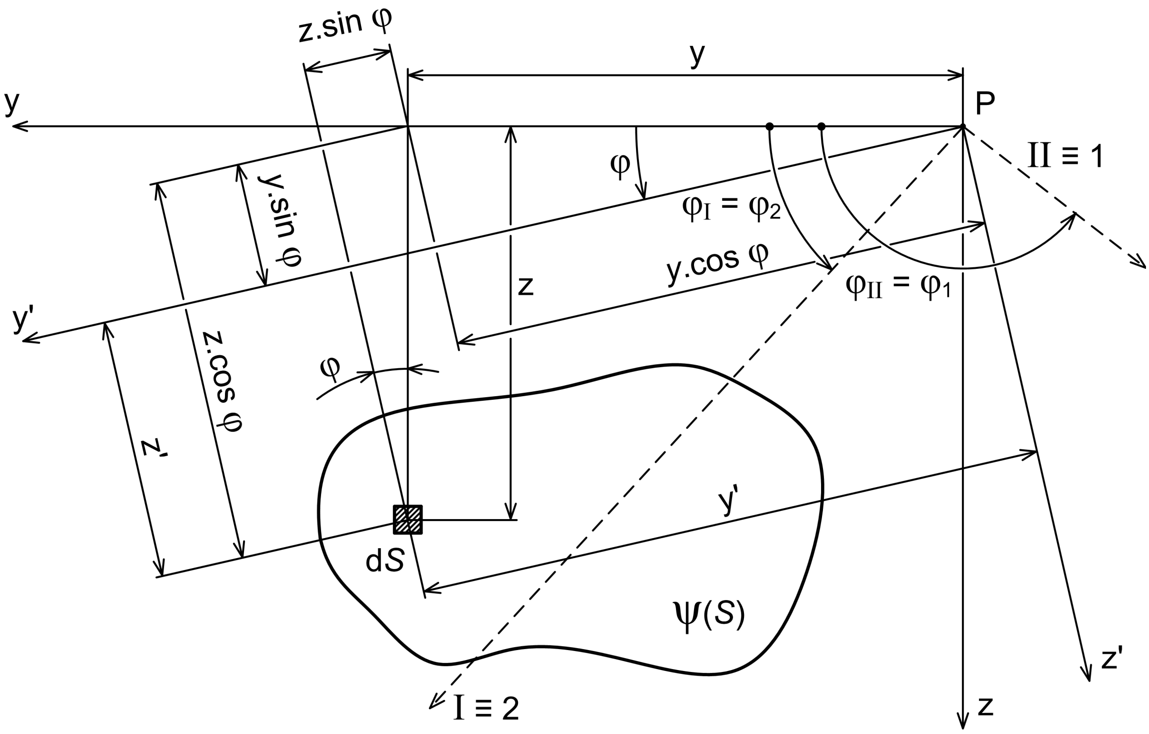
$$U_{z'} = U_z - aS \tag{15}$$

Jsou-li osy y' a z' centrálními osami $(U_y = U_z = 0)$, potom platí

$$U_{y'} = -bS \qquad\qquad U_{z'} = -aS \tag{16}$$

4 KVADRATICKÉ MOMENTY PRŮŘEZU K NATOČENÝM OSÁM

Předpokládáme, že známe kvadratické momenty k souřadnicovým osám y a z. Naším cílem je stanovit kvadratické momenty průřezu k osám y' a z', natočeným v kladném smyslu o úhel φ, viz obrázek



Transformace souřadnic

$$y' = y\cos\varphi + z\sin\varphi$$
$$z' = z\cos\varphi - y\sin\varphi$$

Pro osové kvadratické momenty a deviační moment k natočeným osám y' a z' dostáváme v souladu s příslušnými definicemi po matematické úpravě následující relace

$$J_{y'} = \int\limits_{\psi} z'^2 \,\mathrm{d}S = \int\limits_{\psi} (z\cos\varphi - y\sin\varphi)^2 \,\mathrm{d}S =$$

$$= \cos^2\varphi \int_\psi z^2 \, \mathrm{d}S - 2\sin\varphi \, \cos\varphi \int_\psi zy \, \mathrm{d}S + \sin^2\varphi \int_\psi y^2 \, \mathrm{d}S$$

$$J_{y'} = J_y \cos^2\varphi - J_{yz}\sin 2\varphi + J_z \sin^2\varphi \tag{17}$$

$$J_{z'} = \int_\psi y'^2 \, \mathrm{d}S = \int_\psi (y\cos\varphi + z\sin\varphi)^2 \, \mathrm{d}S =$$

$$= \cos^2\varphi \int_\psi y^2 \, \mathrm{d}S + 2\sin\varphi \, \cos\varphi \int_\psi yz \, \mathrm{d}S + \sin^2\varphi \int_\psi z^2 \, \mathrm{d}S$$

$$J_{z'} = J_y \sin^2\varphi + J_{yz}\sin 2\varphi + J_z \cos^2\varphi \tag{18}$$

$$J_{y'z'} = \int_\psi y'z' \, \mathrm{d}S = \int_\psi (y\cos\varphi + z\sin\varphi)(z\cos\varphi - y\sin\varphi) \, \mathrm{d}S =$$

$$= \cos^2\varphi \int_\psi yz \, \mathrm{d}S + \sin\varphi\cos\varphi \int_\psi z^2 \, \mathrm{d}S -$$

$$- \sin\varphi\cos\varphi \int_\psi y'^2 \, \mathrm{d}S - \cos^2\varphi \int_\psi yz \, \mathrm{d}S =$$

$$= J_{yz}\cos^2\varphi + J_y \sin\varphi\cos\varphi - J_z\cos\varphi\sin\varphi - J_{yz}\sin^2\varphi$$

$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \, \sin 2\varphi + J_{yz}\cos 2\varphi \tag{19}$$

Kvadratické momenty J_y, J_z a J_{yz} mají všechny atributy souřadnic tenzoru T_J

$$T_J = \begin{vmatrix} J_y & J_{yz} \\ J_{zy} & J_z \end{vmatrix} \tag{20}$$

jehož složky v novém, natočeném souřadnicovém systému jsou lineárními kombinacemi souřadnic v původním souřadnicovém systému, viz vztahy (17) - (19). Mezi tyto atributy patří existence hlavního souřadnicového systému I a II (viz obr.), ke kterému je deviační moment $J_{I\ II}$ roven nule. Příslušné souřadnicové osy I a II se nazývají hlavními osami KM a příslušné osové momenty J_I a J_{II} pak hlavními kvadratickými momenty. Úhel φ_I, určující polohu hlavního souřadnicového systému I, II se stanoví z definice

$$J_{I,II} = 0 = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\varphi_I + J_{yz} \cos 2\varphi_I$$

$$\tan 2\varphi_I = \frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} \qquad \varphi_I = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z}\right) \tag{21}$$

Dosazením úhlu φ_I do vztahů (17) a (18) dostáváme příslušné hlavní kvadratické momenty J_I a J_{II}, které jsou extrémními hodnotami možných osových KM $J_{y'}$.

Dále zavedeme nové označení. Větší z obou momentů J_I a J_{II} se nazývá **maximální hlavní osový KM průřezu** a označuje se J_1 a menší se nazývá **minimální hlavní osový KM** s označením J_2. Příslušné hlavní osy KM jsou 1 a 2.

Pokud hlavní souřadnicový systém 1, 2 prochází navíc těžištěm průřezu, jde o **hlavní centrální souřadnicový systém KM**. Souřadnicové osy 1 a 2 jsou **hlavními centrálními souřadnicovými osami** a odpovídající KM jsou **hlavními centrálními KM**.

Poloha hlavních centrálních os 1 a 2, popsaná úhlem φ_I a velikosti hlavních centrálních KM průřezu se určí pomocí vztahů (21), resp. (17) a (18), kde J_y, J_z a J_{yz} jsou kvadratické momenty průřezu k libovolným osám y, z, procházejícím těžištěm průřezu.

Dalším významným atributem kvadratických momentů k natočeným osám je možnost jejich grafického znázornění v **Mohrově rovině**, tvořené vodorovnou osou osových KM a svislou osou deviačních KM. Za účelem příslušného odvození nejprve formálně upravíme transformační vztahy (17) a (18) využitím známých goniometrických vztahů - $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$. Po úpravě dostáváme

$$J_{y'} = \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_y - J_z}{2}\ \cos 2\varphi - J_{yz}\ \sin 2\varphi \tag{22}$$

$$J_{z'} = \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_y - J_z}{2}\ \cos 2\varphi + J_{yz}\ \sin 2\varphi \tag{23}$$

V rovnici (22) převedeme první pravý člen na levou stranu, vzniklý výraz umocníme a sečteme ho s umocněným vztahem (18) pro deviační KM

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2 =$$

$$= \left(\frac{J_y - J_z}{2}\ \cos 2\varphi - J_{yz}\ \sin 2\varphi\right)^2 + \left(\frac{J_y - J_z}{2}\ \sin 2\varphi + J_{yz}\ \cos 2\varphi\right)^2$$

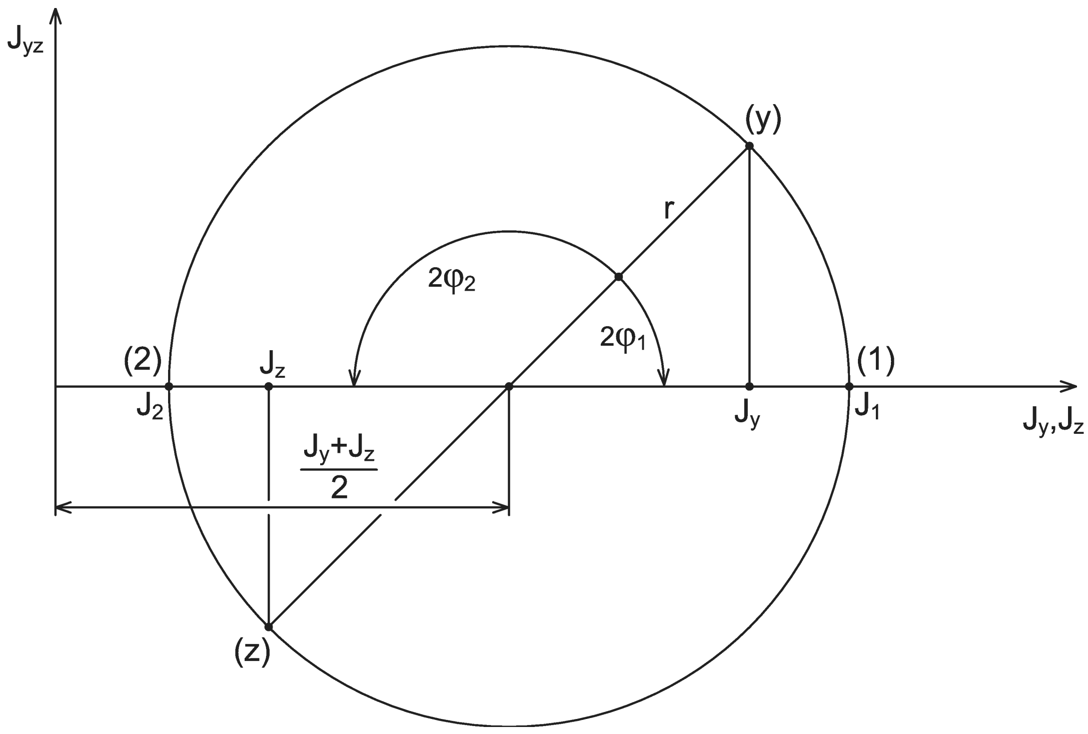
Po úpravě pravé strany dostáváme finální relaci (26)

$$\left(J_{y'} - \frac{J_y + J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2 = \left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2 \tag{24}$$

která v Mohrově rovině představuje rovnici kružnici kružnice se středem v místě $\frac{J_y - J_z}{2}$ a s poloměrem r

$$r = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2} \tag{25}$$

Grafické znázornění odpovídá poměrům na předchozím obrázku



Z analýzy transformačních vztahů (19), (22) a (23) vyplývá, že úhlu natočení φ mezi dvěma souřadnicovými systémy odpovídá dvojnásobný úhel 2φ mezi odpovídajícími body na Mohrově kružnici ve stejném smyslu.

Pomocí Mohrovy kružnice je možné snadno vypočítat velikost maximálního a minimálního KM průřezu J_1 a J_2

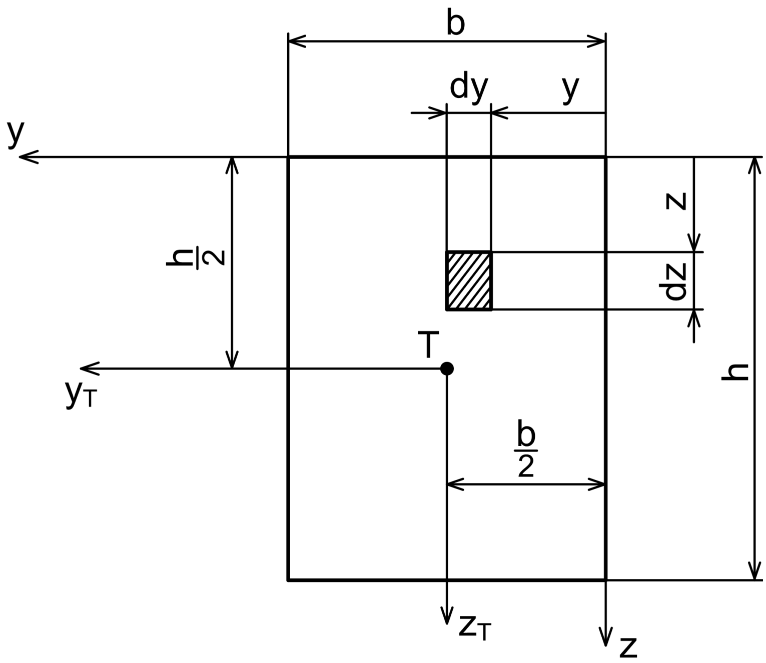
$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2} \tag{26}$$

a stanovit příslušné hlavní směry φ_1 a φ_2.

5 DEMONSTRAČNÍ PŘÍKLADY

Př.1.: Stanovte kvadratické momenty obdélníkového a trojúhelníkového průřezu k osám procházejícími stranami a k těžištním osám využitím definičních vztahů a Steinerovy věty.

a) Obdélníkový průřez



Osové kvadr. momenty J_y a J_z a deviační moment J_{yz} k osám y, z

$$J_y = \int_\psi z^2 \, \mathrm{d}S = \int_\psi z^2 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^h z^2 \, \mathrm{d}z = \frac{bh^3}{3}$$

$$J_z = \int_\psi y^2 \, \mathrm{d}S = \int_\psi y^2 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^b y^2 \, \mathrm{d}y = \frac{hb^3}{3}$$

$$J_{yz} = \int_\psi yz \, \mathrm{d}S = \int_\psi yz \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^b y \, \mathrm{d}y \int_0^h z \, \mathrm{d}z = \frac{b^2h^2}{4}$$

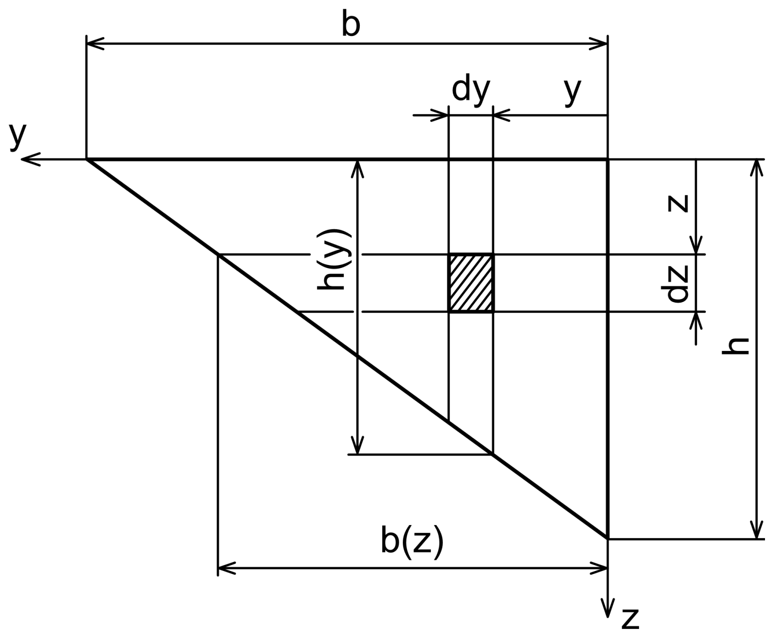
Osové kvadratické momenty J_{yT} a J_{zT} a deviační moment $J_{yT,zT}$ k těžištním osám y_T, z_T

$$J_{yT} = J_y - \left(\frac{h}{2}\right)^2 S = \frac{bh^3}{3} - \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_{zT} = J_z - \left(\frac{b}{2}\right)^2 S = \frac{hb^3}{3} - \frac{b^2}{4}bh = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_{yT,zT} = J_{yz} - \frac{b}{2}\frac{h}{2}bh = \frac{b^2h^2}{4} - \frac{b^2h^2}{4} = 0$$

a) Trojúhelníkový průřez



Rovnice přepony

$$\frac{b(z)}{b} + \frac{z}{h} = 1 \quad \rightarrow \quad b(z) = b\left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

$$\frac{y}{b} + \frac{h(y)}{h} = 1 \quad \rightarrow \quad h(y) = h\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

Osové kvadr. momenty J_y a J_z a deviační moment J_{yz} k osám y, z

$$J_y = \int_{\psi} z^2 \, \mathrm{d}S = \int_{\psi} z^2 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h z^2 \, \mathrm{d}z \int_0^{b(z)} \mathrm{d}y = \int_0^h z^2 \, \mathrm{d}z \int_0^{b\left(1-\frac{z}{h}\right)} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^h z^2 \, \mathrm{d}z \, b\left(1 - \frac{z}{h}\right) = \int_0^h bz^2 \, \mathrm{d}z - \int_0^h b \, \frac{z^3}{h} \, \mathrm{d}z = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_z = \int_{\psi} y^2 \, \mathrm{d}S = \int_{\psi} y^2 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^b y^2 \, \mathrm{d}y \int_0^{h(y)} \mathrm{d}z = \int_0^b y^2 \, \mathrm{d}y \int_0^{h\left(1-\frac{y}{b}\right)} \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^b y^2 \, \mathrm{d}y \, h\left(1 - \frac{y}{b}\right) = \int_0^b hy^2 \, \mathrm{d}y - \int_0^b h \, \frac{y^3}{b} \, \mathrm{d}y = \frac{hb^3}{3} - \frac{hb^3}{4} = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_{yz} = \int_{\psi} yz \, \mathrm{d}S = \int_{\psi} yz \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h z \, \mathrm{d}z \int_0^{b(z)} y\mathrm{d}y = \int_0^h z \, \mathrm{d}z \int_0^{b\left(1-\frac{z}{h}\right)} y \, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^h z \, \mathrm{d}z \, \frac{1}{2} b^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 = \frac{b^2}{2} \left[\int_0^h z \, \mathrm{d}z - \int_0^h 2 \, \frac{z^2}{h} \, \mathrm{d}z + \int_0^h \frac{z^3}{h^2} \, \mathrm{d}z\right] =$$

$$= \frac{b^2}{2} \left[\frac{h^2}{2} - \frac{2}{3} h^2 + \frac{h^2}{4}\right] = \frac{b^2 h^2}{24}$$

Osové kvadratické momenty J_{yT} a J_{zT} a deviační moment $J_{yT,zT}$ k těžištním osám y_T, z_T stanovíme využitím Steinerovy věty

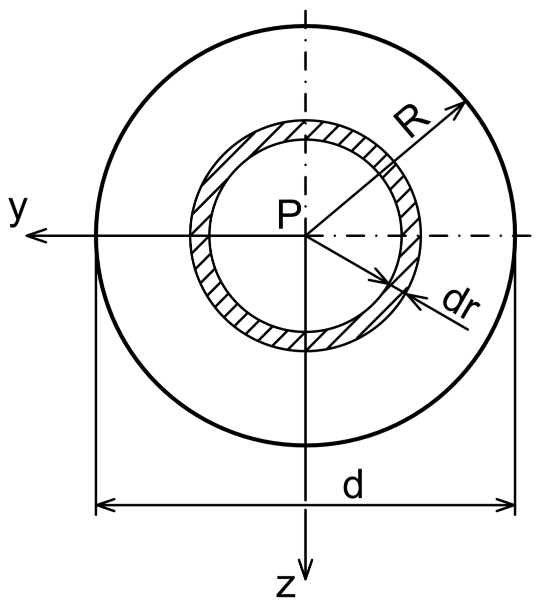
$$J_{yT} = J_y - z_T^2 S = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$J_{zT} = J_z - y_T^2 S = \frac{hb^3}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36}$$

$$J_{yT,zT} = J_{yz} - y_T z_T S = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{b}{3}\,\frac{h}{3}\,\frac{bh}{2} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

Př.2.: Stanovte polární kvadratický moment J_P a osové hlavní centrální kvadratické momenty J_y a J_z kruhového a mezikruhového průřezu

a) Kruhový průřez



Polární kvadratický moment J_P

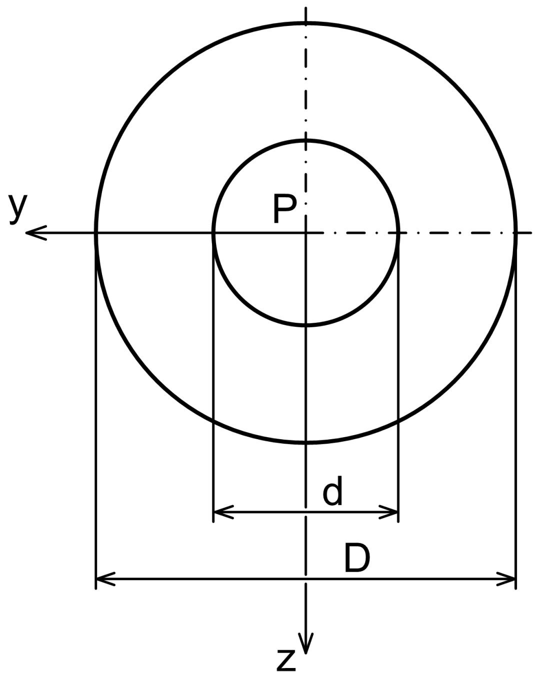
$$J_P = \int\limits_{\psi} r^2 \,\mathrm{d}S = \int\limits_{\psi} r^2 \cdot 2\pi r \,\mathrm{d}r = 2\pi \int\limits_0^R r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

Hlavní centrální kvadratické momenty průřezu J_y a J_z se stanoví využitím známé relace mezi polárním KM J_P a osovými KM J_y a J_z a dále osové symetrie kruhového průřezu

$$J_P = J_y + J_z = 2J_y = 2J_z \quad \Rightarrow \quad J_y = J_z = \frac{J_P}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

b) Mezikruhový průřez

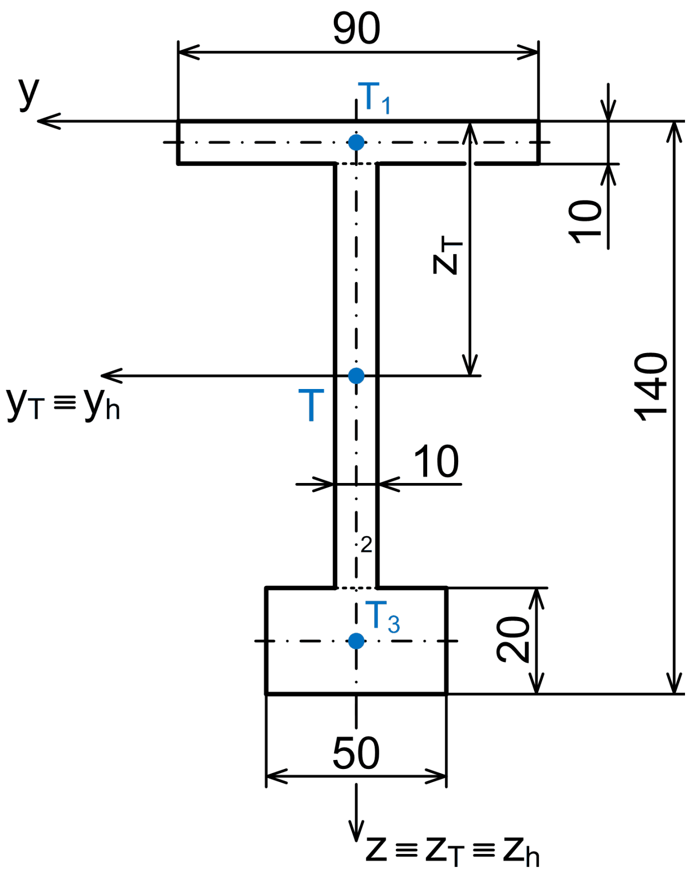
Při formulaci hledaných vztahů využijeme větu o podprůřezech



$$J_P = J_P^{\psi_D} - J_P^{\psi_d} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

$$J_y + J_z = J_y^{\psi_D} - J_y^{\psi_d} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

Př.3.: Stanovte hlavní centrální kvadratické momenty tenkostěnného profilu dle obrázku s jednou osou symetrie.



Svislá osa z je osou symetrie průřezu a v souladu se základními charakteristikami symetrických průřezů je zároveň hlavní centrální osou z_h KM. Druhá hlavní centrální osa y_h KM je k ní kolmá a prochází těžištěm průřezu T.

V prvním kroku stanovíme polohu z_T těžiště průřezu

$$z_T = \frac{U_y}{S} = \frac{\sum\limits_1^3 U_y^{\psi_i}}{\sum S_i} = \frac{90 \cdot 10 \cdot 5 + 10 \cdot 110 \cdot 65 + 20 \cdot 50 \cdot 130}{90 \cdot 10 + 10 \cdot 110 + 20 \cdot 50} =$$

$$= 68,67 \text{ mm}$$

Pro stanovení KM k ose y_h využijeme odvozeného vztahu pro osové KM obdélníkových podprůřezů k lokálním těžištním osám y_{T_i} a příslušnou Steinerovu větu

$$J_{y_h} = J_{y_T} = \sum_{1}^{3} \left(\frac{b_i h_i^3}{12} + z_{T_i}^2 S_i \right) =$$

$$= \frac{90 \cdot 10^3}{12} + (68,67-5)^2 \cdot 90 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 110^3}{12} + (68,67-65)^2 \cdot 10 \cdot 110 +$$

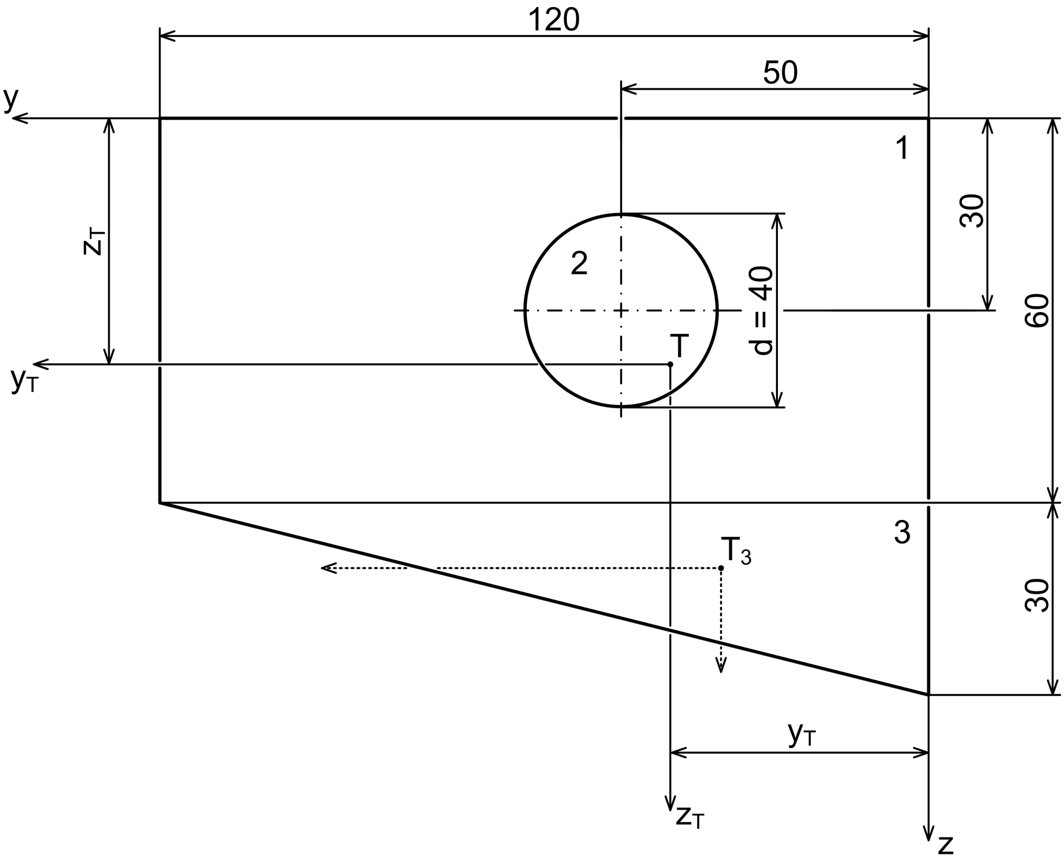
$$+ \frac{50 \cdot 20^3}{12} + (130 - 68,67)^2 \cdot 50 \cdot 20 = 8,575 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Pro stanovení KM v ose z_h využijeme odvozeného vztahu pro osové KM obdélníkových podprůřezů k lokální těžištní ose z_{T_i}, která je v našem případě z důvodu symetrie průřezu zároveň hlavní centrální osou KM průřezu.

$$J_{z_h} = J_{z_T} = \sum_{1}^{3} \frac{b_i h_i^3}{12} = \frac{10 \cdot 90^3}{12} + \frac{110 \cdot 10^3}{12} + \frac{20 \cdot 50^3}{12} = 0,825 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_n z_n} = J_{y_T z_T} = 0$$

Př.4.: Stanovte hlavní centrální kvadratické momenty průřezu s kruhovým otvorem dle obrázku



Algoritmus řešení:

1) Stanovíme KM J_y, J_z a J_{yz} ke vhodně zvolenému základnímu souřadnicovému systému x, y a vypočteme plochu průřezu S

$$J_y = \frac{1}{3}\, b_1 h_1^3 - \left(\frac{\pi d^4}{64} + z_{T_2}^2 S_2\right) + \left(\frac{1}{36}\, b_3 h_3^3 + z_{T_3}^2 S_3\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 60^3 - \left(\frac{\pi \cdot 40^4}{64} + 30^2 \cdot \frac{\pi \cdot 40^4}{4}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{36} \cdot 120 \cdot 30^3 + 70^2 \cdot \frac{120 \cdot 30}{2}\right) = 16,293 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_z = \frac{1}{3}\,h_1 b_1^3 - \left(\frac{\pi d^4}{64} + y_{T_2}^2 S_2\right) + \frac{1}{12}\,h_3 b_3^3 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 120^3 - \left(\frac{\pi \cdot 40^4}{64} + 50^2 \cdot \frac{\pi \cdot 40^4}{4}\right) =$$

$$= 35,613 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{yz} = y_{T_1} z_{T_1} S_1 - y_{T_2} z_{T_2} S_2 - \frac{b_3^2 h_3^2}{72} + y_{T_3} z_{T_3} S_3 =$$

$$= 60 \cdot 30 \cdot 120 \cdot 60 - 50 \cdot 30 \cdot \frac{\pi \cdot 40^2}{4} - \frac{120^2 \cdot 30^2}{72} +$$

$$+40 \cdot 70 \cdot \frac{120 \cdot 30}{2} = 15,935 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$S = \sum_1^3 S_i = 120 \cdot 60 - \frac{\pi \cdot 40^2}{4} + \frac{120 \cdot 30}{2} = 7,743 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

2) Stanovíme polohu těžiště y_T, z_T

$$z_T = \frac{U_y}{S} = \frac{\sum z_{T_i} S_i}{S} = \frac{30 \cdot 120 \cdot 60 - 30 \cdot \frac{\pi \cdot 40^2}{4} + 70 \cdot \frac{120 \cdot 30}{2}}{7,743 \cdot 10^3} = 39,30 \text{ mm}$$

$$y_T = \frac{U_z}{S} = \frac{\sum y_{T_i} S_i}{S} = \frac{60 \cdot 120 \cdot 60 - 50 \cdot \frac{\pi \cdot 40^2}{4} + 40 \cdot \frac{120 \cdot 30}{2}}{7,743 \cdot 10^3} = 56,98 \text{ mm}$$

3) Stanovíme KM k těžištním osám y_T a z_T pomocí Steinerovy věty

$$J_{y_T} = J_y - z_T^2 S = 16,293 \cdot 10^6 - 39,30^2 \cdot 7,743 \cdot 10^3 = 4,334 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{z_T} = J_z - y_T^2 S = 35,613 \cdot 10^6 - 56,98^2 \cdot 7,743 \cdot 10^3 = 10,474 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_T z_T} = J_{yz} - y_T z_T S = 15,935 \cdot 10^6 - 56,98 \cdot 39,30 \cdot 7,743 \cdot 10^3 = \\ = -1,404 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

4) Stanovíme polohu φ_h hlavních centrálních os KM

$$\varphi_h = \varphi_I = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2J_{y_T z_T}}{J_{y_T} - J_{z_T}}\right) = \\ = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2 \cdot (-1,404) \cdot 10^6}{4,334 \cdot 10^6 - 10,474 \cdot 10^6}\right) = -12,29°$$

5) Stanovíme hlavní centrální KM J_{y_h}, J_{z_h} průřezu

$$J_{y_h} = J_{y_T} \cos^2 \varphi_h - J_{y_T z_T} \sin 2\varphi_h + J_{z_T} \sin^2 \varphi_h = \\ = 4,334 \cdot 10^6 \cdot \cos^2(-12,29°) - (-1,404) \cdot 10^6 \cdot \sin(2 \cdot (-12,29°)) + \\ + 10,474 \cdot 10^6 \cdot \sin^2(-12,29°) = 4,028 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{z_h} = J_{y_T} \sin^2 \varphi_h + J_{y_T z_T} \sin 2\varphi_h + J_{z_T} \cos^2 \varphi_h = \\ = 4,334 \cdot 10^6 \cdot \sin^2(-12,29°) - (-1,404) \cdot 10^6 \cdot \sin(2 \cdot (-12,29°)) + \\ + 10,474 \cdot 10^6 \cdot \cos^2(-12,29°) = 10,780 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Z porovnání vypočtených hodnot plyne, že maximální a minimální hlavní centrální KM jsou rovny $J_1 = 10,780 \cdot 10^6$ mm^4 a $J_2 = 4,028 \cdot 10^6$ mm^4. Poloha příslušných hlavních os 1 a 2 je vyznačena na obrázku.

Výpočet hlavních centrálních KM lze rovněž stanovit pomocí vztahů plynoucích z Mohrovy kružnice

$$J_{1,2} = \frac{J_{y_T} + J_{z_T}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{y_T} - J_{z_T}}{2}\right)^2 + J_{y_T z_T}^2} =$$

$$= \left[\frac{4,334 + 10,474}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4,334 - 10,474}{2}\right)^2 + (-1,404)^2}\right] \cdot 10^6 =$$

$$= \begin{cases} 10,780 \cdot 10^6 = J_1 \\ 4,028 \cdot 10^6 = J_2 \end{cases}$$

Rychlejší a názornější cestou jsme tedy dospěli ke stejným výsledkům.